

Fonction d'onde

I. Descriptions d'objets quantiques

1 - Dualité onde-corpuscule

a) Expérience des fentes d'Young

Des expériences d'interférences à deux fentes avec des électrons ont été réalisées dès les années 1989 par l'équipe de Tonomura au centre de recherche d'Hitachi (Japon). Des électrons, émis par une source identique à celle d'un microscope électronique, sont accélérés sous une différence de potentiel de 50 kV, puis dirigés vers une structure assimilable à deux fentes. L'impact d'un électron en un point du détecteur permet de mesurer la position d'impact. Le flux d'électrons est contrôlé et l'on est ainsi assuré qu'il n'y a qu'un seul électron en transit dans le dispositif.

Les électrons sont émis puis détectés individuellement, comme des particules localisées. L'examen des photographies (a), (b) et (c) pourraient laisser penser que le point d'impact d'un électron donné est complètement aléatoire.

La photographie (d) montre au contraire que les impacts ne se répartissent pas de façon uniforme. L'impact d'un électron est plus probable en certains points qu'en d'autres. Le fait que les électrons soient émis un par un est important. La figure d'interférence observée sur la photographie (d) ne peut donc ne pas résulter d'un effet collectif ou d'une interaction entre plusieurs électrons

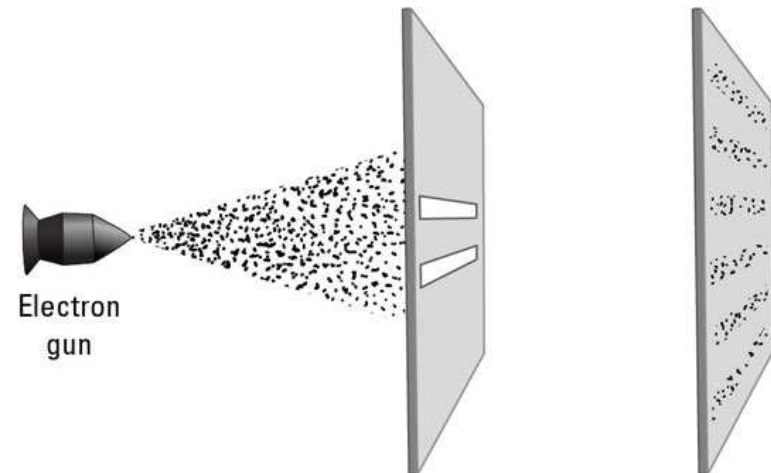


FIGURE 1.1 – Principe de l'expérience des fentes d'Young avec des électrons.

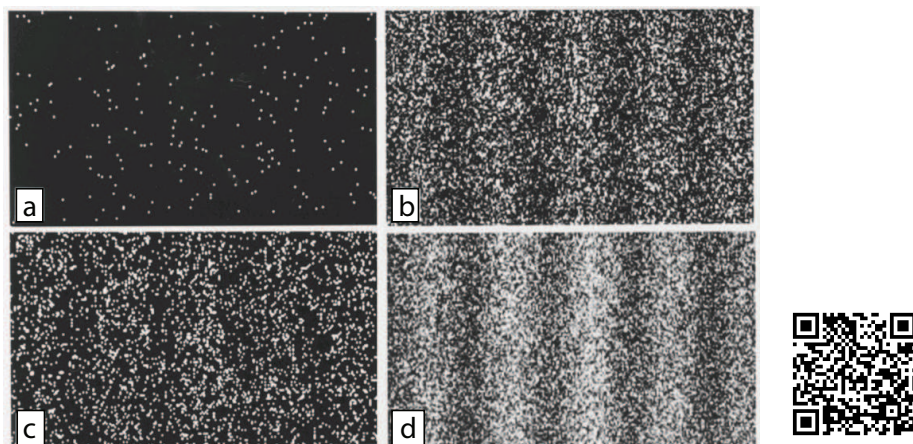


FIGURE 1.2 – Nombre d'électrons détectés : 8 (a) ; 270 (b) ; 2000 (c) ; 60000 (d) Tonomura et al., Am. J. Phys., 57, 117 (1989).

qui seraient en transit ensemble dans le dispositif. Elle résulte bien de la distribution des impacts des électrons selon une loi de probabilité particulière. Cette loi de probabilité, tout comme la figure d'interférence, sont caractérisées par la longueur d'onde de de Broglie des électrons et par les caractéristiques géométriques du dispositif. On associe à l'électron une fonction d'onde.

L'état initial des électrons diffère très peu d'un électron à l'autre. Si les électrons se comportaient comme des particules obéissant aux lois de la mécanique classique, leurs points d'impact devraient se regrouper au voisinage du point prévu par les lois de la mécanique classique. Ce n'est manifestement pas ce que montrent les photographies (a) et (b). Cela doit être un motif d'étonnement pour les élèves. La notion de trajectoire n'a pas de sens dans cette expérience. Les états intermédiaires d'un électron, entre son émission et sa détection, ne sont pas connus. Par exemple, à la question de savoir si un électron est passé d'un côté ou de l'autre de l'électrode cylindrique, on n'est pas en mesure de pouvoir apporter une réponse. Toute tentative de mesure permettant de répondre à cette question se solde, dans cette expérience, par une disparition de la figure d'interférence.

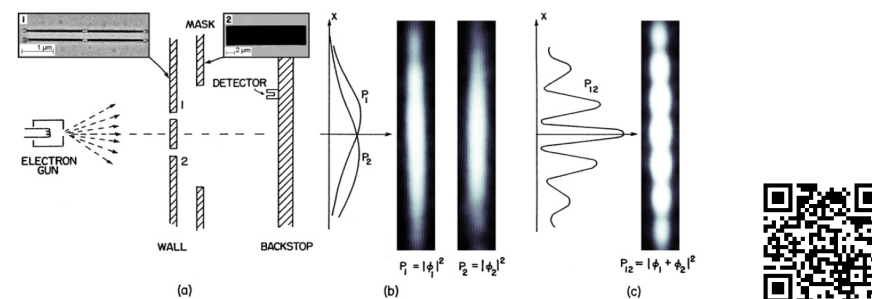


FIGURE 1.3 – Expériences des Fentes d'Young avec des électrons, *Controlled double-slit electron diffraction*, NJP 2013



Propriété :

Les effets quantiques apparaissent pour des systèmes de très petites tailles (quelques milliers d'atomes) dans le vide.



