

I. Les transports d'énergie

1 - Notion de flux thermique

◆ Définition :

Le flux thermique ou flux de chaleur, souvent noté Φ , entre deux milieux de températures différentes correspond au transfert thermique δQ qui a eu lieu pendant un intervalle de temps dt entre deux milieux de températures différentes :

$$\Phi = \frac{\delta Q}{dt}$$

Ce transfert d'énergie est irréversible et toujours réalisé du corps le plus chaud vers le corps le plus froid, ce qui produit à terme une égalisation des températures des deux corps en contact. Le flux thermique s'exprime en watt (W).

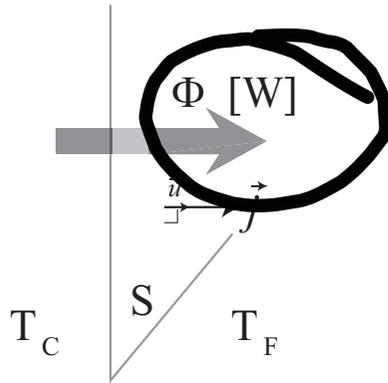


FIGURE 1 – Flux thermique et densité de flux thermique

Le flux thermique dépend évidemment de la différence de température entre le corps chaud et le corps plus froid mais aussi de la surface de contact. Plus cette surface est importante plus l'échange est important. On définit alors un vecteur flux surfacique qui est une grandeur indépendante de la surface d'échange.

◆ Définition :

Lorsque ce flux thermique traverse une surface S de manière uniforme, on peut définir une densité de flux de chaleur notée \vec{j} telle que :

$$\vec{j} = \frac{\Phi}{S} \vec{u}$$

où \vec{u} est un vecteur unitaire orienté selon la direction du flux Φ . Cette densité de flux de chaleur est par conséquent exprimée en watt par mètre carré ($W.m^{-2}$)

2 - Transport par convection

Ce mode suppose la présence d'un liquide ou d'un gaz au contact d'une paroi solide. On appelle transport thermique par convection, un transfert d'énergie qui s'accompagne du mouvement macroscopique du fluide. Ce dernier se produit naturellement lorsqu'un corps chaud est placé sous un fluide froid. Les particules de fluide s'échauffant au contact du corps chaud se dilate et la poussée d'Archimède devient alors plus importante que le poids. Ces particules sont entraînées vers le haut. Des techniques d'imagerie comme la strioscopie ou imagerie Schlieren permet d'observer les mouvements de fluide :

◆ Définition :

Le flux thermique surfacique (noté j , énergie transférée par unité de temps et par unité de surface) peut être décrit par la loi de Newton traduisant le fait que le transfert thermique est proportionnel à l'écart de température entre le fluide et la paroi.

$$\vec{j} = h(T_{paroi} - T_{fluide}) \vec{u}_{paroi \rightarrow fluide}$$

où h est un coefficient empirique appelé coefficient de transfert convectif exprimé en $W.m^{-2}.K^{-1}$ et $\vec{u}_{paroi \rightarrow fluide}$ est un vecteur unitaire dirigé de la paroi vers le fluide.

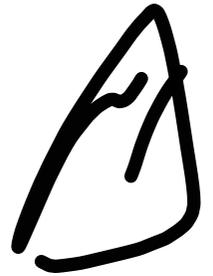


FIGURE 2 – Visualisation de la convection par strioscopie, Harvard Natural Science 2014



Type de transfert	fluide	h ($\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$)
Convection naturelle	eau	100 - 1000
	gaz	5 - 30
Convection forcée	gaz	10 - 300
	eau	300 - 12 000
	huile	50 - 1700

TABLE 1 – Coefficients conducto-convectif usuels



Remarque 1 :

Cette loi est dite **phénoménologique**, c'est à dire qu'elle n'est pas démontrée mais repose sur des expériences. Comme ce transport d'énergie s'accompagne également de conduction, on appelle parfois h coefficient conducto-convectif.

Le coefficient h dépend fortement des conditions d'écoulement du fluide autour de l'objet étudié. Les valeurs indiquées dans le tableau ci-dessus sont donc des ordres de grandeurs. Théoriquement, le transport par convection est difficile à étudier car il faut combiner la thermodynamique pour les échanges d'énergie à la mécanique des fluides pour les mouvements du fluide. On a alors souvent recours à des simulations numériques (cf. fig 4) pour déterminer l'énergie échangée par transfert thermique.

3 - Transport par conduction

La conduction thermique est un transfert thermique spontané d'une région de température élevée (T_C) vers une région de température plus basse (T_F), et est décrite par la loi dite de Fourier lorsqu'il n'y a pas de mouvement global de matière.

Définition :

Dans un solide ou un fluide immobile, la densité de flux de chaleur est proportionnelle au gradient de température.

$$\vec{j} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T)$$

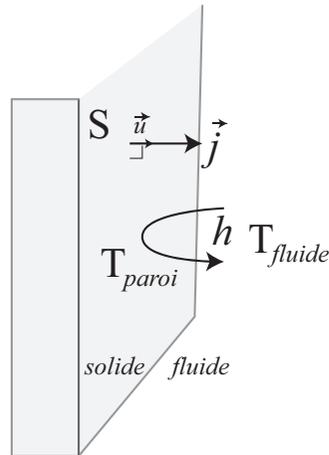


FIGURE 3 – Densité de flux thermique par convection

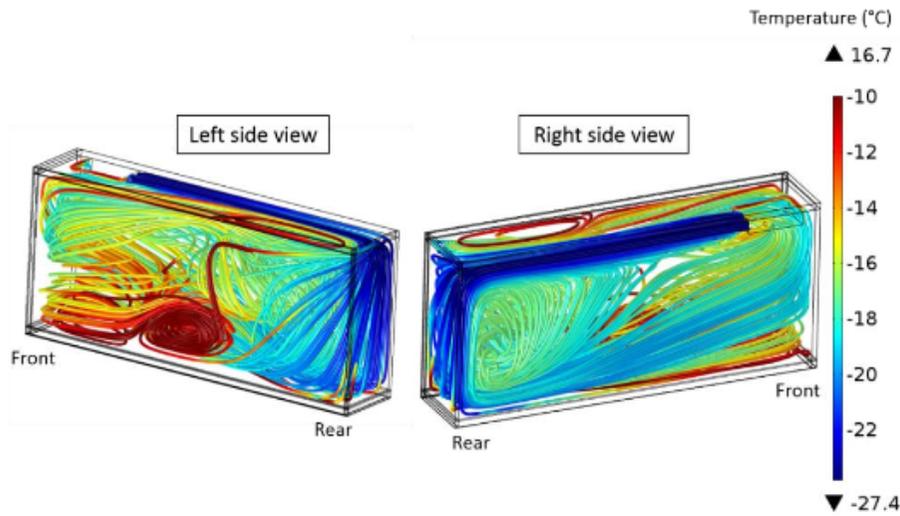


FIGURE 4 – Simulation numérique de convection par Comsol

matériau	λ en $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
air	0,024
cuivre	390
fer	82
béton	1
bois	0,2
polystyrène	0,04

TABLE 2 – Conductivités thermiques usuelles

Remarque 2 :

Tout comme la loi de Newton, cette loi est phénoménologique et est valable si le gradient de température n'est pas trop important.

La constante de proportionnalité λ est nommée conductivité thermique du matériau. Elle est toujours positive. Avec les unités du système international, la conductivité thermique λ s'exprime en $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$. La densité de flux de chaleur j s'exprime en watt par mètre carré W.m^{-2} .

Dans un fluide, par exemple de l'eau chauffée par sa surface supérieure, il n'y pas de mouvement de convection. La loi de Fourier s'applique donc, et non celle de Newton.

Remarque 3 :

L'air est excellent isolant... sous réserve qu'il n'y ait pas de convection. Dans les vitres à double vitrage, l'épaisseur d'air entre les vitres est suffisamment fine pour éviter les mouvement de convection. Dans le même ordre d'idée, les mousses de polystyrène enferme des bulles d'air de petite taille pour réaliser des matériaux de bonne isolation thermique

Lorsque la diffusion thermique s'effectue selon un seul axe x , l'opérateur gradient se résume à

$$\vec{\text{grad}}(T) = \frac{dT}{dx} \vec{e}_x$$

Remarque 4 :

Le signe (-) présent dans la loi de Fourier résulte du fait que la température diminue du corps chaud vers le corps froid. La dérivée de la température est donc négative dans le sens du transfert thermique.

