Chapitre

Etude d'une figure d'interférence

I. Largeur maximale d'une figure

1 - <u>Influence de la diffraction</u>

Avec un laser, la source est quasi-monochromatique, la diffraction est souvent le principal phénomène limitant la figure d'interférences. La zone d'interférences est alors principalement contenue dans la figure de diffraction correspondant à l'intensité lumineuse obtenue pour un seul des orifices ouverts. Dans le cas des trous d'Young, la figure de diffraction est un cône et les franges apparaissent dans la tache lumineuse principale.

Propriété :

La figure d'interférences se situe dans la figure de diffraction

Il est possible d'améliorer l'intensité lumineuse en utilisant des fentes plutôt que des trous. Dans le cas des fentes d'Young, l'intensité lumineuse est invariante par translation selon l'axe des fentes. Le gain de lumière est notable pour l'observation de la figure d'interférence.

Pour une fente infiniment fine, on peut considérer la fente comme une source ponctuelle... mais l'intensité lumineuse est quasi-nulle. Avec des doubles fentes



FIGURE 1.1 – Figure de diffraction par un seul trou et interférences par deux trous d'Young



FIGURE 1.2 – Figure de diffraction par une seule fente et interférences par deux fentes d'Young

plus larges, l'intensité lumineuse est plus importante mais la figure de diffraction est plus limitée.

💧 Définition :

Après passage par un orifice, en raison de la diffraction, la lumière est principalement contenue dans un cône de demi-angle au sommet

 $\theta \approx \frac{\lambda}{b}$

où b est la largeur de la fente.

Ainsi pour une fente très fine de largeur b voisin de la longueur d'onde visible $(b \sim \lambda \sim 600 \text{ nm})$, l'angle du cone de lumière est voisin de $\theta \sim 1$ soit près de 60°. La fente peut être considérée comme une source ponctuelle d'après le principe de Huyghens-Fresnel. En revanche, une fente de cette largeur ne laisse passer que très peu de lumière. En séance de TP, les fentes ont des largeurs de l'ordre de $b \sim 100 \ \mu\text{m}$, l'angle de diffraction est faible ($\theta \sim 0,003^{\circ}$) mais la luminosité suffisante pour une exploitation.



FIGURE 1.3 – Illustration du phénomène de diffraction.

Remarque 1 :

Pour une ouverture circulaire, un calcul plus abouti en utilisant les fonctions de Bessel permet d'obtenir $\theta = 1,22\lambda/b$. On appelle *tache d'Airy* la figure de diffraction résultant de la traversée d'un trou circulaire par la lumière. Il s'agit de la meilleure image possible d'un point source par ce système (cf fig. ??).

La distance entre les fentes est de l'ordre de 0,1 mm tandis que la distance de la figure à l'écran est de l'ordre du mètre, et la taille de la figure de l'ordre du mm. On supposera donc pour simplifier que les fentes sont confondues pour l'étude de la diffraction. Les relations dans le triangle rectangle OO'H permettent de relier la taille de la figure à la largeur de la fente :

$$\tan\theta = \frac{{\rm O'H}}{{\rm OO'}} = \frac{{\rm L}/2}{{\rm D}} \quad {\rm soit} \quad {\rm L} = 2{\rm D}\theta$$

En utilisant l'approximation des petits angles, $\tan \theta \approx \theta$. Pour la diffracion $\theta \approx \lambda/b$, on obtient alors :

$$\mathbf{L}\approx 2\mathbf{D}\frac{\lambda}{b}$$

Ainsi pour des fentes de largeur $b \sim 100 \ \mu m$, placées à une distance D $\sim 1 \ m$, la taille de la figure d'interférence est de L $\sim 12 \ mm$.

Propriété :

L'approximation de Fraunhofer consiste à négliger les termes quadratiques dans le calcul de la différence de marche. Dans le cas d'une fente de largeur b, le terme quadratique vaut b^2/D $l\lambda$. On parle donc de diffraction à l'infini (en configuration de **Fraunhofer** si

 $\mathrm{D} \gg b^2/\lambda$

L'approximation de Huyghens Fresnel D $\gg \lambda$ permet d'expliquer les interférences avec des sources ponctuelles cohérentes. Les calculs restent valident dans l'approximation de Fraunhoffer si D $\gg b^2/\lambda$. Pour les cas usuels, $b \sim 100 \,\mu\text{m}$, l'approximation est vérifiée si D $\gg 1 \,\text{cm}$.

2 - Largeur et écartement de fentes

Les interférences dans une figure dépendent essentiellement de la position de chaque source secondaire donc de l'écartement entre les fentes.

Propriété : Plus les fentes sont espacées plus l'interfrange est faible $(i \sim 1/a)$.

Pour avoir des franges d'interférences bien visibles, il faut donc avoir des fentes assez proches. Dans le domaine visible, pour une distance fentes-écran de l'ordre du mètre et une interfrange de l'ordre du mm, il faut que les franges soient espacées de 0,1 mm environ.

La diffraction dépend de la largeur de chacune des fentes.

Propriété :

Plus les fentes sont larges, plus la figure d'interférence est réduite à cause de la diffraction.

On en déduit que pour avoir une figure d'interférences la plus étalée possible, c'est à dire voir de nombreuses interfrange, les fentes doivent être les plus fines



FIGURE 1.4 – Influence de la distance entre les fentes

possibles. En revanche, plus les fentes sont fines, moins il y a de lumière... Il faut donc trouver un compromis.