Remarque 1 :

Les chercheurs tentent d'effectuer des expériences avec des objets de plus en plus gros. Une expérience similaire a été effectuée avec des atomes de fullerène C_{60} . Le diamètre d'une telle molécule est de 0,7 nm, la théorie ondulatoire assure que la molécule passe à travers des fentes de largeur 20 nm espacées de 100 nm. Une transposition de cette expérience à notre échelle consisterait à envoyer un ballon de foot dans deux cages de foot séparées de 30 m, le résultat est observé 380 000 km plus loin soit quasiment la distance Terre-Lune...

b) Principe de complémentarité de Bohr (1927)

La lumière et la matière montrent deux facettes différentes que l'on n'arrive pas encore à concilier :

- L'aspect ondulatoire : il intervient dans des situations de type interférences

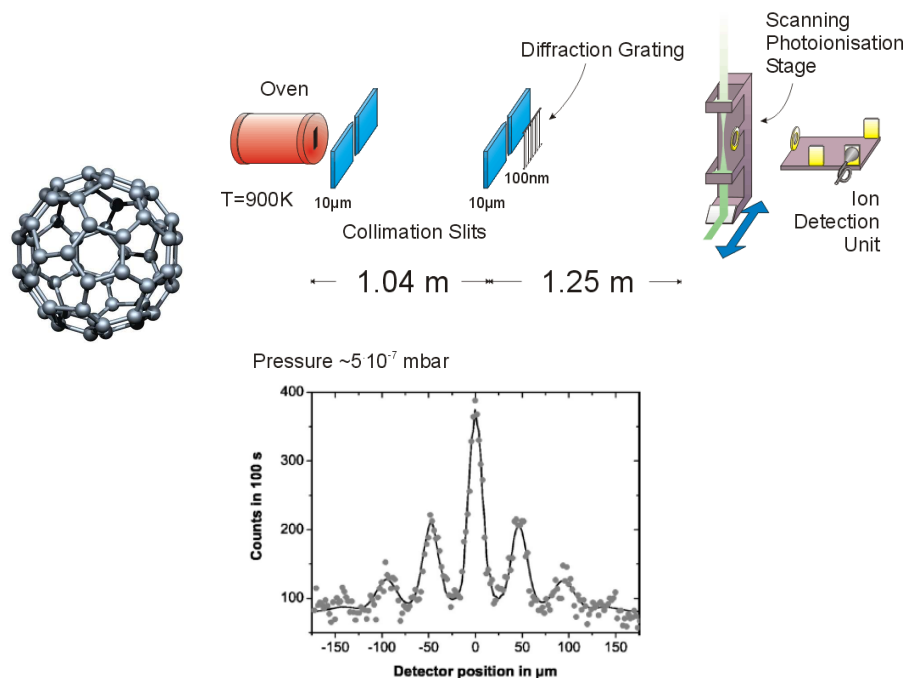


FIGURE 1.4 – Dispositif interférentiel avec des molécules de fullerènes. *D'après American Journal of Physics, avril 2003*

et diffraction qui sont des phénomènes s'appuyant sur une nature divisible et délocalisée de l'énergie (celle-ci se répartissant sur les fronts d'onde).

- L'aspect corpusculaire : il intervient dans des situations d'interaction localisée en énergie avec des corpuscules indivisibles (cas de l'effet photoélectrique, de l'effet Compton, de collisions particulières...).

▲ Définition :

Un système physique élémentaire étudié par la physique quantique est appelé particule quantique ou quanton.

! Remarque 2 :

Il devrait être possible d'établir une théorie unifiée dans laquelle matière et rayonnement sont des variétés différentes d'un même objet possédant le double caractère ondulatoire et corpusculaire.

2 - Densité de probabilité

a) Interprétation de Born (1926)

Pour la lumière, une zone d'intensité lumineuse plus élevée qu'ailleurs peut être vue comme une zone où la probabilité d'y recevoir un photon est plus importante ; de plus, on sait que cette intensité lumineuse est d'autant plus élevée que l'amplitude au carré du champ électrique est grande. Par analogie, pour tout corpuscule, la probabilité de le trouver à un endroit spécifique doit être reliée à une fonction d'onde avec une opération quadratique adaptée

▲ Définition :

L'état physique d'un quanton est parfaitement précisé par une fonction d'onde complexe $\psi(M,t)$ qui représente une amplitude de probabilité d'état. La probabilité de trouver une particule dans un volume d^3r est donnée par : $|\psi(M,t)|^2 d^3r$.

Ainsi, $|\psi(M,t)|^2$ représente une densité de probabilité d'état, elle s'exprime en m^{-3} .

Il s'agit d'une description probabiliste non classique. On ne travaille pas directement avec des probabilités, mais avec des amplitudes de probabilité complexes, dont les modules carrés sont des probabilités. La fonction d'onde $\psi(M,t)$ n'a pas d'interprétation physique immédiate. Seule $|\psi(M,t)|^2$ possède une signification physique.

Propriété :

Si $|\psi(M,t)| = 0$, il n'y a aucune chance que la particule se trouve en M.

Plus $|\psi(M,t)|$ est important plus la probabilité d'observer la particule en M est grande.

b) Normalisation

Propriété :

Pour une particule se déplaçant dans un domaine $\mathcal{D}$ de l'espace, la fonction d'onde est normalisée par la relation :

$$\int_{\mathcal{D}} |\psi(M,t)|^2 d^3r = 1$$

Cette équation traduit le fait qu'il est certain de d'avoir une particule dans le domaine $\mathcal{D}$.

Exemple 1

On montre que pour une particule quantique d'énergie E_n enfermée dans une boîte de taille L a pour fonction d'onde :

$$\psi(x,t) = A \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{iE_n t/\hbar}$$

On admettra que le système est décrit par une seule variable d'espace x . Déterminer la valeur de A.