Remarque 5 :

On sait également maintenant créer des matériaux nanostructurés avec des conductivités thermiques très importantes. En 2008, une équipe de l'université de Californie montre que le graphène qui est une association plane de molécules de carbone possède une conductivité thermique supérieure à $4000 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

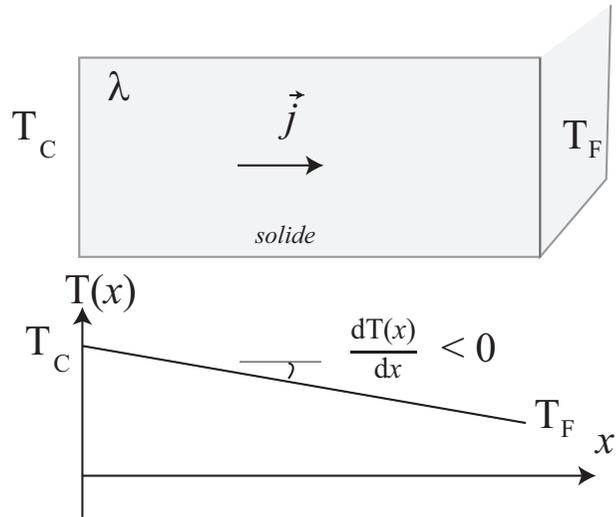


FIGURE 5 – Densité de flux thermique par conduction

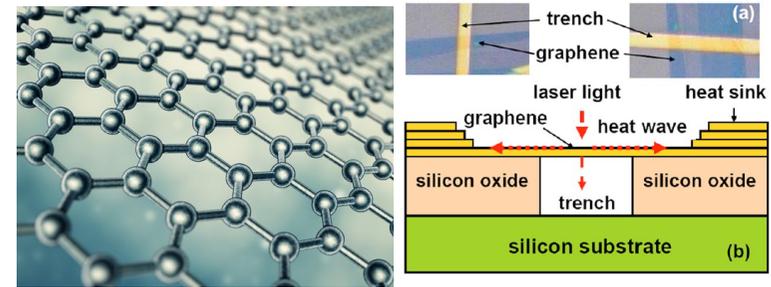


FIGURE 7 – Représentation du graphène et dispositif de mesure de la conductivité thermique du graphène, Extremely high thermal conductivity of graphene : Prospects for thermal management applications in nanoelectronic circuits, Gosh et al. Applied Phys. Let., 2008.

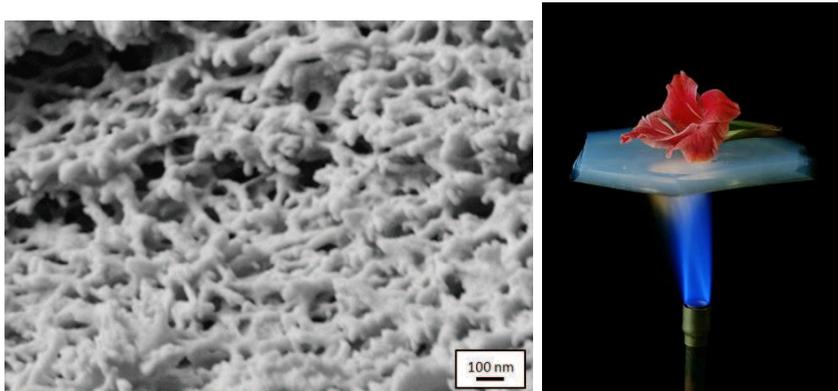


FIGURE 6 – Projet NANOCEL, les premiers superisolants thermiques biosourcés. La cellulose et ses dérivés sont utilisés pour améliorer les propriétés des silices superisolantes de conductivités inférieures à 0.015 W/m.K. (juin 2013) Arnaud-Rigacci, Mines ParisTech

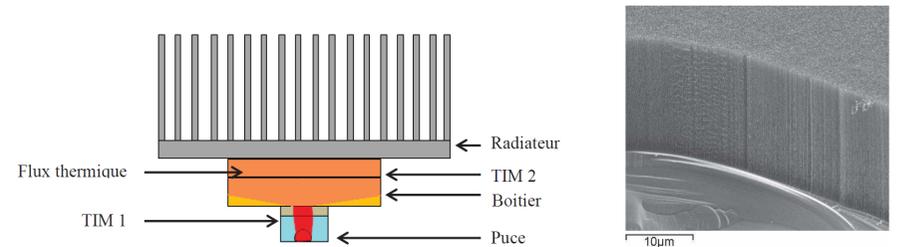


FIGURE 8 – Présence de Matériaux d'Interface Thermique entre composant électronique de puissance et radiateur. Exemple de TIM par agencement de nanotubes de carbones, Matériaux d'Interface Thermique Nanostructurés, Thèse de J. Daon 2016, École CentraleSupélec.

Remarque 6 :

Les vibrations d'un solide sont appelés phonons, ces ondes se déplacent dans le matériau solide et rebondissent au niveau des imperfections. Pour des solides de faible dimension sans défaut, le transport de la chaleur dépend de la taille et de la forme de l'objet ! La loi de Fourier n'est plus valable.



FIGURE 9 – Radiateur chauffant de type radiant

RELIRE NanoscaleThermaleTransport2012

4 - Transport par rayonnement

En 1879, le physicien autrichien Stefan proposait une loi expérimentale reliant la puissance surfacique totale (sur toutes les longueurs d'onde du spectre) émise par un corps noir en équilibre thermodynamique et radiatif dans un demi espace (angle solide de 2π) en fonction de la seule température du corps noir. Cette loi trouva sa justification théorique par la suite, à la lumière des travaux de Planck.

Définition :

La loi de Stefan permet de relier flux d'énergie émis par un corps noir à sa température :

$$j_{th} = \sigma T^4$$

avec $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$

Ce mode de transfert est souvent négligé devant le transfert thermique par convection.

II. Analogie électrique

1 - Résistance thermique

a) Présentation

Définition :

En régime **stationnaire**, lorsque le flux d'énergie relie deux thermostats de température T_0 et T_1 , il est possible de définir une résistance thermique par

$$R_{th} = \frac{T_C - T_F}{\Phi}$$

R s'exprime en $\text{K} \cdot \text{W}^{-1}$.

Afin d'utiliser des modèles de résolution courant en électricité, il est possible d'utiliser un formalisme quasi-identique à celui vu en première année. On utilise alors le tableau suivant pour évaluer les grandeurs analogues.

Électricité	Thermo
V	T
I	Φ
R	R_{th}

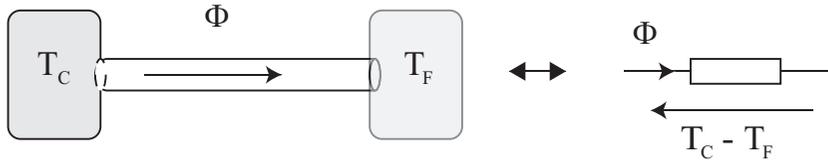


FIGURE 10 – Modélisation de résistance thermique

b) Résistance équivalente pour la convection

SCHEMA

En utilisant le modèle de Newton ($\vec{j} = h(T_{paroi} - T_{fluide})\vec{u}_{paroi \rightarrow fluide}$), le flux thermique est donné par :

$$\Phi = j \times S = hS(T_{paroi} - T_{fluide})$$

La résistance thermique de convection est donc donnée par :

$$R_{conv} = \frac{T_{paroi} - T_{fluide}}{\Phi} = \frac{1}{hS}$$

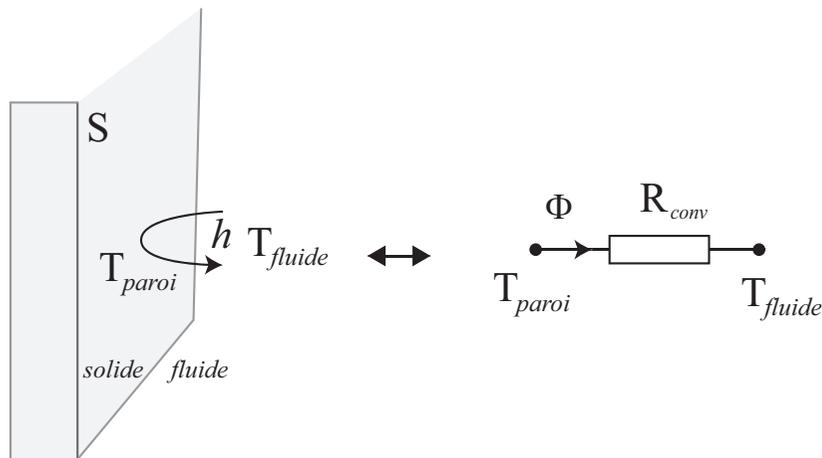


FIGURE 11 – Modèle de résistance équivalente à la convection

c) Résistance équivalente pour la conduction

Lorsque la conduction thermique est dans une unique direction et que la distance séparant les thermostats est faible devant les surfaces en regard, il est possible d'exprimer le gradient en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\text{grad}} T = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{e}_x$$

Pour une densité de flux uniforme, le flux thermique peut s'écrire

$$\Phi = \vec{j} \cdot \vec{S} = -\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}$$

L'intégration entre $x = 0$ et $x = e$ donne :

$$\int_0^e \Phi dx = -\lambda S (T_F - T_C) \quad \text{soit} \quad T_C - T_F = \frac{e}{\lambda S} \Phi$$

Définition :

Pour un matériau plan d'épaisseur e et de surface S , on retiendra que la résistance thermique de conduction est donc donnée par :

$$R_{cond} = \frac{T_C - T_F}{\Phi} = \frac{e}{\lambda S}$$

où λ est la conductivité du matériau

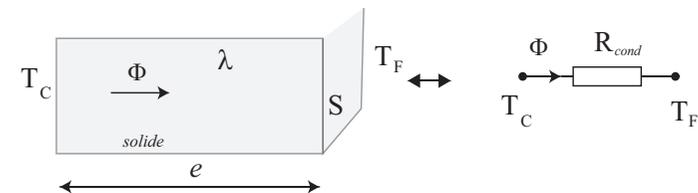


FIGURE 12 – Modèle de résistance équivalente à la conduction

Remarque 7 :

Dans le cas d'un tuyau ou d'une coquille de faible épaisseur devant son rayon, l'expression précédente reste valable.