FIGURE 1.5 – Influence de la largeur des fentes

Propriété :

Dans le cas où l'écran d'observation est placé dans le plan focal d'une lentille convergente, l'approximation de Fraunhofer est vérifiée.

Exemple 1

On considère des fentes d'Young éclairées par une source monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 500$ nm. On note *a* la distance

entre les fentes et b la largeur des fentes. L'écran est situé dans le plan focal d'une lentille convergente de distance focale f' = 1,0 m. La figure obtenue est représentée ci-contre. 1 - Déterminer la valeur de a. 2 - Estimer la valeur de b.

1 - Du point de vue de l'optique ondulatoire, une lentille est un objet déphaseur. Sa représentation sous la forme d'une double flèche est complètement inadaptée pour évaluer des chemins optiques à partir de mesure de longueur sur un schéma. On préférera alors appliquer le théorème de Malus comme indiqué sur la figure suivante.



FIGURE 1.6 – Utilisation du théorème de Malus avec une lentille convergente.

Le théorème de Malus permet de conclure que les chemins optiques suivants sont identiques puisque les rayons sont parallèles :

$$(F_1M) = (HM)$$

On en déduit que la différence de marche entre les deux fentes ${\rm F}_1$ et ${\rm F}_2$ est donnée par :

$$(F_2M) - (F_1M) = (F_2H) + (HM) - (F_1M) = (F_2H)$$

D'après les relations trigonométriques dans les triangles ${\rm F_1F_2H}$ et ${\rm OO_2M},$ on en déduit que :

$$\delta = (\mathbf{F}_2 \mathbf{H}) = \frac{ax}{f'}$$

Pour un montage de ce type, on montre que l'interfrange est de la forme :

$$i = \frac{\lambda f'}{a}$$

On mesure 4 franges sur 10 mm, soit i = 2,5 mm. On en déduit que

$$a = \frac{\lambda f'}{i} = \frac{500.10^{-9} \times 1}{2.5.10^{-3}} = 200 \ \mu \mathrm{m}$$

2 - La figure a une largeur L = 10 mm, on en déduit que l'angle au sommet du cone de lumière est :

$$\theta = \frac{L/2}{f'} = 0.01 \text{ rad}$$

D'après la théorie de la diffraction :

$$\theta = \frac{\lambda}{b}$$
 soit $b = \frac{500.10^{-9}}{0.01} = 50 \ \mu \text{m}$

II. Contraste d'une figure

1 - Influence de l'amplitude des ondes

Le contraste caractérise la répartition lumineuse d'une image. Pour une image en niveau de gris, un contraste nul est associée à une image intégralement grise. Pour un contraste maximum, chaque zone de l'image est soit noire soit blanche.

Définition :

Le contraste ou facteur de visibilité est défini à l'aide des intensités maximales et minimales présentes sur la figure :

$$\boxed{\mathcal{C} = \frac{\mathcal{I}_{\max} - \mathcal{I}_{\min}}{\mathcal{I}_{\max} + \mathcal{I}_{\min}}}$$



FIGURE 1.7 – Exemple de variation de contraste.

- Un contraste nul correspond à un brouillage;
- Un contraste égal à l'unité correspond à une figure bien contrastée.

Plus le contraste est important, plus les franges sombres se distinguent des franges brillantes.

Exemple 2 Le dispositif est constitué d'une source ponctuelle S monochromatique de longueur d'onde λ placée au foyer objet d'une lentille L₁, d'une plaque percée de deux trous S₁ et S₂ de petite taille distants de *a* et d'un écran d'observation E placé à la distance D de la plaque. On note A₁ l'amplitude de la source S₁ et A₂ l'amplitude de la source S₂.

1 - Justifier que les deux trous S_1 et S_2 sont des sources ponctuelles permettant de faire des interférences.

- 2 Déterminer la différence de marche entre deux rayons arrivant sur M
- 3 En déduire l'intensité lumineuse sur l'écran, on notera $I_1=A_1^2/2$ et $I_2=A_2^2/2.$

4 - Déterminer le contraste de la figure pour $A_2 = A_1$ et $A_2 = A_1/2$. Données : $\cos a \cos b = 1/2 \times (\cos(a-b) + \cos(a+b))$ 1 - Les deux trous sont de petites tailles, la diffraction permet de les considérer comme des sources ponctuelles.

2 - En utilisant la démonstration du chapitre précédent :

$$\delta = \frac{ax}{\mathrm{D}}$$

3 - On prend comme référence de phase, le trou n°1. La vibration résultante est de la forme :

$$s_{tot}(\mathbf{M},t) = \mathbf{A}_1 \cos \omega t + \mathbf{A}_2 \cos(\omega t - \phi_2)$$

Par définition de l'intensité lumineuse :

$$I(M) = \langle s_{tot}^2(M,t) \rangle = \langle (A_1 \cos \omega t + A_2 \cos(\omega t - \phi_2))^2 \rangle$$

Développons l'expression :

$$I(M) = \langle A_1^2 \cos^2 \omega t + A_2^2 \cos^2(\omega t - \phi_2) + 2A_1 A_2 \cos \omega t \cos(\omega t - \phi) \rangle$$

par définition, $<\cos^2>=1/2$ et, en utilisant les formules de linéarisation de cos, on obtient que

$$2 < \cos \omega t \cos(\omega t - \phi) > = < \cos(2\omega t - \phi) + \cos \phi > = \cos \phi$$