Comme il est certain de trouver la particule dans le piège, on peut en déduire que :

$$\int_0^L |\psi(M,t)|^2 dx = 1$$

On obtient donc

$$A = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

Exemple 2

Dans l'atome d'hydrogène, l'électron dans son état d'énergie 1s possède une fonction d'onde de la forme :

$$\psi(r,t)_{(1s)} = C e^{-r/a_0} e^{-i\omega_{1s}t}$$

où ω_{1s} est relié à l'énergie de orbitale.

1 - Exprimer la probabilité $\mathcal{P}(r)$ d'avoir un électron dans une sphère de rayon r centré sur le noyau.

2 - Déterminer le coefficient de normalisation C en fonction de a_0 .

Données : $\int_0^\infty x^2 e^{-x} dx = 2$

1 - Par définition, la densité de probabilité est définie par :

$$|\psi(r,t)|^2 = C^2 e^{-2r/a_0}$$

Le volume infinitésimal d'une coquille d'épaisseur dr est $4\pi r^2 dr$.

La probabilité d'avoir un électron dans une sphère de rayon r est alors donnée par :

$$\mathcal{P}(r) = \int_0^r |\psi(r,t)|^2 4\pi r^2 dr = \int_0^r C^2 e^{-2r/a_0} 4\pi r^2 dr$$

2 - La condition de normalisation s'écrit alors :

$$\int_0^\infty |\psi(r,t)|^2 4\pi r^2 dr = \int_0^\infty C^2 e^{-2r/a_0} 4\pi r^2 dr = 1$$

En posant $x = 2r/a_0$, il vient :

$$\int_0^\infty |\psi(r,t)|^2 4\pi r^2 dr = \pi C^2 a_0^3$$

On en déduit que :

$$C = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}}$$

c) Mesure de position

En effectuant une mesure de position de la particule à l'instant t , on trouve une certaine valeur bien définie r , à la précision d^3r de l'appareil de mesure près. Si l'on prépare indépendamment un grand nombre N de particules dans le même état décrites par strictement la même fonction d'onde. La valeur moyenne de ces résultats, notée $\langle r \rangle$

$$\langle r \rangle = \iiint r |\psi(r, t)|^2 d^3r$$

Exemple 3 Pour les orbitales $1s$ et $2s$, les fonctions d'onde de l'électron sont de la forme :

$$\begin{cases} \psi(r, t)_{(1s)} = \frac{1}{\sqrt{4\pi a_0}} e^{-r/a_0} e^{-i\omega_{1s}t} \\ \psi(r, t)_{(2s)} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi a_0^{3/2}}} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-r/2a_0} e^{-i\omega_{2s}t} \end{cases}$$

1 - Définir la probabilité $d\mathcal{P}(r)$ d'un électron d'être à une distance r du noyau à dr près.

Les densités de probabilité radiale pour les orbitales $1s$ et $2s$ sont représentées ci-contre.

2 - Exprimer le rayon le plus probable pour chacune des orbitales.

4 - Après calcul, on montre que $\langle r_{1s} \rangle = 1,5a_0$ et $\langle r_{2s} \rangle = 5,3a_0$. Comparer ces valeurs par rapport aux densités radiales de probabilité. Le modèle planétaire de Bohr est-il valide pour toutes les orbitales.

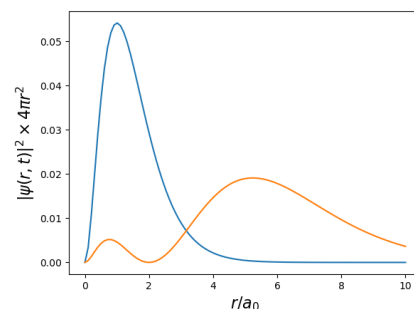


FIGURE 1.5 – Densité de probabilité radiale des orbitales $1s$ et $2s$

1 - Le volume d'une coquille sphérique de rayon r est donnée par $4\pi r^2 dr$. La probabilité d'être dans ce volume vaut donc :

$$d\mathcal{P}(r) = |\psi(r, t)|^2 4\pi r^2 dr$$

2 - Le rayon le plus probable est alors défini par :

$$\langle r \rangle = \int_0^\infty r \times |\psi(r, t)|^2 4\pi r^2 dr$$

3 - On remarque que les valeurs proposées coïncident avec les maxima des densités radiales de probabilité. En revanche pour l'orbitale $2s$, il apparaît une probabilité non nulle d'être à moins de a_0 du noyau.



Définition :

La dispersion des résultats sera caractérisée par un écart type, ou écart quadratique moyen. En simplifiant le mouvement à un seul axe, on obtient :

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \int x |\psi(x, t)|^2 dx \\ \Delta x^2 &= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \int x^2 |\psi(x, t)|^2 dx - \left(\int x |\psi(x, t)|^2 dx \right)^2 \end{aligned}$$

L'atome d'hydrogène est le système atomique le plus simple puisqu'il ne comporte qu'un unique électron « gravitant » autour du noyau. Il est possible de résoudre complètement le problème du point de vue quantique. VOIR AUSSI MODELE DE BOHR



Remarque 3 :

En 2013, une équipe de chercheurs européens est parvenue à visualiser la probabilité d'un électron autour du noyau d'hydrogène (cf 1.6). Après avoir ionisé un gaz de H_2S , les atomes d'hydrogène sont soumis à des lasers qui permettent d'extraire les électrons. Enfin, des électrodes accélèrent ces électrons en direction d'un écran fluorescents. On observe ainsi une image de la fonction d'onde des électrons. Le contrôle des transitions électroniques dans l'atome d'hydrogène permet de visualiser différents types d'orbitales.