- Pour un tuyau de rayon R , d'épaisseur $e \ll R$ et de longueur L , la résistance thermique est alors donnée par :

$$R_{cond} = \frac{e}{\lambda \times 2\pi RL}$$

- Pour une coquille de rayon R et d'épaisseur $e \ll R$, la résistance thermique est alors donnée par :

$$R_{cond} = \frac{e}{\lambda \times 4\pi R^2}$$

Remarque 8 :

Dans le bâtiment, les résistances thermiques indiquées sur les produits sont pour une surface de 1 m^2 soit $R_{matériau} = e/\lambda$. Le calcul de la résistance thermique totale doit donc être faite en divisant par la surface à isoler.

Exemple 1 La surface d'échange thermique d'une habitation située sous les toits est de $S = 15 \text{ m}^2$. Le toit n'est pas isolé et assimilable à une résistance thermique par convection de coefficient $h = 10 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$.

1 - Effectuer un schéma équivalent à l'aide de résistances thermiques.
2 - Déterminer la puissance du chauffage à installer pour maintenir une température intérieure de $\theta_{int} = 20^\circ\text{C}$ lorsque la température extérieure est de $\theta_{ext} = 0^\circ\text{C}$.

3 - Pour respecter les normes de rénovation énergétique (RT-2012) l'épaisseur de laine de verre à poser est de 10 cm. Estimer le gain économique sur 1 mois d'hiver (30 j) si le local est chauffé par un radiateur électrique.



FIGURE 13 – Laine de verre commerciale de résistance thermique "surfactive" $R = 5 \text{ K.W}^{-1}.\text{m}^2$

Données :

- conductivité de l'isolant :

$$\lambda_{isover} = 40.10^{-3} \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

- Coût de l'électricité : $1 \text{ kWh} = 0,16 \text{ euros}$

1 - En régime permanent, toute la puissance de chauffage est évacuée à l'extérieur. On en déduit que la puissance vérifie :

$$\Phi = \frac{\Delta\theta}{R_{th}} = hS\Delta\theta = 3,0 \text{ kW}$$

2 - Avec de la laine de verre, la résistance thermique devient $R = e/\lambda S$. La puissance de chauffage vérifie

$$\Phi = \frac{\Delta\theta}{R_{th}} = \frac{\lambda S \Delta\theta}{e} = 120 \text{ W}$$

Pour une utilisation sur un mois, l'énergie consommée vaut :

$$\mathcal{E}_{nonisole} = \Phi \times \Delta t = 2160 \text{ kWh} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{isole} = 173 \text{ kWh}$$

On en déduit le coût mensuel :

$$C_{nonisole} = 343\text{€} \quad \text{et} \quad C_{isole} = 13\text{€}$$

2 - Loi d'association

a) Association en série

On considère que des résistances thermiques sont en série lorsque différents matériaux sont superposés dans la direction du gradient de température.

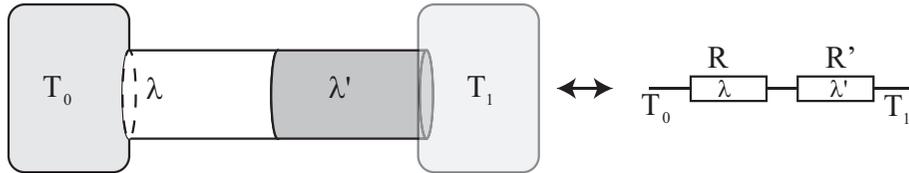


FIGURE 14 – Loi d'association en série

La résistance thermique équivalente à une association en série de deux résistances R et R' vaut alors :

$$R_{eq} = R + R'$$

Si une des résistances est beaucoup plus grande que l'autre alors la résistance équivalente est proche de la plus grande des résistances. Avec $R' = R/10$, on obtient :

$$R_{eq} = R + R/10 \approx R$$

Exemple 2

On considère dans un premier temps une vitre d'épaisseur $3e = 6 \text{ mm}$ et de surface $S = 1,5 \text{ m}^2$. La longueur caractéristique de la surface de la fenêtre est supposée grande par rapport à son épaisseur.

1 - Démontrer l'expression de la résistance thermique en régime permanent



d'une vitre simple d'épaisseur $3e$ puis la calculer.

2 - On considère maintenant un double vitrage. Le dispositif est formé par deux vitres d'épaisseur e séparées par une lame d'air de même épaisseur. Déterminer puis calculer la résistance thermique de l'ensemble.

Données :

- conductivité thermique de l'air : $\lambda_{air} = 0,024 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
- conductivité thermique du verre : $\lambda_{verre} = 1,2 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$

1 - L'épaisseur de la vitre étant faible par rapport à sa surface on peut utiliser les coordonnées cartésiennes

$$\vec{\text{grad}} T = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{e}_x$$

Le flux thermique peut donc s'écrire

$$\Phi = \vec{j} \cdot \vec{S} \cdot \vec{e}_x = -\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}$$

En régime stationnaire, le flux est constant, l'intégration entre $x = 0$ et $x = 3e$ donne :

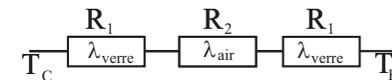
$$\int_0^{3e} \Phi dx = -\lambda S (T_F - T_C) \quad \text{soit} \quad T_C - T_F = \frac{3e}{\lambda S} \Phi$$

On en déduit que

$$R_{vitre} = \frac{3e}{\lambda S} = 3,3 \cdot 10^{-3} \text{ K.W}^{-1}$$

2 - Pour un double vitrage, on peut assimiler le système à 3 résistances en série de valeurs

$$R_1 = \frac{e}{\lambda_{verre} S} \quad \text{et} \quad R_2 = \frac{e}{\lambda_{air} S}$$



On obtient alors une résistance équivalente de

$$R_{eq} = 2R_1 + R_2 = 58.10^{-3} \text{ K.W}^{-1}$$

La résistance thermique est donc beaucoup plus importante pour le double vitrage que le simple.

Remarque 9 :

Pour lutter contre le réchauffement climatique, l'agence gouvernementale Ademe pour la transition écologique a mis en place des aides financières pour aider les particuliers à isoler leur habitation, notamment avec du double vitrage.

b) Association en parallèle

Deux résistances thermiques sont associées en parallèle lorsque le flux d'énergie possède deux chemins différents pour relier deux températures.

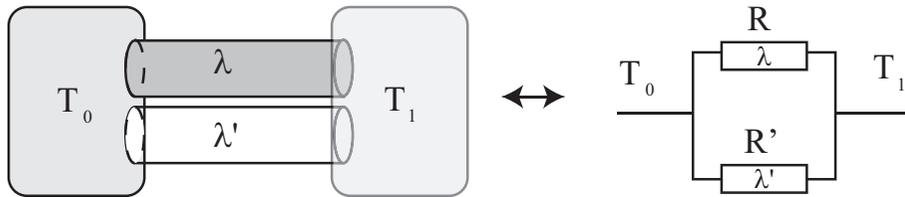


FIGURE 15 – Loi d'association en parallèle

Pour deux résistances R et R' en parallèle, la résistance équivalente est donnée par

$$R_{eq} = \frac{RR'}{R + R'}$$

Si une des résistances est beaucoup plus grande que l'autre alors la résistance équivalente est proche de la plus petite des résistances. Avec $R = 10 * R'$, on obtient :

$$R_{eq} = \frac{10R' \times R'}{10R' + R'} = \frac{10}{11}R' \approx R'$$

Remarque 10 :

Dans le bâtiment, on parle de pont thermique : il suffit d'un seul endroit mal isolé thermiquement pour que les efforts d'isolation soit anéantis.