Ainsi,

 $I(M) = \frac{A_1^2}{2} + \frac{A_2^2}{2} + A_1 A_2 \cos \phi$

En utilisant l'expression des intensité de chacune des sources, il vient

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}\cos\phi$$

4 - Déterminons les intensités maximales et minimales, obtenus pour $\cos\phi=\pm 1$:

$$I_{\max} = I_1 + I_1 + 2\sqrt{I_1I_2} \quad et \quad I_{\min} = I_1 + I_1 - 2\sqrt{I_1I_2}$$

Le contraste vaut donc :

$$\mathrm{C} = \frac{\mathrm{I}_{\mathrm{max}} - \mathrm{I}_{\mathrm{min}}}{\mathrm{I}_{\mathrm{max}} + \mathrm{I}_{\mathrm{min}}} = \frac{2\sqrt{\mathrm{I}_{1}\mathrm{I}_{2}}}{\mathrm{I}_{1} + \mathrm{I}_{2}}$$

Dans le cas proposé,

- si $A_1 = A_2$, le contraste vaut C = 1,
- si $A_1 = 2A_2$, alors $I_1 = 4I_2$ et C = 4/5.

Remarque 2 :

On retiendra que si les amplitudes sont très différentes (facteur 5), le contraste diminue (cf. fig.??). Sinon, l'approximation d'amplitude identique permet de simplifier les calculs tout en conservant l'interprétation physique du problème puisque le contraste reste élevé.



FIGURE 1.8 – Influence de l'amplitude sur le contraste d'une figure

2 - Cohérence spatiale

a) Présence de deux points sources

Une source réelle n'est pas ponctuelle mais présente une extension spatiale. Dans la plupart des sources, les différentes portions de la source émettent de la lumière de façon incohérente avec leurs voisines. À chaque point source correspond une figure d'interférences décalées les unes par rapport aux autres. La superposition des différentes intensités brouille l'alterannce de franges brillantes et sombres ce qui se traduit par à une diminution du contraste. Exemple 3 Le dispositif d'interférence est constitué de deux sources ponctuelles S et S' monochromatiques de longueur d'onde $\lambda = 600$ nm place au foyer objet d'une lentille L₁ de distance focale f' = 10 cm, d'une plaque percée de deux fentes distantes de $a = 150 \,\mu\text{m}$. L'écran est placé dans le plan focal d'une lentille convergente L₂de distance focale $f'_2 = 1,0$ m.



1 - Déterminer la différence de marche entre deux rayons arrivant sur M, issus de S' puis de S.

2 - Exprimer l'ordre d'interférences p (pour deux rayons issus de S) et p' pour deux rayons issus de S' en un point M de l'écran. En déduire la valeur $\Delta p=p'-p.$

3 - Justifier que si $\Delta p=1/2,$ le contraste s'annule. Évaluer la distance b correspondant à ce cas.

1 - La différence de marche vaut pour deux rayons issus de S est calculée précédemment (cf. fig. \ref{scale}) :

$$\delta = \frac{ax}{f_2'}$$

Pour deux rayons issus de S', il faut rajouter la différence de marche pour parvenir aux fentes :

$$\delta' = \frac{ba}{f_1'} + \frac{ax}{f_2'}$$



2 - Soit p l'ordre d'interférences pour la figure issue de S et p' pour celle issue de S', par définition :

$$p = \frac{\delta}{\lambda}$$
 et $p' = \frac{\delta'}{\lambda}$

On en déduit que

$$\Delta p = p' - p = \frac{ab}{\lambda f_1'}$$

3 - Lorsque $\Delta p = 1/2$, la frange sombre de l'une coïncide avec la frange brillante de l'autre. Il n'est plus possible de déceler les franges d'interférences, on observe un brouillage.

En remplaçant, on obtient :

$$\frac{ba}{\lambda f_1'} = \frac{1}{2}$$

Avec les valeurs proposées :

$$b = \frac{\lambda f_1'}{2a} = 0.2\,\mathrm{mm}$$

Remarque 3 :

En astronomie, la découverte de systèmes binaires, indécelables par une observation directe, est obtenue par interférométrie. Plusieurs téléscopes, jouant chacun le rôle d'une fentes d'Young, récoltent la lumière issue de deux étoiles et la superpose sur un écran. Il apparaît alors des franges d'interférences dont le contraste fluctue avec le temps et permet de remonter à la période de révolution du système binaire. Actuellement le VLTI est le dispositif le plus abouti permettant d'effectuer des interférences (cf. fig. ??).



FIGURE 1.9 – Principe de superposition des faisceaux lumineux du Very Large Telescop Interferometer sur le site de Cerro Paranal (désert Chilien). D'après ESO.org



FIGURE 1.10 – Examples of SUSI observation of β Centauri. D'après J. Davis, université de Sydney

b) Source étendue

▲ Définition :

Une source lumineuse dont la taille n'est pas négligeable, est dite **étendue**. On peut la considérer comme un ensemble de sources ponctuelles incohérentes entre elles.