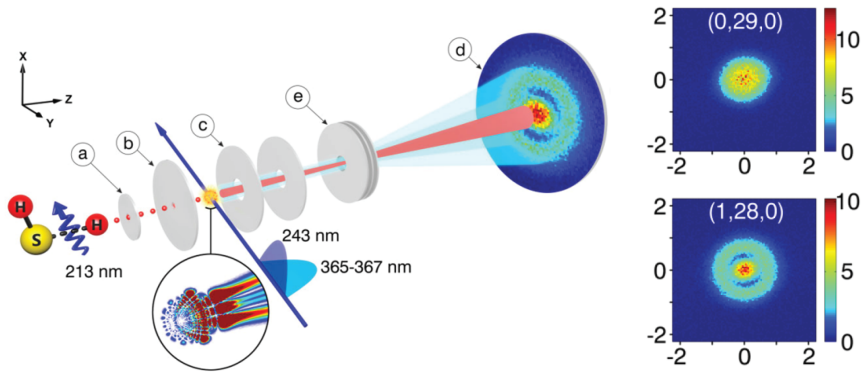


FIGURE 1.6 – Visualisation de la densité de probabilité électronique pour l'atome d'Hydrogène. Schematic overview of the experiment. (a) atome d'hydrogène issu de la dissociation H_2S sélectionné par une ouverture de 3mm, (b) et (c) électrodes, (d) détecteur, (e) lentille Einzel (tiré de *Hydrogen Atoms under Magnification : Direct Observation of the Nodal Structure of Stark States*, Stodolna et al., PRL 2013)

Définition :

À toute particule matérielle d'énergie E et de quantité de mouvement p , on associe une « onde plane », dont les caractéristiques ondulatoires sont :

$$\omega = E/\hbar \quad \text{et} \quad \vec{k} = \vec{p}/\hbar$$

Définition :

La longueur d'onde (de de Broglie) associée à une particule est définie par :

$$\lambda_{\text{DB}} = \frac{2\pi}{k} = \frac{h}{p}$$

Les relations précédentes sont valables pour toute particule quantique : photon, atome etc. Ce qui change cependant est la relation entre la quantité de mouvement et l'énergie :

- pour les particules sans masse comme le photon :

$$E = p \times c$$

- pour les particules massives non relativistes :

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

II. Particule libre non localisée

1 - Onde plane

a) Relation de de Broglie

Les expériences d'interférences atomiques laissent supposer que la matière peut être décrite comme une onde dont les caractéristiques sont la quantité de mouvement et l'énergie.

b) Expression

Pour une onde lumineuse, les amplitudes étaient décrites par des ondes planes progressives. Pour une propagation selon $+Ox$, l'écriture de la vibration est de la forme :

$$s(M,t) = A \cos(\omega t - kx)$$

Par analogie, on s'intéresse à une fonction d'onde de type onde plane de la forme :

$$\Psi(M,t) = A e^{i(kx - \omega t)}$$

où, en utilisant les relations de De Broglie, les valeurs de k et ω vérifient :

$$E = \hbar\omega \quad \text{et} \quad p = \hbar k$$

 Remarque 4 :

La convention par rapport aux ondes électromagnétiques ($e^{i(\omega t - kx)}$) est inversée.

 Définition :

Une fonction d'onde décrivant une particule libre non localisée est de la forme

$$\Psi(M, t) = A e^{i(px - Et)/\hbar}$$

 Propriété :

La fonction d'onde d'une onde plane n'est pas normalisable sur tout l'espace :

$$\iiint |\psi|^2 dx dy dz \rightarrow \infty$$

Cela signifie que la mesure de la position du quanton est équiprobable sur tout l'espace : il y a indétermination totale de cette position (notion précisée quantitativement dans la suite du cours). Une telle fonction d'onde ne représentera pas à elle seule une situation physique concrète pour un quanton, l'espace accessible étant généralement borné.

2 - Expérience de Young

a) Phénomène d'interférences

 Propriété :

En mécanique quantique, selon le principe de superposition, un même état quantique peut posséder plusieurs valeurs pour une certaine quantité observable (spin, position, quantité de mouvement, etc.). Si $\Psi_1(M, t)$ et $\Psi_2(M, t)$ décrivent deux seuls états possibles d'un quanton, son état est décrit par la superposition suivante :

$$\Psi(M, t) = a_1 \Psi_1(M, t) + a_2 \Psi_2(M, t)$$

Les coefficients a_1 et a_2 sont reliés aux probabilités de mesure dans les états Ψ_1 et Ψ_2 : la probabilité de mesurer un système décrit par une fonction d'onde $\Psi(M, t)$ est de : $|a_1|^2$ dans l'état (1) et $|a_2|^2$ dans l'état (2). Il est important d'admettre ici que les propriétés du système décrit par $\Psi(M, t)$ sont celles des deux états (1) et (2) et que le fait de mesurer le système le fait basculer, soit dans l'état (1), soit dans l'état (2).

Remarque 5 :

Cette propriété purement quantique est souvent illustrée par l'expérience de pensée du chat de Schrödinger placé dans une boîte avec un poison déclenché de façon aléatoire. Le chat est alors considéré à la fois comme mort et vivant jusqu'au moment où l'on ouvre la boîte.



Le principe de superposition d'état est également utilisé avec des qubit qui se compose d'une superposition de deux états de base, par convention nommés $|0\rangle$ et $|1\rangle$. Un bit classique se trouve toujours soit dans l'état (0) soit dans l'état (1) et un qubit se trouve dans une superposition de ces deux états : $\Psi(M,t) = a_1\Psi_1(M,t) + a_2\Psi_2(M,t)$. L'intérêt principal de l'ordinateur quantique serait que sa puissance soit une fonction exponentielle au sens propre du nombre de qubits.

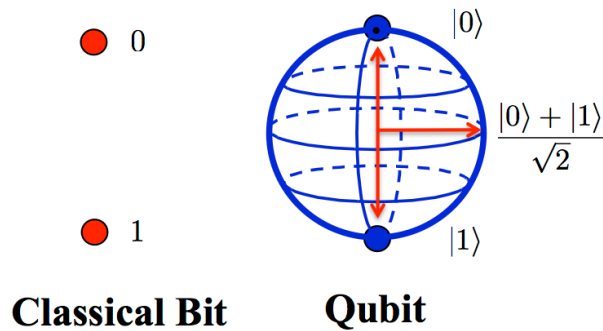


FIGURE 1.7 – Superposition d'état pour du calcul quantique avec des Qubits.