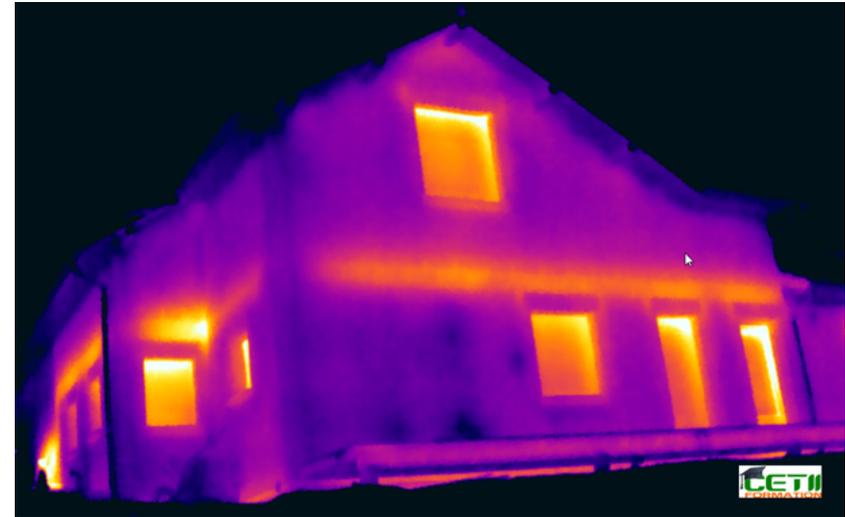


FIGURE 16 – Ponts thermiques visibles sur les fenêtres et la dalle du premier étage d'une maison

Exemple 3

On considère un mug contenant une masse $m = 200 \text{ g}$ de boisson chaude de température $\theta_C = 60^\circ\text{C}$ posé sur une table. L'air extérieur est de $\theta_{ext} = 20^\circ\text{C}$.

1 - Estimer la résistance thermique associée à la surface latérale du mug.

2 - Déterminer la résistance thermique associée à la surface d'échange supérieure.

Conclure sur le mode d'échange principal entre le mug et l'air extérieur.



3 - En déduire une équation différentielle sur la température du contenu du mug.

4 - Représenter l'allure de l'évolution de la température en fonction du temps.

Données :

- Caractéristiques géométriques du mug
 - Surface latérale $S_{lat} = 200 \text{ cm}^2$
 - Surface supérieure $S_{sup} = 30 \text{ cm}^2$
 - épaisseur de céramique $e = 5,0 \text{ mm}$
- Valeurs thermodynamiques
 - coefficient conducto-convectif de l'air $h = 10 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-2}$
 - conductivité de la céramique $\lambda = 5,0 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
 - capacité thermique de l'eau $c = 4,2 \text{ kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$

1 - On suppose que l'épaisseur est très inférieure au rayon. En supposant que la résistance géométrique plane est valable, il vient :

$$R_{Lat} \approx \frac{e}{\lambda S} = 0,050 \text{ K.W}^{-1}$$

2 - Pour la surface supérieure où l'énergie est échangée par convection, on obtient :

$$R_{sup} = \frac{1}{hS_{sup}} = 33 \text{ K.W}^{-1}$$

3 - La résistance thermique équivalente est issue d'une association en parallèle :

$$R_{eq} = \frac{R_{sup}R_{lat}}{R_{sup} + R_{lat}} \approx R_{sup}$$

La puissance dissipée vers l'extérieur est donnée par :

$$\Phi = \frac{\theta_C - \theta_{ext}}{R_{sup}}$$

Appliquons le premier principe isobare au contenu, il vient :

$$dH = -\Phi dt \quad \text{soit} \quad mcd\theta = -\frac{\theta_C - \theta_{ext}}{R_{sup}} dt$$

On obtient donc :

$$\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{R_{sup}mc}\theta = \frac{1}{R_{sup}mc}\theta_{ext}$$

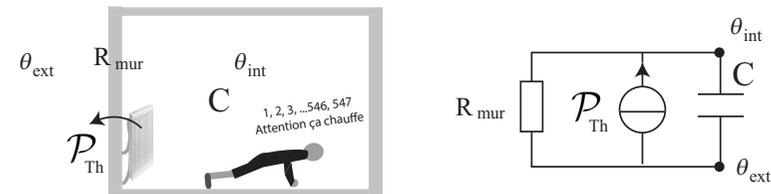
4 - ALLURE A FAIRE

3 - Sources et capacité thermique

Un système de chauffage délivre une puissance \mathcal{P}_{th} . Il peut alors être représenté par une source idéale de courant.

SCHEMA

La capacité thermique d'un corps peut être modélisé par une capacité d'un condensateur. Pour un radiateur de puissance \mathcal{P}_{th} chauffant une pièce de capacité thermique C , isolée de l'extérieur par une résistance R_{mur} , le schéma électrique équivalent est :



Notons Φ_R le flux traversant le mur et Φ_C celui traversant la capacité. L'application de la loi des noeuds donne :

$$\mathcal{P}_{th} = \Phi_R + \Phi_C$$

En utilisation les relations courant-tension, il vient :

$$\mathcal{P}_{th} = \frac{\theta_{int} - \theta_{ext}}{R_{mur}} + C \frac{d\theta_{int}}{dt}$$

On obtient alors :

$$\frac{d\theta_{int}}{dt} + \frac{\theta_{int}}{R_{mur}C} = \frac{\theta_{ext} + R_{mur}\mathcal{P}_{th}}{R_{mur}C}$$

Le temps caractéristique est $\tau = R_{mur}C$.

On obtient la même équation en appliquant le premier principe infinitésimal à la pièce entre t et $t + dt$:

$$Cd\theta_{int} = \mathcal{P}_{th}dt - R_{mur}(\theta_{int} - \theta_{ext})dt$$

On obtient alors également en regroupant les termes :

$$\frac{d\theta_{int}}{dt} + \frac{\theta_{int}}{R_{mur}C} = \frac{\theta_{ext} + R_{mur}\mathcal{P}_{th}}{R_{mur}C}$$

III. Equation de la chaleur

1 - Diffusion à une dimension

a) Diffusion sans terme source

Considérons un barreau de faible diamètre devant sa longueur soumis à une différence de température entre ses extrémités. On supposera que les parois sont calorifugées de sorte que le flux thermique soit uniquement dirigé selon l'axe de la barre noté Ox . La température peut être définie sur une tranche de largeur dx pour peu que celle-ci contienne suffisamment d'atomes. On note c_p sa capacité thermique à pression constante, ρ sa masse volumique. Appliquons le premier principe à une tranche de largeur dx pendant un intervalle de temps dt .

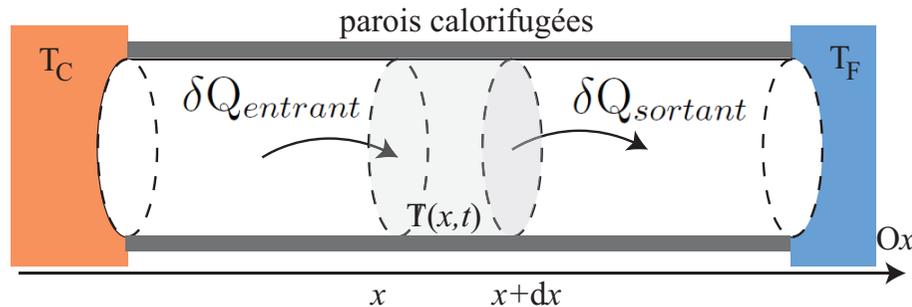


FIGURE 17 – Notation pour une diffusion à une dimension

La température de cette tranche évolue de dT . Il vient :

$$dH = \delta Q_{entrant} - \delta Q_{sortant}$$

avec

$$\begin{cases} dH = \rho S dx c_p \times dT \\ \delta Q_{entrant} = j(x,t) S dt \\ \delta Q_{sortant} = j(x+dx,t) S dt \end{cases}$$

On obtient après division par $S dx \times dt$:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{j(x+dx,t) - j(x,t)}{dx}$$

Propriété :

En généralisant cette équation en plusieurs dimensions, on obtient :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div } \vec{j}$$

D'après la loi de Fourier,

$$\vec{j} = -\lambda \text{grad } T \quad \text{soit} \quad j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

Ainsi,

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Définition :

Pour une géométrie quelconque, l'équation de la chaleur sans terme source peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T$$

où Δ . est l'opérateur Laplacien.

DECRIRE METHODE DE JACOBI POUR RESOLUTION NUMERIQUE

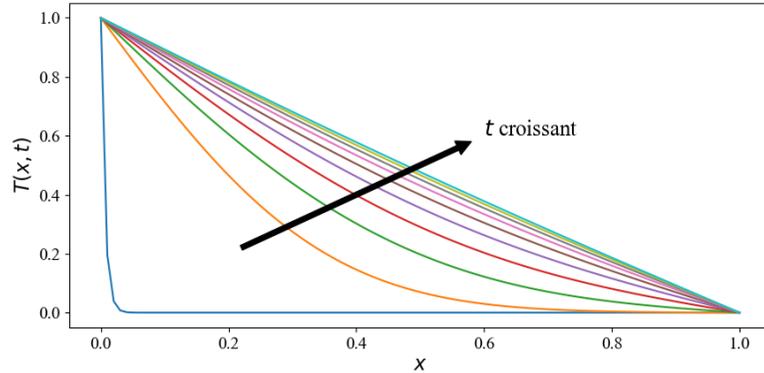


FIGURE 18 – Simulation de l'évolution temporelle de température

Remarque 11 :

Cette équation n'est pas réversible. Si on effectue le changement de variable $t \rightarrow -t$, alors $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -\frac{\partial}{\partial t}$, l'équation est modifiée :

$$-\rho c_P \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Ceci est la conséquence de l'irréversibilité des transferts thermiques qui sont toujours orientés de la source chaude vers la source froide.

b) Résolution en régime stationnaire.