Dans la partie précédente, il a été établi qu'il existe une distance b maximale entre deux points sources S et S', telle que la figure d'interférences de l'une soit décalées d'une demi interfrange par rapport à celle de l'autre. Ce décalage se traduit par une différence d'ordre d'interférences de 1/2. Pour une source étendue, lorsque sa demi-largeur est égale à cette distance, il possible de la décomposer en différents points sources et d'en trouver deux distants exactement de b (cf. fig. ??).



FIGURE 1.11 – Décomposition d'une source étendue et critère de brouillage.

Propriété :

Pour une source étendue, la figure d'interférence est brouillée lorsque la différence d'ordre d'interférence en un même point de l'écran vérifie :

 $\Delta p \geqslant 1/2$

où Δp est évalué sur la moitié de l'étendue spatiale de la source.

Remarque 5:

En 2014, l'étude du contraste associé à une source lumineuse d'origine plasmonique, provenant d'une oscillation des électrons de surface d'un métal, a permis de remonter à l'étendue de ces oscillations. Grâce à un dispositif astucieux, les chercheurs ont pu mesurer l'évolution de l'intensité lumineuse en fonction de l'écartement entre les fentes pour remonter à la largeur de la source qui est difficilement détectable directement (cf. fig ??).



FIGURE 1.12 – Influence de la largeur de la source

Remarque 4 :

En pratique, réaliser des interférences avec une autre source qu'un laser est difficile car l'étendue spatiale des autres sources usuelles nécessite d'être vigilant sur le choix de a et f'_2 . Pour une source dont l'étendue est limitée par un diaphragme, plus ce dernier est ouvert, plus la luminosité est importante mais plus le contraste diminue.

III. Cohérence temporelle

1 - Largeur spectrale

Le modèle de vibration monochromatique défini dans le chapitre précédent est valable pour une durée infinie. Or la durée de vie finie d'une telle onde est reliée à la largeur spectrale de la source. En effet, la transformée de Fourier d'une vibration sinusoïdale définie sur une durée Δt donne une répartition des fréquences sur une largeur spectrale Δf reliée par :

$\Delta t \Delta f \approx 1$

Les sources de lumière ne sont pas rigoureusement monochromatiques. L'extension temporelle d'une onde est reliée à sa largeur spectrale en fréquence Δf ou en longueur d'onde $\Delta \lambda$. Pour quelques sources usuelles, les valeurs de largeur spectrales sont répertoriées dans le tableau ??.

source	$\lambda(nm)$	$\Delta\lambda(nm)$	$ u(\mathrm{H}z) $	$\Delta \nu$ (Hz)	$t_{ m C}$	L_c
Laser He-Ne	633	1.10^{-3}	$4,74.10^{14}$	$1,5.10^9$	0,67 ns	40 cm
Sodium	590	0,1	$5,\!08.10^{14}$	86.10^{9}	$10 \mathrm{\ ps}$	$3 \mathrm{mm}$
Blanche	600	400	$5,\!0.10^{14}$	$3, 7.10^{14}$	$3 \mathrm{fs}$	$1 \ \mu m$



FIGURE 1.13 – Influence des plasmons de surface propagatifs sur la cohérence de systèmes optiques, Thèse de S. Guebrou, Fevrier 2014



FIGURE 1.14 – Cohérence temporelle et largeur spectrale

Définition :

La largeur spectrale d'une source lumineuse limite dans le temps les vibrations lumineuses, on appelle **temps de cohérence** cette durée notée $t_{\rm C}$. Le modèle associé est celui des train d'onde.

Propriété :

Le temps de cohérence d'une source est reliée sa largeur spectrale en fréquence notée $\Delta \nu$ par la relation :

 $t_c \times \Delta \nu = 1$

Définition :

À partir de cette durée de cohérence, correspondant au temps « de vie » de la vibration lumineuse, il est possible de définir son étendue spatiale appelée **longueur de cohérence** définie par :

 $\mathcal{L}_{\mathcal{C}} = c \times t_{\mathcal{C}}$

L'obtention d'interférence résulte de la superposition de deux trains d'onde. Pour des trains d'onde de longueur finie, il faut que leur décalage ne soit pas trop important pour qu'ils puissent se superposer (cf. fig ??).



FIGURE 1.15 – Cohérence temporelle et train d'onde

Propriété :

Une condition nécessaire pour avoir des interférences est que la longueur de cohérence soit supérieure à la différence de marche :

 $\delta < L_c$

Remarque 6 :

Du fait de la double périodicité (spatiale est temporelle), la largeur spectrale en longueur d'onde (λ) peut être reliée à celle en fréquence (ν) par la relation :

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \to \Delta \nu = \frac{c}{\lambda^2} \Delta \lambda$$

La longueur de cohérence s'obtient de la même façon :

 $\mathcal{L}_c = ct_{\mathcal{C}} = \frac{c}{\Delta\nu} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$

Au vue des ordres de grandeur du tableau ??, le facteur limitant la figure d'interférences avec un laser est bien souvent la diffraction. Pour une lampe spectrale, la longueur de cohérence est voisine de la taille de la figure de diffraction. Pour une lumière blanche, la longueur de cohérence est souvent plus petite que l'interfrange.

2 - Critère pour une source bichromatique

Le brouillage d'une figure d'interférence intervient lorsqu'il y superposition de différentes figures d'interférences. Ainsi, le contraste est susceptible de s'annuler.

Lorsque la source primaire n'est pas monochromatique (on parle alors de défaut de cohérence temporelle), l'intensité résultante est la somme des intensités de chaque longueur d'onde.