Exemple 4 On considère une expérience de fentes d'Young avec des électrons. Si seul le trou supérieur est ouvert, la fonction d'onde est de la forme :

$$\psi_1(M,t) = Ae^{i(kz - \omega t + \phi_1(x))}$$

Avec $\phi_1(x)$ un terme de déphasage du au déplacement vertical. Si seul le trou inférieur est ouvert, la fonction d'onde est de la forme :

$$\psi_2(x,t) = Ae^{i(kz - \omega t + \phi_2(x))}$$

- 1 - Exprimer la fonction d'onde associée à un électron qui traverse le système des deux fentes.
- 2 - En déduire l'expression de la densité de probabilité avec

- (A) la fonction d'onde associée à un quanton avec le trou supérieur ouvert seul ;
- (B) la fonction d'onde associée à un quanton avec le trou inférieur ouvert seul ;
- (C) la fonction d'onde associée à un quanton avec les deux trous ouverts

- 1 - La fonction d'onde associée à un électron qui passerait à travers les deux fentes s'exprime de la forme

$$\psi(M,t) = \frac{\psi_1(M,t) + \psi_2(M,t)}{\sqrt{2}}$$

Le terme $\sqrt{2}$ n'est pas nécessaire puisque les deux fonctions d'onde proposées ne sont pas normalisables, mais c'est une habitude de normalisation.

- 2 - Si seul le trou (1) est ouvert, la densité de probabilité est donnée par :

$$|\psi(M,t)|^2 = |\psi_1(M,t)|^2 = A^2$$

Si seul le trou (2) est ouvert, la densité de probabilité est donnée par :

$$|\psi(M,t)|^2 = |\psi_2(M,t)|^2 = A^2$$

Si les deux trous sont ouverts, la densité de probabilité vaut alors :

$$|\psi(M,t)|^2 = \left| \frac{\psi_1(M,t) + \psi_2(M,t)}{\sqrt{2}} \right|^2$$

Le calcul donne :

$$|\psi(M,t)|^2 = \frac{A^2 + A^2 + 2A^2 \cos(\phi_2(x) - \phi_1(x))}{2} = A^2(1 + \cos(\phi_2 - \phi_1))$$

On retrouve la formule de Fresnel obtenue pour les interférences à 2 vibrations lumineuses de même amplitude.

Remarque 6 :

Quand on rencontrera des ondes non localisées, on pourra mener une interprétation riche d'enseignements en raisonnant avec une assemblée de quantons indépendants ayant cet état. Dans ce cas, $|\Psi(M,t)|^2$ ne représente plus seulement la densité de probabilité de présence d'un quantum en M mais aussi une densité particulière à une constante multiplicative près.

b) Longueur d'onde de De Broglie

Exemple 5

Dans l'expérience de de Tonomura, les électrons, émis par une source identique à celle d'un microscope électronique, sont accélérés sous une différence de potentiel de 50 kV. Les fentes seront supposées écartées de $a = 1,0 \mu\text{m}$ et l'écran situé à $D = 1,0 \text{ m}$.

- 1 - Déterminer la vitesse des électrons par une approche classique. Commenter
- 2 - En déduire la valeur de la longueur d'onde de de Broglie sans tenir compte de l'aspect relativiste des électrons.
- 3 - Conclure sur la valeur de l'interfrange de la figure d'interférence. Est elle mesurable du point de vue optique.

Données :

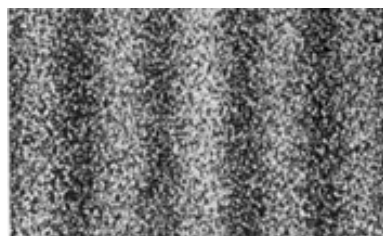


FIGURE 1.8 – Nombre d'électrons détectés passant par un système à double fente. A. Tonomura et al., Am. J. Phys., 57, 117 (1989).

Est elle mesurable du point de vue optique.

- masse de l'électron : $m_e = 9,1.10^{-31} \text{ kg}$;
- $1,0 \text{ eV} = 1,6.10^{-19} \text{ J}$;
- constante de planck : $h = 6,63.10^{-34} \text{ J.s}$;

1 - Par une méthode classique, la vitesse des électrons est donnée par :

$$\frac{1}{2}mv^2 = e \times V \quad \text{soit} \quad v = \sqrt{2eV/m}$$

A.N. :
$$v = \sqrt{\frac{2 \times 1,6.10^{-19} \times 50.10^3}{9,1.10^{-31}}} = 1,3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

L'électron est donc relativiste.

2 - Sa quantité de mouvement est donnée par $p = mv$, on en déduit la longueur d'onde de de Broglie :

$$\lambda_{\text{DB}} = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

A.N. :
$$\lambda_{\text{DB}} = 5,2.10^{-12} \text{ m}$$

L'interfrange vaut donc :

$$i = \frac{\lambda_{\text{DB}} D}{a}$$

A.N. :
$$i = 5,2 \mu\text{m}$$

Cette valeur est bien supérieure aux longueurs d'onde du domaine visible et peut être mesurée.

3 - Limites de la description

Des expériences de plus en plus poussées visent à effectuer des interférences avec des molécules de plus en plus grosses. Des expériences avec des molécules de phthalocyanine (notée PcH_2 , de masse molaire : $M = 514 \text{ g.mol}^{-1}$) ont été réalisées. Ces molécules sont fluorescentes et le dispositif expérimental permet de retrouver la position des molécules ayant passées dans un réseau de diffraction.