Définition :

Le régime stationnaire en diffusion thermique est obtenu lorsque $\partial T / \partial t = 0$.

La résolution de l'équation de diffusion thermique en régime stationnaire revient donc à résoudre :

$$\lambda \Delta T = 0$$

Soit à une dimension :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

Pour un matériau d'épaisseur r , l'intégration de cette équation donne un profil de type affine : SCHEMA

$$T(x) = ax + b$$

où les constantes d'intégration sont données par les conditions aux limites de chaque côté du matériau. on obtient alors :

$$T(x) = \frac{T_1 - T_0}{e} x + T_0$$

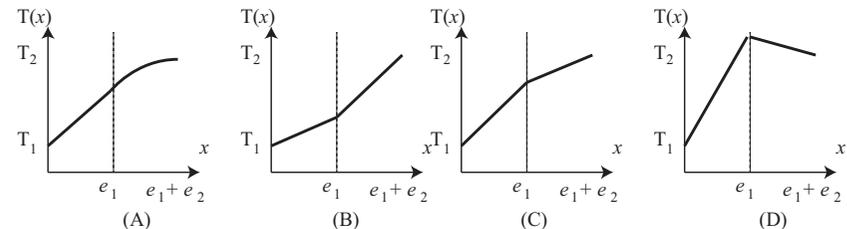
Il pourrait sembler curieux que la résolution soit identique quelque soit le matériau puisque la conductivité disparaît de la résolution. C'est le flux thermique qui dépendra de la conductivité et du profil de température.



Exemple

4

On considère un mur de béton d'épaisseur e_2 recouvert d'un isolant d'épaisseur e_1 . On note $T_1 = 280$ K la température en $x = 0$ et $T_2 = 300$ K la température en $x = e_1 + e_2$. On suppose que la température ne dépend que de x et que le régime permanent est atteint.



- 1 - Déterminer, en le justifiant, si chacun des quatre profils de température proposés ci-dessous est possible ou non.
- 2 - Précisez le sens du vecteur densité de flux thermique et son expression. En déduire le profil de température exact.

Données : Conductivités :

- conductivité du béton $\lambda_b = 1,0 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$

- conductivité de l'isolant $\lambda_i = 0,03 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$

FAIRE CORRECTION

c) Diffusivité thermique et régime stationnaire

La résolution de l'équation différentielle de diffusion thermique n'est pas aisée. L'une des premières méthodes de résolution fut proposée par Joseph Fourier qui introduisit pour la première fois les séries de Fourier bien définies maintenant en mathématiques.

Dans cet ouvrage, la résolution se fera principalement en régime stationnaire, c'est-à-dire lorsque la température ne dépend pas du temps : $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$. On peut négliger le temps si le terme responsable de la propagation de l'énergie (λ) est supérieure à celui lié au stockage de l'énergie (ρc_p).



FIGURE 19 – Joseph Fourier (1768 - 1830)

Définition :

La diffusivité thermique est définie par :

$$D_{th} = \frac{\lambda}{\rho c_p}$$

En utilisant la diffusivité thermique, l'équation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = D_{th} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

ou encore en $3D \frac{\partial T}{\partial t} = D_{th} \Delta T$.

Propriété :

La diffusivité thermique permet de relier l'ordre de grandeur du temps nécessaire à l'établissement du régime permanent noté τ à la distance caractéristique de variation de la température L :

$$[D_{th}] = \text{m}^2.\text{s}^{-1} = \frac{L_0^2}{\tau}$$

Si $t \gg \tau$, alors le régime peut être considéré comme permanent.



Exemple

5

En cuisine, on utilise des cuillères en bois pour remuer les préparations chaudes. Ces cuillères peuvent être laissées dans la casserole pendant la cuisson.

1 - Calculer la diffusivité thermique D_{th} pour le bois et l'acier.

2 - Estimer le temps de caractéristique pour l'établissement du régime permanent pour une cuillère de longueur $L = 20 \text{ cm}$. Conclure.



- bois : $\lambda_b = 0,12 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, $c_b = 1,2 \text{ kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$, $\rho_b = 800 \text{ kg.m}^{-3}$
- acier : $\lambda_a = 50 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, $c_a = 0,44 \text{ kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$, $\rho_a = 7,8.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$

1 - On obtient :

$$D_{th,b} = 1,2.10^{-7} \text{ m}^2.\text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad D_{th,a} = 1,5.10^{-5} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$$

2 - Pour une cuillère de longueur $L = 20 \text{ cm}$, le temps caractéristique d'établissement du régime stationnaire est :

$$\tau = \frac{L^2}{D_{th}}$$

On obtient donc

$$\tau_b = 89 \text{ h} \quad \text{et} \quad \tau_a = 48 \text{ min}$$

Pendant un temps de cuisson de quelques dizaines de minutes, la température dans une cuillère en acier aura le temps de s'uniformiser et ne pourra plus être touchée.

d) Source locale de chaleur

Dans certains exercices, on peut trouver des sources volumiques de chaleur, par exemple, un chauffage électrique, une désintégration radioactive. Dans le cas unidimensionnel, cela se traduit par l'ajout de $\delta Q_{produit} = p_{vol} S dx dt$

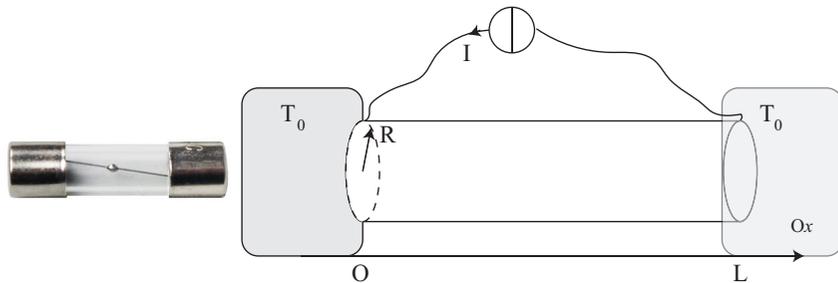
On obtient après division par $S dx \times dt$ et utilisation de la loi de Fourier :

$$\rho c_P \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + p_{vol}$$

Exemple 6

D'après Oral Mines 17

Un fusible est constitué d'un cylindre de plomb de rayon $a = 0,2 \text{ mm}$ et de longueur $L = 1 \text{ cm}$. Chacune de ces extrémités est au contact d'un thermostat à la température $T_0 = 293 \text{ K}$. On considère que sa surface latérale est calorifugée. Un courant $I = 10 \text{ A}$ traverse le barreau, on note ρ sa résistivité électrique, λ sa conductivité thermique et μ sa masse volumique.



- 1 - Déterminer la puissance de chauffage par effet Joule sur une tranche d'épaisseur dx .
- 2 - Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $T(x)$ en régime stationnaire.
- 3 - Représenter le profil de température.

4 - Calculer la valeur maximale de $T(x)$ et conclure sur le principe du fusible.

- $\rho_{Pb} = 2 \cdot 10^{-7} \Omega \cdot \text{m}$
- $\lambda_{Pb} = 35 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
- $\theta_{fus}(Pb) = 327^\circ \text{C}$

1 - La résistance d'une tranche est donnée par :

$$\delta R_{th} = \rho \times \frac{dx}{\pi R^2}$$

La puissance de chauffage est donc :

$$\delta P_C = \delta R_{th} \times I^2 = \frac{\rho I^2}{\pi R^2} dx$$

2 - Une tranche d'épaisseur dx reçoit pendant dt une énergie $\delta Q_e = j(x) S dt$ par conduction thermique, reçoit $\delta Q_p = \delta P_C dt$ et perd $\delta Q_s = j(x + dx) S dt$.