Définition :

La superposition de deux figures d'interférences peut conduire à

- une **coïncidence** : les franges claires et sombres de chaque figure se superposent, le contraste est maximal;
- une **anti-coïncidence** : les franges claires d'une figure se superposent à une frange sombre d'une autre figure, on observe un brouillage.

Par exemple, dans le cas des fentes d'Young, l'interfrange dépend de la longeur d'onde $(i = \lambda D/a)$. Pour une source contenant deux longueurs d'onde différentes mais voisines, on observe un décalage progressif des franges d'une figure par rapport à l'autre, si bien qu'un brouillage apparaît lorsque la position d'une frange brillante (ordre d'interférence entier) d'une figure correspond à une frange sombre (ordre d'interférence demi-entier) pour l'autre (cf fig. ??).



FIGURE 1.16 – Illustration du phénomène de brouillage locale avec une source bichromatique

Propriété :

Lors de la superposition de deux figures d'interférences, on observe le **premier brouillage** lorsque la différence des ordres d'interférence vaut 1/2:

 $|\Delta p| = 1/2$

Exemple 4 Le dispositif d'interférence est constitué d'une source ponctuelle S monochromatique de longueur d'onde λ place au foyer objet d'une lentille L₁, d'une plaque percée de deux trous S₁ et S₂ de petite taille séparés de $a = 500 \ \mu m$ et distant de D = 1,0 m d'un écran d'observation E.



- 1 Justifier que les deux sources S_1 et S_2 sont des sources ponctuelles permettant de faire des interférences.
- 2 Déterminer la différence de marche entre deux rayons arrivant sur M
- 3 En déduire l'intensité sur l'écran et déterminer l'interfrange.
- 4 Si S émet également une longueur d'onde λ' justifier que le contraste de la figure est altéré.
- 5 Pour une lampe à vapeur de mercure $\lambda = 577,0$ nm et $\lambda' = 579,1$ nm. Combien de franges sont visibles entre deux brouillages ?

1 - Les fentes sont de petites tailles, la diffraction permet de les considérer comme des sources ponctuelles. Elles sont éclairées par une même source S, ces sources secondaires seront donc cohérentes.

2 - Comme vu dans le chapitre précédent :

$$\delta = \frac{a\mathbf{X}}{\mathbf{D}}$$

3 - Pour des interférences à deux ondes de même amplitude :

$$I = 2I_0 \left(1 + \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda} \right) = 2I_0 \left(1 + \cos 2\pi \frac{aX}{\lambda D} \right)$$

L'interfrange vaut donc :

 $i = \lambda \mathbf{D}/a$

4 - Les ondes de longueurs d'onde différentes n'interfèrent pas, on superpose donc les figures d'interférences : $I_{tot} = I_{\lambda} + I_{\lambda'}$. L'interfrange de chaque figure est différent car dépendant de λ . Les franges de chaque figure d'interférences vont progressivement se décaler lorsque que l'on s'éloigne du centre de la figure et on observera un brouillage.

5 - Soit p l'ordre d'interférences pour λ et p' l'ordre d'interférences pour λ' :

$$p = \frac{aX}{\lambda D}$$
 et $p' = \frac{aX}{\lambda' I}$

Comme $\lambda' > \lambda$, pour un même point de l'écran p < p'. Il y aura brouillage lorsque :

$$p = p' - 1/2$$

d'où

 $\frac{aX}{\lambda D} = \frac{aX}{\lambda' D} - \frac{1}{2} \quad \text{soit} \quad \frac{aX}{\lambda' D} - \frac{aX}{\lambda D} = \frac{1}{2}$ $X_{brouillage} = \frac{\lambda \lambda' D}{2a(\lambda' - \lambda)} = 16 \text{ cm}$

Ainsi,

Le dernier ordre visible est donc :

$$p = \frac{a \mathbf{X}_{brouillage}}{\lambda \mathbf{D}} = 137.8$$

On peut donc observer des franges brillantes allant de p = -137 jusqu'à p = +137 soit 275 franges en comptant l'ordre 0. Ce nombre paraît irréaliste et le facteur limitant est très certainement la diffraction au niveau des fentes...

3 - Critère pour une source avec largeur spectrale

Lorsque l'on tient compte de la largeur spectrale de la source, le critère précédent s'applique en prenant les longueurs d'onde au centre du spectre et à son extrémité.



Le critère de brouillage proposé est dit semi-quantitatif car il correspond à un ordre de grandeur et dépend de la forme du profil spectral. Il est cependant équivalent au critère de recouvrement des trains d'onde ($\delta < L_c$). Avec $\Delta \lambda$ la largeur spectrale, on en déduit que :

$$\Delta p = \frac{\delta}{\lambda_0} - \frac{\delta}{\lambda_{max}} = \frac{\delta}{\lambda_0} - \frac{\delta}{\lambda_0 + \Delta\lambda/2}$$



FIGURE 1.17 – Profil spectral lorentzien et vibration associée.

