Récursivité II

1 - Prise en main

Le module `turtle` permet de réaliser des dessins de façon ludique en imaginant qu'une "tortue" traine derrière elle un crayon.
Pour tracer une figure, l'utilisation de la bibliothèque s'effectue par :

```
from turtle import *
reset()
```

Une fenêtre est crée, elle représente la feuille sur laquelle la tortue se déplace. Elle est représentée par un flèche placée au centre de la feuille (coordonnées (0,0)) et orientée vers l'est (angle 0 degré).
Le module utilise quelques règles simples :

- `forward(n)` permet de d'avancer la tortue de n pixels ;
- `left(theta)` permet de déplacer le pointeur de la tortue de θ degré vers la gauche.

On peut également utiliser quelques paramètres "cosmétiques" :

— `pensize(width)` pour changer l'épaisseur du trait

— `pencolor(color)` pour modifier la couleur

Ex. 1 :

Q 1 - Proposer une fonction `triangle(l)` qui dessine un triangle équilatéral dont les côté ont une longueur de `l`.
Q 2 - Proposer une fonction non récursive `polygone(n,l)` qui dessine un polygone de `n` côtés de longueur `l`.
Q 3 - Réécrire la fonction précédente de manière récursive.

Bonus : proposer un code pour modifier la couleur et la taille du trait de chaque côté. On pourra penser à faire une modification à chaque trait, ou un trait sur deux.

2 - Fractale de Van Koch

La courbe de Van Koch est l'une des premières courbes fractales à avoir été décrite (1904). Elle respecte les étapes suivantes :

- tracer un segement ;
- diviser le segment en trois et construire un triangle équilatéral ayant pour base le tiers central du segment ;
- reproduire ce procédé sur chacun des segments obtenus, indéfiniment.

Voici le trois premiers fractals de Van Koch :

Ex. 2 :

Ecrire une procedure recursive `koch(n,l)` qui trace le n-ème fractal de Van Koch sur une longueur ℓ. On respectera les étapes suivantes :

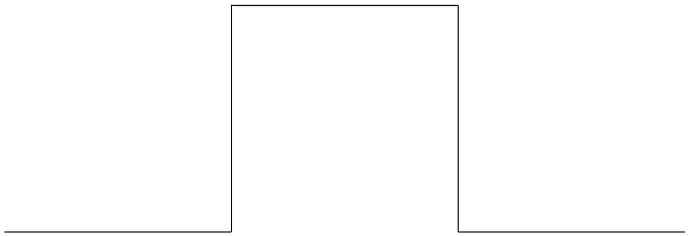
- si $n = 1$, avancer la tortue de `l` ;
- si $n \geq 2$: tracer 4 fois le $(n-1)$-ème fractal sur une longueur $\ell/3$ sur chacun des segments du deuxième fractal.

Remarque 1 :

La courbe de Koch constitue un exemple de courbe continue mais non dérivable en chacun de ses points. Le flocon de Koch a été inventé en 1904 par le mathématicien suédois Helge von Koch.

3 - Fractale de Minkowski

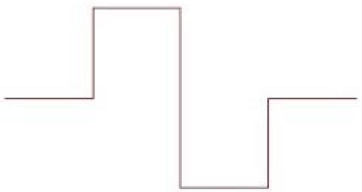
La fractale de Minkowski se dessine de manière analogue à celui de Van Koch selon le tracé suivant :

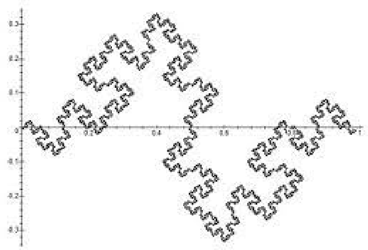


Ex. 3 :

Ecrire une procédure récursive `minkowski(n,l)` qui permet de tracer le n-ème fractal de Minkowski de longeur ℓ.

Bonus : Il existe d'autre type de fractales dont l'une est appelée saucisse de Minkowski qui utilise le schéma ci-contre. On obtient alors la figure ci-dessous :