L'application du premier principe conduit à

$$\mu S dx (T(x, t + dt) - T(x, t)) = j(x) S dt + \delta P dt - j(x + dx) S dt$$

En utilisant la loi de Fourier, on obtient :

$$\rho s c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\rho I^2}{\pi^2 R^4}$$

En régime stationnaire, l'équation se résume à

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = - \frac{\rho I^2}{\lambda \pi^2 R^4}$$

3 - L'intégration de cette équation donne

$$\frac{\partial T}{\partial x} = - \frac{\rho I^2}{\lambda \pi^2 R^4} x + a$$

puis :

$$T(x) = - \frac{\rho I^2}{2 \lambda \pi^2 R^4} x^2 + ax + b$$

Appliquons les conditions aux limites : $T(0) = T(L) = T_0$, il vient :

$$b = T_0 \quad \text{et} \quad -\frac{\rho I^2}{2\lambda\pi^2 R^4} L^2 + aL + b = T_0$$

On en déduit que :

$$a = \frac{\rho I^2}{2\lambda\pi^2 R^4} L$$

Le profil de température est donc parabolique :

$$T(x) = -\frac{\rho I^2}{2\lambda\pi^2 R^4} x(x - L) + T_0$$

4 - Le profil de température est une parabole présentant pour des raisons de symétrie une valeur maximale en $x = L/2$ soit :

$$T_{max} = T_0 + \frac{\rho I^2 L^2}{8\lambda\pi^2 R^4} = 1 \cdot 10^3 \text{ K}$$

REPRESENTER PROFIL PARABOLIQUE

Ainsi lorsque l'intensité est trop forte, le métal fond et coupe le circuit électrique.



FIGURE 20 – Tableau électrique contenant des disjoncteurs (norme NFC 15-100)

Remarque 12 :

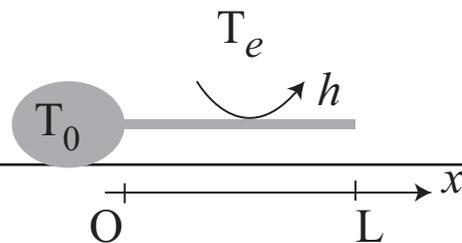
La norme NFC 15-100, qui définit le cadre légal des installations électriques en 2022 impose d'utiliser des disjoncteurs. Ces derniers utilisent un électroaimant actionnant un interrupteur lorsque l'intensité est trop importante.

2 - Diffusion à plusieurs dimensions

a) Barreau non calorifugé

Exemple 7

On modélise une ailette de refroidissement en aluminium par une tige métallique cylindrique, d'axe Ox , de longueur L , de rayon a et



de conductivité thermique λ , au contact par une de ses extrémités ($x = 0$) avec un corps à la température T_0 . Le reste est en contact avec l'air à la température constante T_e . On note h le coefficient de transfert thermique de surface entre le métal et le fluide. On se place en régime stationnaire.

1 - On veut supposer qu'à l'intérieur de la tige, le gradient radial de température est suffisamment faible pour considérer que, dans la section droite d'abscisse x , la température $T(x)$ est uniforme. Valider cette hypothèse grâce aux caractéristiques géométriques.

2 - Déterminer en régime stationnaire l'équation différentielle vérifier par la température. On notera $H = \sqrt{a\lambda/2h}$ la longueur caractéristique d'évolution de la température.

3 - Déterminer un critère pour considérer que la barre soit infiniment longue et en déduire l'expression de $T(x)$.

4 - Calculer la puissance dissipée par une ailette de refroidissement. Conclure quant au refroidissement d'un processeur consommant 200 W. Données : $T_0 = 380 \text{ K}$, $T_e = 300 \text{ K}$, $a = 1 \text{ mm}$ et $L = 6 \text{ cm}$. Conductivité thermique de l'aluminium : $\lambda = 220 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$; coefficient de transfert thermique de surface : $h = 6.10^2 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$

1 - On suppose que la longueur L est très supérieure à a . Ainsi, la température sera plus rapidement en régime stationnaire sur une section de canalisation, on peut alors définir une température uniforme sur la section du cylindre.

2 - Une tranche d'épaisseur dx reçoit par conduction une énergie $\delta Q_e = j(x)\pi a^2 dt$ et perd par conduction $\delta Q_s = j(x+dx)\pi a^2 dt$ et par convection $\delta Q_C = h2\pi a dx(T(x) - T_e)dt$. Le premier principe en régime permanent donne donc :

$$dH = 0 = \delta Q_e - \delta Q_s - \delta Q_C$$

d'où $0 = j(x)\pi a^2 dt - j(x+dx)\pi a^2 dt - h2\pi a dx(T(x) - T_e)dt$

En divisant par $\pi a dt dx$, il vient

$$j(x) - j(x+dx) - 2h(T(x) - T_e) = 0 \quad \text{soit} \quad 0 = -a \frac{dj(x)}{dx} - 2h(T(x) - T_e)$$

En utilisant la loi de Fourier, $j(x) = -\lambda \frac{dT}{dx}$, on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{2h}{a\lambda} T(x) = -\frac{2h}{a\lambda} T_e$$

3 - Posons $H = \sqrt{a\lambda/2h}$, l'équation différentielle s'écrit alors :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{1}{H^2} T = -\frac{1}{H^2} T_e$$

L'équation caractéristique est :

$$r^2 - 1/H^2 = 0 \quad \text{soit} \quad r = \pm 1/H$$

La solution de l'équation différentielle sans second membre est

$$T(x) = Ae^{x/H} + Be^{-x/H}$$

Une solution particulière est $T(x) = T_e$, les solutions de l'équation différentielles sont donc de la forme :

$$T(x) = Ae^{x/H} + Be^{-x/H} + T_e$$

Pour une barre infiniment longue c'est à dire $L \gg H$. Comme $H = 1 \text{ cm}$, l'hypothèse précédente peut être considérée comme vérifiée ($L \sim 5H$). Le terme $Ae^{x/H}$ est forcément nul puisque la fonction $T(x \rightarrow \infty)$ reste finie. Avec la condition $T(0) = T_0$, on en déduit que :

$$T_0 = B + T_e \quad \text{soit} \quad B = T_0 - T_e$$

d'où

$$T(x) = T_e + (T_0 - T_e)e^{-x/H}$$

4 - Le flux d'énergie est extrait du processeur en $x = 0$, sur une section d'une ailette, la puissance dissipée est donnée par

$$\Phi = j(0) \times \pi a^2$$

D'après la loi de Fourier :

$$j(0) = -\lambda \frac{dT}{dx}(x=0) = \lambda \frac{T_0 - T_e}{H} = (T_0 - T_e) \sqrt{\frac{2h\lambda}{a}}$$

d'où

$$\Phi = (T_0 - T_e) \sqrt{\frac{2h\lambda}{a}} \pi a^2$$

A.N. :

$$\Phi = 4 \text{ W}$$

La multiplicité des ailettes assurent un refroidissement suffisant.

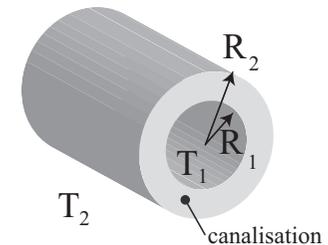
b) Géométrie cylindrique



Exemple

8

On considère une canalisation constituée d'un tube de longueur L de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2 dans lequel circule un fluide de température T_1 supposée uniforme. L'extérieur est au contact d'un thermostat à la tem-



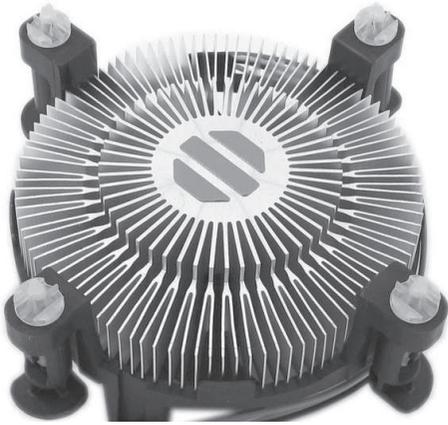


FIGURE 21 – Radiateur de refroidissement pour microprocesseur

pérature T_2 . On se place en régime stationnaire.

- 1 - Exprimer le flux thermique pour un rayon r compris entre R_1 et R_2 .
- 2 - En régime stationnaire, comment varie Φ en fonction de r . En déduire la résistance thermique du tube en fonction de R_1 , R_2 , L et λ .
- 3 - Montrer que si l'épaisseur $e = R_2 - R_1$ est négligeable devant R_1 alors la résistance thermique est similaire à celle obtenue en géométrie cartésienne.

1 - Par définition, le flux thermique est défini par :

$$\Phi = \int \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Pour une densité de flux uniforme sur la surface latérale d'un cylindre de rayon r et de longueur h :

$$\Phi = j(r) \times 2\pi r h$$

2 - FAIRE UN BILAN SUR r et $r+dR$.