Au premier ordre en $\Delta \lambda / \lambda$, cette expression devient :

$$\Delta p = \frac{\delta \Delta \lambda/2}{\lambda_0 (\lambda_0 + \Delta \lambda/2)} \approx \frac{\delta \Delta \lambda}{2\lambda_0^2}$$

Ainsi le critère de brouillage $\Delta p < 1/2$ peut se réécrire :

$$\frac{\delta \Delta \lambda}{2\lambda_0^2} < \frac{1}{2} \quad \text{soit} \quad \delta < \frac{\lambda_0^2}{\Delta \lambda} = \mathcal{L}_c$$



FIGURE 1.18 – Influence de la largeur spectrale de la source

Exemple 5 On éclaire des fentes d'Young par une LED rouge dont le spectre est représenté ci-dessous. La source est supposée ponctuelle et

disopsée devant des fentes distantes de $a = 200 \ \mu\text{m}$. L'écran est situé à une distance D = 1,00 m des fentes.



- 1 Effectuer un schéma du montage d'optique et le tracé de rayons qui interfèrent.
- 2 Déterminer l'ordre maximale d'interférence visible en raison de la largeur spectrale de la source. On pourra considérer pour simplifier que $\Delta\lambda \ll \lambda$, et poser $p_{max} = \delta_{max}/\lambda$.

1 - Le schéma attendu est le suivant :

W

2 - Chaque vibration lumineuse de longueur d'onde différente va donner sa propre figure. Le critère de perte de contraste est donné par :

$$p_2 - p_1 > 1/2$$

avec $p_1 = \frac{\delta}{\lambda}$ et $p_2 = \frac{\delta}{\lambda + \Delta \lambda/2}$
Il y aura brouillage sur l'écran lorsque :

$$\Delta p = 1/2$$
 soit $\frac{\delta_{max}}{\lambda(\lambda + \Delta\lambda/2)} \frac{\Delta\lambda}{2} = \frac{1}{2}$

Avec $\Delta\lambda \ll \lambda$, on simplifie l'expression suivante :

$$\Delta p = 1/2 = \frac{\delta_{max}}{\lambda^2} \frac{\Delta \lambda}{2}$$

 $p_{max} = \frac{\delta_{max}}{\lambda} = 2\Delta p \frac{\lambda}{\lambda \lambda} = \frac{\lambda}{\lambda \lambda}$

 soit

On peut estimer sur la figure $\lambda \approx = 730$ nm, $\Delta \lambda \approx 50$ nm. On en déduit que :

$$p_{max} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \approx 15$$

Il est possible d'observer environ 30 franges avec le dispositif proposé.

IV. Interférences à N ondes

1 - Dispositif

Définition :

Un réseau de diffraction est un dispositif optique composé d'une série de fentes parallèles (réseau en transmission), ou de rayures réfléchissantes (réseau en réflexion). Ces traits sont espacés de manière régulière, l'espacement est appelé le « pas » du réseau.

Les réseaux peuvent être utilisés en transmission comme ceux utilisés en travaux pratiques (cf fig.??) ou en réflexion.

8 Remarque 7 :

Les reflets colorés à la surface d'un disque de type CD, DVD ou bluray est du aux stries périodiques sur lesquelles sont gravées les informations (cf fig.??). Ces objets peuvent être considérés comme des réseaux par réflexion.

Propriété :

Monté sur un goniomètre, un réseau sert à évaluer des longueurs d'onde d'une source lumineuse en mesurant les angles de déviation des rayons lumineux.



FIGURE 1.19 – Structure de type réseau, (gauche : modèle commercial, droite : male. CD)

Un réseau est éclairé par un faisceau de lumière parallèle à l'aide d'une source quasi-ponctuelle. Les interférences en sortie du réseau sont alors projeté sur un écran placé dans le plan focal d'une lentille convergente.

2 - Formule des réseaux

Considérons deux rayons lumineux traversant deux fentes successives du réseau. On note *i* l'angle d'incidence et θ l'angle des rayons en sortie du réseau. Entre deux rayons qui interfèrent, la différence de marche est donnée par :

$$\delta = a\sin\theta - a\sin i$$

On obtient donc des interférences constructives si la différence de marche est un multiple de la longueur d'onde (p entier):

$$a\sin\theta - a\sin i = p\lambda$$

p qui correspond à l'ordre d'interférence est également ordre du spectre. Attention, si le nombre de traits par mm est élevé, c'est à dire a petit, les angles peuvent être grands, l'approximation sin $i \approx i$ est donc illicite.



FIGURE 1.20 – Montage expérimental, spectroscope à reseau en incidence normale.



FIGURE 1.21 – Trajets de deux rayons passant par deux fentes consécutives

Remarque 8 :

Les reflets irisés des disques de type CD, DVD ou blu-ray tient du fait que les interférences des rayons lumineux après réflexion dépendent de l'angle et de la longueur d'onde. Ainsi, les in terférences sont constructives pour différentes couleurs à différents angles.

3 - Intensité lumineuse

a) Effet du nombre de fentes éclairées

Le nombre de fentes éclairées joue un rôle sur la largeur des franges brillantes observées comme en témoigne la simulation ci-dessous.



FIGURE 1.22 – Simulation d'intensité lumineuse avec 2, 5 puis 9 fentes éclairées.