On observe très nettement une répartition non uniforme des molécules sur le support situé à $D = 0,56 \text{ m}$ du réseau de fentes. Ce phénomène implique

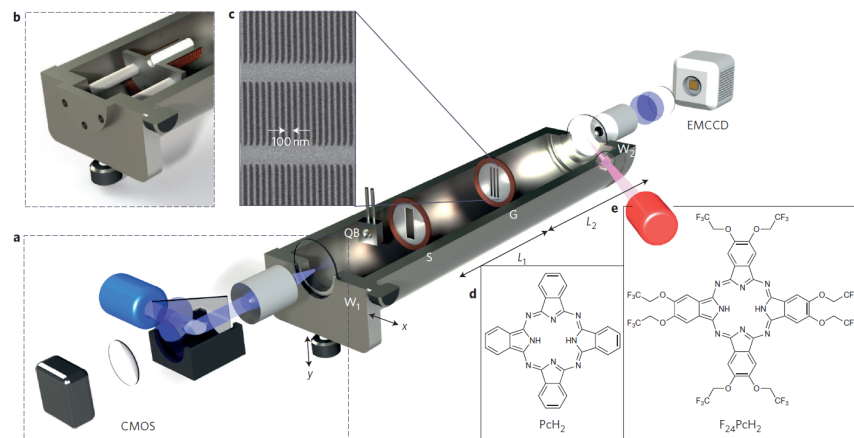


FIGURE 1.9 – Dispositif expérimental permettant les interférences de molécules (d). (a) évaporateur, (c) réseau de fentes, (e) excitation des molécules déposées sur la quartz par diode laser. (tiré de *real-Time single molecule imaging of quantum interference*, Nature Nanotechnology, Juffmann et al. 2012)

que les molécules sont passées au travers des fentes distantes de $a = 100$ nm. De plus, les molécules ayant une vitesse de l'ordre de 150 m.s^{-1} , leur longueur d'onde de De Broglie vaut $\lambda_{DB} = 5,2$ pm et est en cohérence avec l'interfrange ($i \sim \lambda_{DB}D/a \approx 30 \text{ } \mu\text{m}$).

Très récemment, une expérience similaire a été réalisée avec des molécules composées de 2000 atomes

Il n'existe pas de frontière entre le monde quantique et le monde classique. En revanche la description en terme de superposition de fonctions d'onde de particules libre est trop basique pour décrire les interactions entre la molécule et le milieu environnant. Des expériences d'interférences avec des molécules de C_{70} ont montré que la visibilité de la figure d'interférence est très sensible à la pression et à la température. Ce phénomène est appelée **décohérence**.

4 - Inégalité d'Heisenberg et paquet d'ondes

a) Conséquence de la localisation sur la longueur d'onde

Si l'on décide de diminuer la localisation de la particule à une certaine portion de l'espace, on peut décrire une particule par une fonction d'onde de la forme :

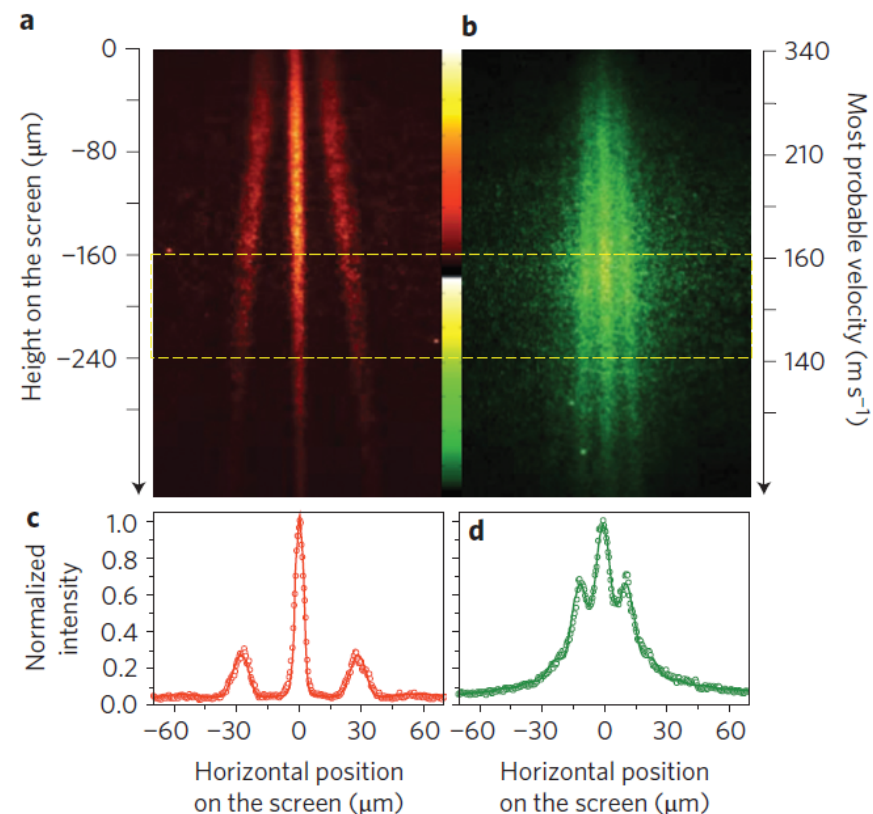


FIGURE 1.10 – Franges d'interférences des molécules poids atomique 514 et 1028 (tiré de *real-Time single molecule imaging of quantum interference*, Nature Nanotechnology, Juffmann et al. 2012)

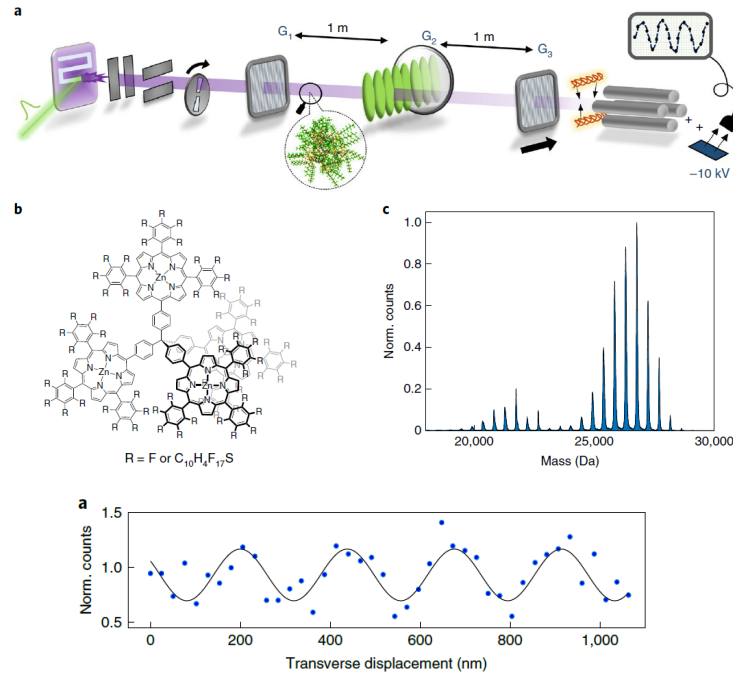


FIGURE 1.11 – Dispositif expérimental , Nature physics Letters, Fein et al. 2019)