En régime stationnaire, le flux est conservé quelque soit r . En utilisant la loi de Fourier, il vient :

$$\Phi = 2\pi r h j(r) = -2\pi r h \lambda \frac{dT}{dr}$$

En intégrant cette relation en $r = R_1$ et $r = R_2$, on obtient :

Ainsi,
$$T_2 - T_1 = \frac{\Phi}{2\pi h \lambda} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

d'où
$$R_{th} = \frac{\Phi}{T_1 - T_2} = \frac{\ln \frac{R_2}{R_1}}{2\pi h \lambda}$$

3 - En utilisant l'expression de l'épaisseur, la résistance thermique devient :

d'où
$$R_{th} = \frac{\ln \frac{R_1 + e}{R_1}}{2\pi h \lambda} = \frac{1}{2\pi h \lambda} \ln \left(1 + \frac{e}{R_1} \right)$$

En utilisant le développement limité de $\ln(1+x) \sim x$, on en déduit que :

$$R_{th} = \frac{e}{2\pi R_1 h \lambda}$$

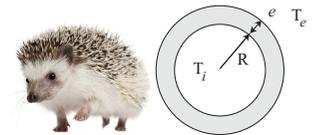
On retrouve l'expressino de la résistance thermique pour un pavé de surface $2\pi R_1 h$ et d'épaisseur e .

c) Géométrie sphérique

Exemple 9

D'après Veto 18

Un modèle de diffusion thermique pour un animal, très simplifié, mais fournissant malgré tout des résultats qualitativement significatifs, est constitué par une géométrie sphérique. On suppose que le corps de l'animal est une sphère homogène de centre O , de rayon R et de masse volumique ρ , maintenue à la température corporelle T_i . Il est enveloppé par une couche isolante d'épaisseur e représentant le pelage. On étudie la conduction thermique en régime permanent dans le pelage avec comme conditions aux limites : $T(r = R) = T_i$; $T(r = R + e) = T_e$. La température extérieure T_e est inférieure à T_i .



1 - Justifier que la température ne dépend que de r et en déduire le vecteur densité de flux thermique. On notera λ la conductivité thermique. Préciser la direction et le sens de ce vecteur.

2 - Établir l'expression du flux thermique Φ à travers une sphère de centre O et de rayon r compris entre R et $R + e$, en fonction de λ , r et

de la dérivée dT/dr .

3 - Montrer que $T(r) = T_i + \frac{\Phi}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)$

1 - Le problème étant invariant par rotation selon les angles sphériques θ et ϕ , on peut supposer que

$$T(r, \theta, \phi) = T(r)$$

Par définition,

$$\vec{j}(r) = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{e}_r$$

2 - La densité de flux thermique est uniforme sur la surface, on en déduit que :

$$\Phi = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\lambda \frac{dT}{dr} \times 4\pi r^2$$

3 - Par intégration, on obtient :

$$T(r) = T_i + \frac{\Phi}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)$$

IV. Principe de l'effet de serre

1 - Énergie reçue, loi de Stefan

Propriété :

Le rayonnement du corps noir suit la loi de déplacement de Wien qui donne la longueur d'onde dot l'émission est la plus importante. Dans le système d'unité international, elle est donnée par :

$$\lambda_{\max} = \frac{2,898 \cdot 10^{-3}}{T}$$

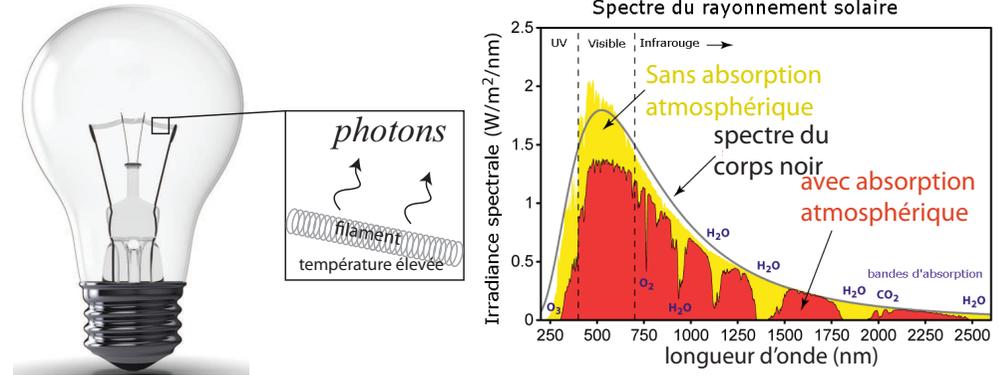


FIGURE 22 – Principe d'émission de type corps noir et spectre d'émission du soleil

Puissance émise par le soleil. En utilisant la loi de Stefan,

$$\Phi_S = \sigma T_S^4 \times 4\pi R_S^2$$

où $R_S = 700\,000\text{ km}$ est le rayon de la photosphère.

La puissance surfacique ϕ_0 reçue par la Terre est donnée par :

Avec $d_{TS} = 149 \cdot 10^6\text{ km}$ et $R_T = 6,4 \cdot 10^3\text{ km}$, il vient :

$$\phi_0 = \frac{\Phi_S}{4\pi d_{TS}^2} = \frac{\sigma \times R_S^2}{d_{TS}^2} T_S^4 = 1,4\text{ kW} \cdot \text{m}^{-2}$$

Imaginons de la terre (à la température T_1) qui émet rayonne un flux d'énergie surfacique ϕ_1 (principalement dans l'infrarouge). Elle est éclairée par le soleil (elle reçoit un flux surfacique incident ϕ_0 , principalement dans le visible). La terre, considérée comme un corps noir, absorbe tout ce flux.

Effectuons un bilan de puissance en régime stationnaire :

$$\Phi_{abs} = \phi_0 \times \pi R_T^2 = \Phi_{diss} = 4\pi R_T^2 \sigma T^4$$

On obtient alors la température d'une planète sans atmosphère :

$$T = \left(\frac{\phi_0}{4\sigma} \right)^{(1/4)} = \sqrt{\frac{R_S}{2d_{TS}}} T_S = 280\text{ K}$$

En tenant compte de l'albédo : $\alpha = 30\%$. on obtient :

$$T = \left(\frac{\phi_0(1 - \alpha)}{4\sigma} \right)^{(1/4)} = 260 \text{ K}$$

2 - Modèle de l'effet de serre

En utilisant la loi de Wien, on montre que la Terre rayonne principalement dans l'infrarouge.

$$\lambda_T = 10 \mu\text{m}$$

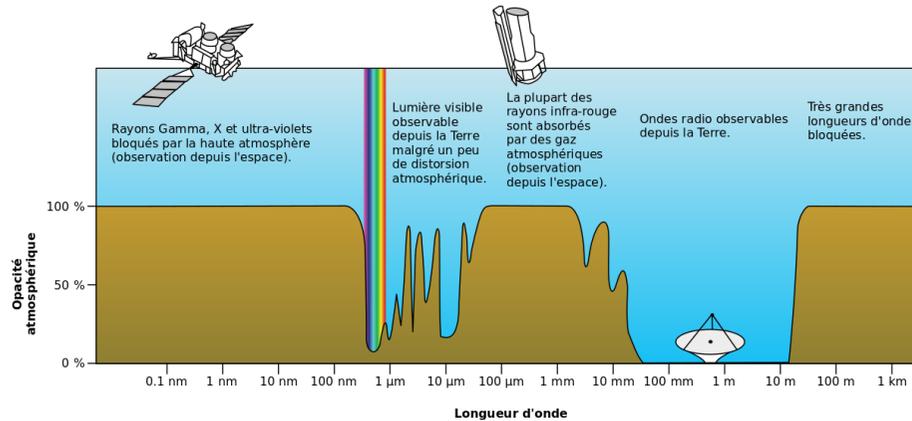
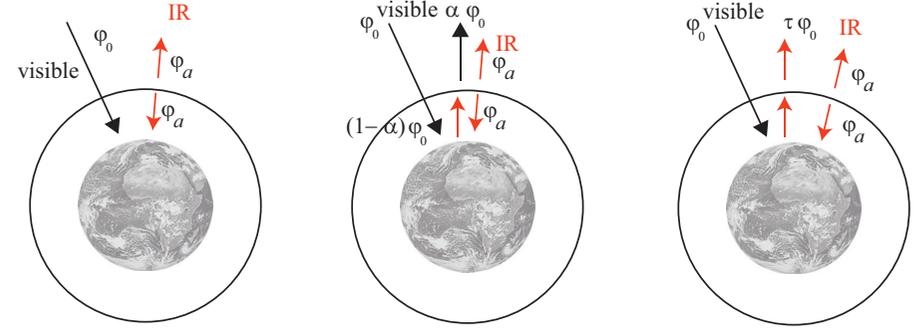


FIGURE 23 – Opacité atmosphérique, NASA ©

Dans le cadre d'un modèle simple, l'atmosphère qui entoure la Terre peut être assimilée à une couche sphérique de même centre que celui de la Terre. On formule les hypothèses simplificatrices suivantes :

- la Terre se comporte comme un corps noir ;
- l'atmosphère se comporte comme un corps noir pour le rayonnement terrestre ;
- l'atmosphère transmet alors, sans aucune absorption, le rayonnement solaire qui n'a pas été réfléchi vers l'espace ou le sol.

Sans Albédo, la Terre absorbe ϕ_0 dans le domaine visible. Soit ϕ_a la puissance émise par l'atmosphère. Cette puissance est émise vers l'espace et vers la Terre.



Albédo des nuages

Gaz à effet de serre

FIGURE 24 – Bilan de puissance.