On considère qu'avec un grand nombre de fentes éclairées, lorsque la différence de marche ne vérifie pas la formule des réseaux, les interférences sont destructives. En effet, avec de nombreuses vibrations lumineuses, on estime qu'en dehors de ce critère, on peut toujours trouver une vibration en opposition de phase avec une autre. La finesse des franges s'obtient également avec une construction géométrique utilisant les vecteurs de Fresnel. L'amplitude complexe au point M de deux ondes issues de deux fentes successives s'écrit :

$$\underline{s}_{n+1}(\mathbf{M},t) = \underline{s}_n(\mathbf{M},t)e^{-i\phi}$$

avec $\phi = 2\pi \delta/\lambda$ le déphasage entre les deux fentes. Dans le plan de Fresnel, le vecteur s_{n+1} est donc tourné de ϕ par rapport au vecteur s_n . L'amplitude totale est donnée par la somme de tous ces vecteurs :





FIGURE 1.23 – Construction de Fresnel

Cherchons à calculer la largeur angulaire d'une frange brillante. Pour cela, déterminons la première valeur de θ qui annule l'intensité autour d'un maximum principal. Rappelons que sur un pic d'interférence les ondes qui interfèrent sont tous en phase (modulo 2π). En termes de vecteurs de Fresnel, cela donne N vecteurs colinéaires comme on l'a déjà vu. Imaginons maintenant que chaque vecteur de Fresnel tourne de $2\pi/N$ par rapport au vecteur précédente. Ces vecteurs mis bout à bout forment alors un polygone à N côtés et le vecteur résultant est tout simplement le vecteur nul. C'est pourquoi, au voisinage d'un maximum principal, on trouve I = 0 dès lors que

 $N \times \Delta \phi = 2\pi [2\pi]$

Propriété :

La demi-largeur des franges brillante vérifie le critère suivant :

$$\Delta \phi = \frac{2\tau}{N}$$

où N est le nombre de fentes éclairées

\checkmark Exemple 6 Déterminer la largeur angulaire δ_p d'un pic d'interférences à l'ordre p. On considérera un réseau éclairé en incidence normale.

Pour un réseau éclairé en incidence normale, la figure d'interférence ressemble à celle ci-contre. Le déphasage entre deux vibrations s'écrit, d'après la formule des réseaux :

$$\Delta \phi = \frac{2\pi a \sin(\theta)}{\lambda}$$

Notons θ_p l'angle correspondant à

une frange d'ordre p. Pour l'ordre p, correspondant à un maximum d'intensité, la formule des réseaux devient :

$$\Delta \phi(\theta_p) = \frac{2\pi a \sin(\theta_p)}{\lambda} = 2\pi p$$

Lorsque l'intensité s'annule autour de l'ordre p, alors

$$\mathbf{N} \times \Delta \phi = 2\pi [2\pi] = 2\pi + 2\pi p$$

Notons $\theta_p + \delta \theta_p/2$ et $\theta_p - \delta \theta_p/2$, les angles pour les quels l'intensité est nulle, $\delta \theta_p$ est la largeur angulaire de la frange d'ordre p. Lorsque l'intensité s'annule, la somme des phases des différentes vibrations vérifie :

$$N\Delta\phi(\theta_p + \delta\theta_p) = 2\pi[2\pi]$$

On peut donc écrire de part et d'autre du pic d'ordre p :

$$\Delta\phi(\theta_p + \delta\theta_p/2) = 2\pi p + \frac{2\pi}{N} \quad \text{et} \quad \Delta\phi(\theta_p - \delta\theta_p/2) = 2\pi p - \frac{2\pi}{N}$$

On obtient alors :

$$\Delta\phi(\theta_p + \delta\theta_p/2) - \Delta\phi(\theta_p + \delta\theta_p/2) = \frac{4\pi}{N}$$

Pour $\delta \theta_p \ll \theta_p$, on obtient :

$$\Delta\phi(\theta_p + \delta\theta_p/2) \approx 2\pi a \frac{\sin(\theta_p) + \frac{\delta\theta_p}{2}\cos\theta_p}{\lambda} \quad \text{et} \quad \Delta\phi(\theta_p - \delta\theta_p/2) \approx 2\pi a \frac{\sin(\theta_p) - \frac{\delta\theta_p}{2}\cos\theta_p}{\lambda}$$

Par différence, il vient :

$$2\pi a \frac{\delta \theta_p \cos \theta_p}{\lambda} = \frac{4\pi}{N} \quad \text{soit} \quad \delta \theta_p = \frac{2\lambda}{Na \cos \theta_p}$$

En utilisant le fait que $\cos^2 \theta_p = 1 - \sin^2 \theta_p = 1 - p^2 \lambda^2 / a^2$, on obtient :

$$\delta\theta_p = \frac{2\lambda}{\mathrm{N}a\sqrt{1-p^2\lambda^2/a^2}}$$

Propriété :

Plus le nombre de fentes éclairées est grand, plus les interférences constructives sont fines : on parle alors de pics d'interférence.

b) Calcul de l'intensité lumineuse

Pour calculer l'intensité globale résultant de l'interférences de N vibrations lumineuses, on utilise la notation complexe. On note $\underline{s}_0(\mathbf{M},t)$ la vibration passant par la première fente, le déphasage des vibrations passant par les fentes suivantes vaut alors $n\Delta\phi$. Les vibrations s'écrivent alors par :

$$\mathbf{g}_n(\mathbf{M},t) = \mathbf{A}e^{i(\omega t - n\Delta\phi)}$$

La vibration résultante devient :

$$\underline{\mathbf{s}}_{tot}(\mathbf{M},t) = \Sigma_{n=0}^{n=\mathbb{N}-1} \underline{\mathbf{s}}_{n}(\mathbf{M},t) = \mathbf{A} e^{i\omega t} \Sigma_{n=0}^{n=\mathbb{N}-1} e^{-in\Delta\phi}$$