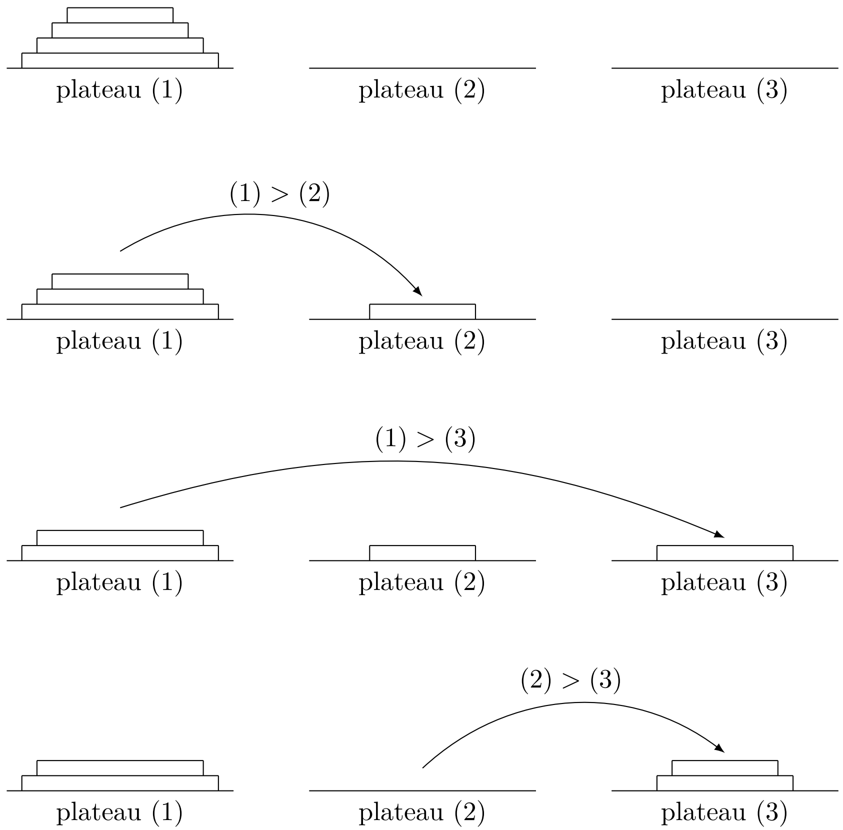


4 - Tours de Hanoï

Le jeu des tours de Hanoï est constitué de trois plateaux numérotés (1), (2) et (3). Sur l'un d'entre eux sont empilés les uns sur les autres n disques de moins en moins larges.
Le casse-tête consiste à déplacer les n disques d'un plateau à un autre en respectant les règles suivantes :

- on ne déplace qu'un disque à la fois de l'un des trois plateaux vers un autre ;
- sur chaque plateau on ne peut déplacer que le disque placé en haut ;
- à aucun moment un disque ne peut être placé sur un disque plus petit.

Voici par exemple les premiers déplacements à effectuer pour résoudre le casse-tête dans le cas de 4 disques.



Ex. 4 :

Ecrire une procédure récursive `hanoi(n,i,j)` qui, étant donné trois entiers $n \geq 1$ et i et j distincts compris entre 1 et 3, affiche les déplacements successifs à effectuer pour déplacer n disques du plateau i au plateau j. On procédera ainsi :

- si $n = 1$, afficher : `(i) -> (j)` ;
- si $n \geq 2$:
  - déplacer "correctement" $n - 1$ disques du plateau i au troisième plateau ;
  - afficher le déplacement du plus grand disque du plateau i au plateau j ;
  - déplacer "correctement" les $n - 1$ disques placés sur le troisième plateau vers le plateau j.

On pourra remarquer que si i et j désignent deux numéros de plateaux alors le troisième plateau porte le numéro $k = 6 - i - j$.

Ex. 5 :

Pour tout $n \geq 1$ on pose a_n le nombre de déplacements effectués pour résoudre le casse-tête lorsqu'il y a n disques. On a donc $a_1 = 1$.

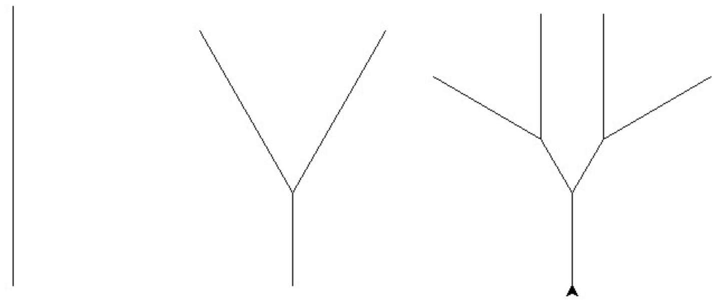
1. Exprimer, pour tout $n \geq 2$, a_n en fonction de a_{n-1}.
2. Montrer alors que pour tout $n \geq 1$ on a : $a_n = 2^n - 1$. Qu'en pensez-vous ?

5 - Arbre de Pythagore

Pour tracer le n-ème fractal de Pythagore de longueur ℓ on procède ainsi :

- faire pointer la tortue vers le nord ;
- si $n = 0$, tracer un segment de longueur ℓ et revenir au point de départ ;
- si $n = 1$ tracer un segment de longeur $\ell/3$ et pour le deuxième tiers, tracer deux segments de longeur $2\ell/3$ inclinés d'un angle 30 degrés l'un vers la gauche et l'autre vers la droite et revenir au point de départ ;
- réitére le procédé sur les deux derniers segments.

Ainsi voici les arbres obtenus pour $n = 0$, 1 et 2 :



Ex. 6 :

Ecrire une procédure récursive `pythagore(n,l)` qui trace le n-ème fractal de Pythagore.