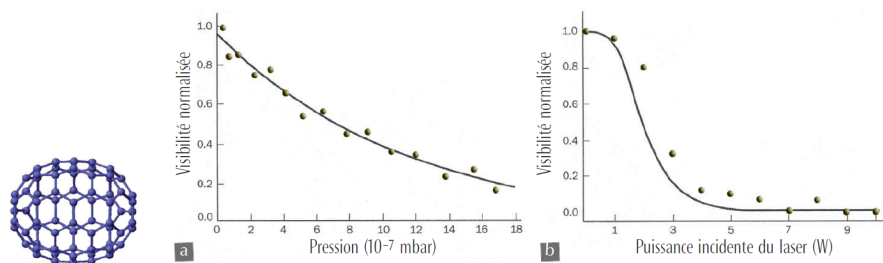


FIGURE 1.12 – Brouillage des interférences en raison des collisions entre molécules et de l'émission de photon. Tiré des Reflets de la physique, Michel Le Bellac, 2009

$$\psi(x) = \begin{cases} Ce^{ikx} & \text{si } -a < x < a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si l'on s'intéresse maintenant à la transformée de Fourier de la fonction d'onde ψ , on obtient les valeurs de k associées à la particule et donc son impulsion.

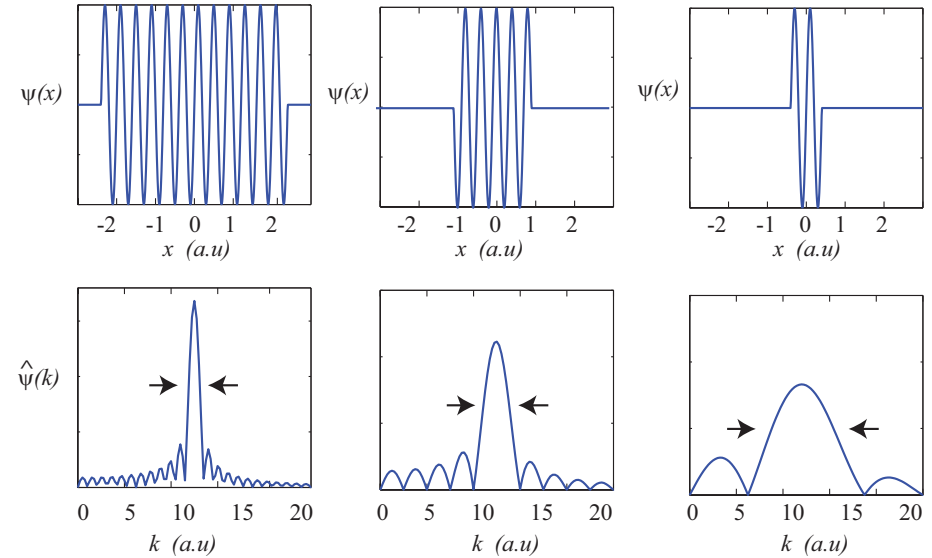


FIGURE 1.13 – Effet de la localisation d'une particule

On remarque que plus la particule est localisée sur une taille Δx plus son vecteur d'onde et donc sa quantité de mouvement d'après la relation de de Broglie $p = \hbar k$ est soumise à une indétermination Δp .



Définition :

La mesure à un instant donné quelconque de la position x et de l'impulsion p_x d'un quanton (en projection sur un axe (Ox) quelconque) présente des indéterminations fondamentales respectives Δx et Δp_x vérifiant **l'inégalité d'Heisenberg** :

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

Cette relation d'indétermination est en fait le cas particulier d'une relation d'indétermination bien plus générale (appelée aussi relation d'Heisenberg ou

encore relation de Robertson-Schrödinger) dont la démonstration est très largement hors-programme. La relation d'indétermination d'Heisenberg est importante car elle pose concrètement une limite aux interprétations classiques :

- elle montre que l'on ne peut pas gagner infiniment en certitude sur la position d'un quanton sans perdre en certitude sur son impulsion au même instant (et inversement), ceci étant valable pour tout axe de projection ;
- elle montre que la mesure d'un état quantique (déjà incertain par sa définition à partir de la fonction d'onde de nature probabiliste !) ne donne pas une connaissance parfaite de cet état du point de vue classique !

La relation d'Heisenberg est similaire à la relation vue en optique concernant la largeur spectrale d'une source Δf est sa cohérence temporelle Δt :

$$\Delta f \Delta t = 1$$

Remarque 7 :

Il existe également une autre inégalité d'Heisenberg reliant la mesure du temps temps de détection d'une particule à la mesure de l'énergie de cette particule. Ainsi, la durée Δt nécessaire à la détection d'une particule d'énergie E à ΔE près vérifie la relation :

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

b) Superposition d'onde plane

 **Exemple 6** On considère la superposition d'ondes planes suivante :

$$\psi(x,t) = \frac{e^{i((k+\delta k)x-\omega t)} + e^{i((k-\delta k)x-\omega t)}}{2}$$

- 1 - Calculer la densité de probabilité de présence. La fonction d'onde est-elle normalisée ?
- 2 - Montrer que la localisation de la particule est améliorée par rapport à l'onde plane dans des zones de l'espace que l'on déterminera en fonction de δk

- 1 - Factorisons par $e^{i(kx-\omega t)}$, la densité de probabilité devient :

$$|\psi(x,t)|^2 = \left| \frac{e^{i((k+\delta k)x-\omega t)} + e^{i((k-\delta k)x-\omega t)}}{2} \right|^2 = \frac{1}{4} |e^{i\delta k x} + e^{-i\delta k x}|^2$$

En utilisant les formules d'Euler, il vient :

$$|\psi(x,t)|^2 = \cos^2 \delta k x = \frac{1 + \cos 2\delta k x}{2}$$

La fonction d'onde n'est pas normalisée. Dans un espace à une dimension :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 dx \rightarrow \infty$$

- 2 - La représentation de la densité de probabilité est en fig.1.14.