En régime permanent, il y a autant de puissance reçue par la Terre qu'émise par l'atmosphère. On en déduit que

$$\phi_a = \phi_0$$

Ainsi, la Terre est chauffée avec une puissance

$$\phi_{serre} = \phi_a + \phi_0 = 2\phi_0$$

La température de surface de la Terre est donc donnée par :

$$T_{serre} = \left(\frac{2\phi_0}{4\sigma} \right)^{(1/4)} = 330 \text{ K}$$

a) Effet de l'albédo

En présence d'Albédo, la quantité réfléchi par la Terre est : $\alpha\phi_0$. La température est alors moins élevée. En effet, la conservation de la puissance impose :

$$\phi_0 = \alpha\phi_0 + \phi_a \quad \text{soit} \quad \phi_a = \phi_0(1 - \alpha)$$

Le chauffage de la Terre est donc par un flux de :

$$\phi_{serre} = (1 - \alpha)\phi_0 + \phi_0 = 2\phi_0(1 - \alpha)$$

$$T_{serre} = \left(\frac{\phi_{serre}}{4\sigma} \right)^{(1/4)} = 304 \text{ K}$$

avec $\alpha = 0,3$.

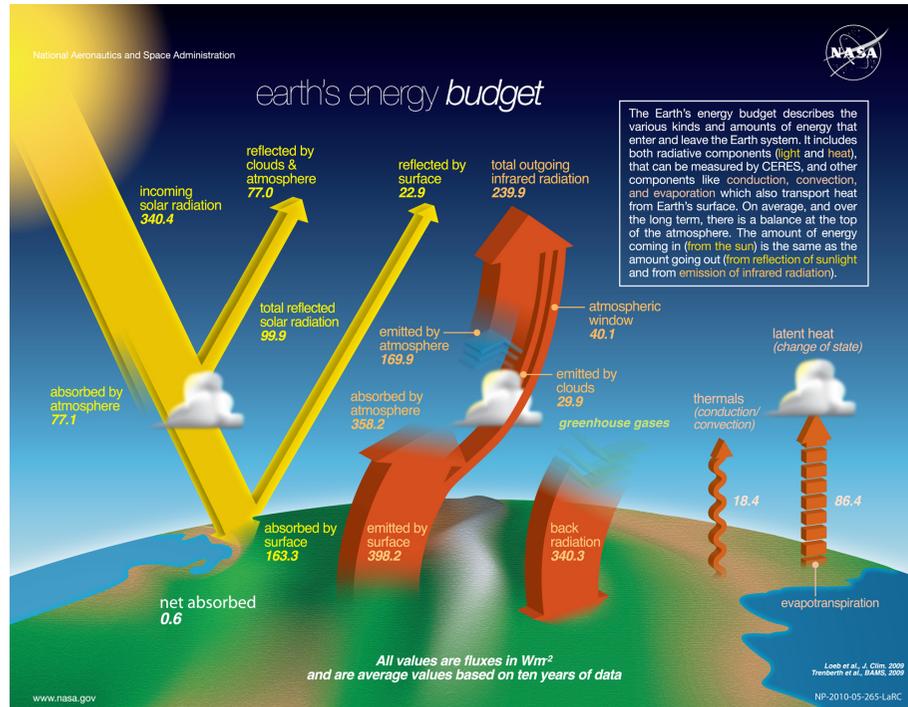


FIGURE 25 – Budget énergétique de la Terre, NASA ©

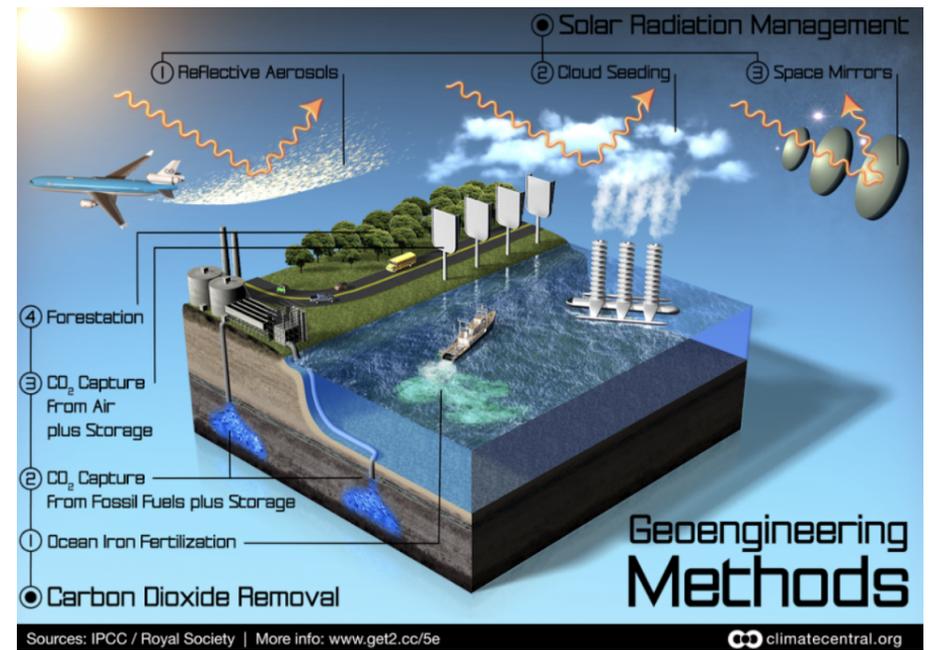


FIGURE 26 – Méthodes de changement climatique...

b) Effet des gaz à effet de serre

Considérons l'atmosphère comme un corps gris laissant passer une proportion τ de la puissance absorbée par la Terre. Plus la concentration en gaz à effet de serre est importante plus τ est faible. En régime permanent, on peut écrire :

$$\phi_0 = \tau\phi_0 + \phi_a \quad \text{soit} \quad \phi_a = \phi_0(1 - \tau)$$

Le chauffage de la Terre est donc effectuée par :

$$\phi_{serre} = \phi_0 + \phi_a = \phi_0(2 - \tau)$$

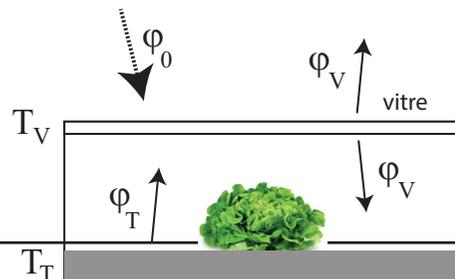
Plus la concentration de gaz à effet de serre est importante, plus τ est faible et plus le chauffage de la Terre est important.

Remarque 13 :

C'est un fait connu de tous qu'une augmentation de la concentration en CO₂ dans l'atmosphère résulte en une augmentation de l'effet de serre. Cependant, ce résultat est plus subtil qu'on ne le croit. Supposons que, comme le laisse entendre le terme d' "effet de serre", l'atmosphère soit une paroi d'épaisseur négligeable englobant la surface de la terre. Si l'effet de serre croît, c'est qu'une augmentation de la concentration en CO₂ doit augmenter le pouvoir absorbant de cette paroi. Or comme le montre la figure-4, l'absorption de l'atmosphère ne varie presque pas avec sa concentration en CO₂. C'est ce qu'on appelle l'effet de saturation de l'absorption du CO₂. Le modèle d'atmosphère à une couche ne permet pas de comprendre l'effet de la concentration en CO₂ sur l'effet de serre

Exemple 10

Considérons une serre, composée de deux systèmes : de la terre (à la température T_T) couverte par une vitre V en verre (à la température T_V). Ces deux objets sont à des températures telles qu'ils émettent



(respectivement ϕ_T et ϕ_V) principalement dans l'infrarouge. La vitre est éclairée par le soleil et reçoit un flux surfacique incident ϕ_0 , principalement dans le visible). Le verre absorbe une portion a du flux visible, réfléchit une faible partie r , et en transmet la plus grande partie : $t = 1 - r - a$. La terre se comportant comme un corps noir absorbe tout ce qui est transmis et émis par la vitre. La vitre absorbe tout le rayonnement infrarouge émis par la terre : elle est opaque à ces longueurs d'onde. En supposant que ces deux corps suivent les lois du corps noir, déterminer la température d'équilibre T_T de la terre initialement à la température $T_0 = 300$ K.

Données : $a = 10$, $r = 10\%$, $t = 80\%$.

En l'absence de vitre, $\phi_0 = \sigma T_0^4$.

Un bilan de puissance sur la vitre permet d'écrire que :

$$a\phi_0 + \phi_T = 2\phi_V + r\phi_0 = \quad \text{soit} \quad aT_0^4 + T_T^4 = 2T_V^4$$

Un bilan de puissance sur la terre permet d'écrire que :

$$t\phi_0 + \phi_V = \phi_T \quad \text{soit} \quad tT_0^4 + T_V^4 = T_T^4$$

En supprimant T_V , on obtient :

$$aT_0^4 + T_T^4 = 2(T_T^4 - tT_0^4)$$

On en déduit que

$$T_T = (a + 2t)^{1/4} T_0$$

FAIRE TOPO SUR BEER LAMBERT