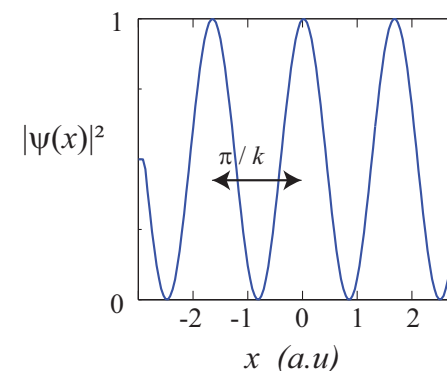
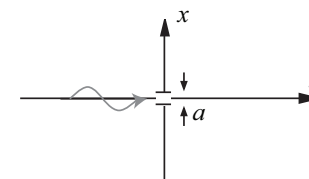


FIGURE 1.14 – Densité de probabilité pour une superposition d'onde plane.

La période spatiale de la densité de probabilité est de $\pi/\delta k$. Il existe des zones de l'espace où il est impossible de trouver une particule espacée de $\pi/\delta k$.

c) Diffraction par une fente

 **Exemple 7** Considérons un photon associé à une longueur d'onde λ passant par une fente de largeur a telle que $a \gg \lambda$.



- 1 - Exprimer l'impulsion du photon en fonction de h et λ puis en fonction de p_x et p_y , composantes de l'impulsion selon Ox et Oy .
- 2 - Si le photon passe par la fente, que dire de p_x et p_y d'après la théorie de la diffraction ?
- 3 - Montrer alors que la localisation du photon est compatible avec le principe d'Heisenberg.

1 - L'impulsion du photon est donnée par :

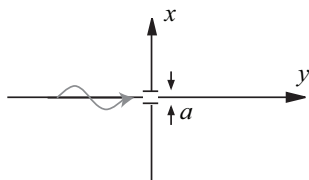
$$p = \frac{h}{\lambda} = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$$

2 - Lorsque le photon passe par la fente, le cône de lumière est donné par

$$\theta \approx \lambda/a$$

Prenons le cas extrême, on en déduit que l'impulsion peut en sortie de fente faire un angle θ tel que :

$$\tan \theta = \frac{p_x}{p_y} = \frac{\lambda}{a}$$



Dans l'approximation des petits angles, on peut donc écrire que :

$$p_y \approx \frac{h}{\lambda} \quad \text{et} \quad p_x \approx \frac{h}{a}$$

3 - En passant par la fente, le photon est forcément localisé dans une zone de taille $\Delta x = a$. La relation précédente devient :

$$p_x \times \Delta x = h \geq \hbar/2$$

Le principe d'incertitude d'Heisenberg est bien vérifié.

Le développement des techniques de piégeage et de refroidissement d'atomes par des faisceaux lumineux ou des champs magnétiques statiques a permis en

1995 la découverte par le groupe de E. Cornell et C. Wieman d'un condensat de rubidium, un état de la matière décrit par une fonction d'onde pour plusieurs atomes. Pour s'assurer qu'il s'agit d'un système quantique, l'observation de ces condensats gazeux se fait en coupant le piège magnétique et en laissant l'assemblée atomique s'étaler pendant une durée de quelques dizaines de milli-secondes. De l'étendue du nuage atomique après, on déduit la distribution en vitesse initiale.

Remarque 8 :

Un piège contenant un condensat de Bose Einstein c'est à dire un ensemble de particules localisées dans une zone de dimension $1 \mu\text{m}$ sur $100 \mu\text{m}$ a été réalisée par les chercheurs de l'ENS Ulm. Sur la figure 1.15 on observe la vue d'un ensemble d'atomes de rubidium réunies dans un piège magnétique formant un condensat de Bose-Einstein à $T = 200 \text{ nK}$. Après extinction du piège, l'ensemble possède une structure elliptique de longueur totale de $270 \mu\text{m}$ et de largeur $130 \mu\text{m}$.

L'ellipticité de la distribution en vitesse, inversée par rapport à celle des positions dans le piège, est une conséquence directe des relations d'incertitude de Heisenberg.

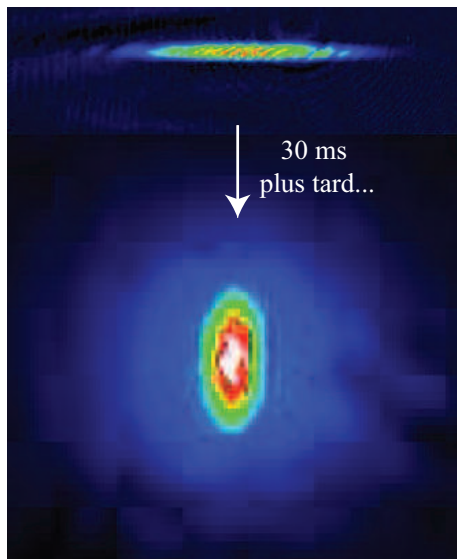


FIGURE 1.15 – (Photos de P.Desbiolles, D. Guery-Odelin et J. Söding, ENS).

Temporary page!

L^AT_EX was unable to guess the total number of pages correctly. As there was some unprocessed data that should have been added to the final page this extra page has been added to receive it.

If you rerun the document (without altering it) this surplus page will go away, because L^AT_EX now knows how many pages to expect for this document.