Le calcul de la vibration totale s'obtient alors par somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{-i\Delta\phi}$:

$$\underline{s}_{tot}(\mathbf{M},t) = \mathbf{A}e^{i\omega t} \Sigma_{n=0}^{n=\mathbf{N}-1} e^{-in\Delta\phi} = \mathbf{A}e^{i\omega t} \frac{1 - e^{-i\mathbf{N}\Delta\phi}}{1 - e^{-i\Delta\phi}}$$

En factorisant par l'arc moitié, on obtient :

$$\underline{s}_{tot}(\mathbf{M},t) = \mathbf{A}e^{i\omega t} \frac{e^{-i\mathbf{N}\Delta\phi/2}}{e^{-i\Delta\phi/2}} \frac{e^{i\mathbf{N}\Delta\phi/2} - e^{-i\mathbf{N}\Delta\phi/2}}{e^{i\Delta\phi/2} - e^{-i\Delta\phi/2}} = \mathbf{A}e^{i\omega t} \frac{e^{-i\mathbf{N}\Delta\phi/2}}{e^{-i\Delta\phi/2}} \frac{\sin\mathbf{N}\phi/2}{\sin\phi/2}$$

L'intensité lumineuse vaut alors

	$I_{(M)}$	_ 1		$A^2 \sin^2 N\phi/2$		
		$=\frac{-3}{2}\frac{ss}{s}$	=	2	$\sin^2 \phi/2$	



FIGURE 1.24 – Allure de l'intensité lumineuse pour 10 fentes éclairées

8 Remarque 9 :

L'intensité lumineuse maximale est égale à ${\rm N}^2$ fois l'intensité traversant une seule fente :

$$I(M) = \frac{A^2}{2} \frac{\sin^2 N\phi/2}{\sin^2 \phi/2} \underset{\Delta \phi \to 0}{\sim} N^2 \frac{A^2}{2}$$

Courbe de l'intensité lumineuse, exploitation des interférences

- 4 Interprétation de la figure
 - a) Lumière quasi-monochromatique



1 - Les interférences sont constructives pour une position ${\rm X}=20~{\rm cm},$ ce qui correspond à un angle de :

$$\tan \theta = \frac{\mathbf{X}}{f'} \quad \text{soit} \quad \theta = 0,38 \text{ rad}$$

La première raie correspond à l'ordre d'interférence p = 1, d'après la formule des réseaux en incidence normale :

$$a\sin\theta - a\sin0 = \lambda$$
 soit $a = \frac{\lambda}{\sin\theta}$

 $a = 1.6 \ \mu m$

d'où

So it $\frac{1}{a \times 10^3} \approx 600$ traits par mm.

2 - On peut estimer la demi-largeur à 1,5 cm environ ce qui correspond à un angle de

$$\Delta \theta \approx \frac{1,5}{50} = 0.03 \text{ rad}$$

Le déphasage associé vaut donc :

$$\Delta \phi = \frac{2\pi a \sin \Delta \theta}{\lambda} = \frac{2\pi}{N}$$

d'où

$$\mathbf{N} \approx \frac{\lambda}{a\Delta\theta} \approx 10$$

b) Lumière polychromatique

Exemple 8 Un réseau plan, utilisé par transmission, est formé de *n* traits parallèles équidistants de *a*, gravés sur un support en verre. Le pinceau incident fait l'angle variable i_0 avec la normale au réseau qui peut tourner autour d'un axe parallèle aux traits. On mesure avec ce réseau la déviation minimale $D_{m0} = 31^{\circ}42'$ de la raie verte du mercure $(\lambda_0 = 546,1 \text{ nm})$ pour le spectre d'ordre 2, puis la déviation minimale $D_{m1} = 18^{\circ}32'$ pour la raie rouge du cadmium au premier ordre. On admet qu'à la déviation minimale, l'angle du spectre d'ordre *p* vaut : $i_p = -i_0$.

1 - Exprimer $\sin i_p$ en fonction de $i_0,\,\lambda,\,a$ et p l'ordre du spectre.

2 - Calculer l'angle d'incidence i_0 correspondant à la déviation minimale de la raie verte ;

3 - Déterminer le nombre n de traits par millimètre et le pas a du réseau utilisé.

- 4 Calculer la longueur d'onde de la raie rouge du cadmium;
- 1 D'après la formule des réseaux

$$a\sin i_p - a\sin i_0 = p\lambda$$

2 - Comme $D_m = 2i_0$, on en déduit que

$$i_0 = 15^{\circ}51'$$

3 - En appliquant la formule des réseaux, on obtient au minimum de déviation :

$$2a\sin\frac{\mathbf{D}_m}{2} = p\lambda$$

Soit, pour la raie verte :

$$a = \frac{\lambda}{\sin \mathcal{D}_m/2} = 2,000 \ \mu \mathrm{m}$$

Soit 1/a = 500 traits par mm.

4 - En appliquant la formule des réseaux, on obtient pour la raie rouge :

$$2a\sin\frac{\mathbf{D}_{m1}}{2} = 1 \times \lambda$$

 $\lambda = 644 \text{U} nm$

 soit

5 -

Cristallographie

La cristallographie par rayons X repose sur le même principe que la diffraction par un réseau. Chaque atome d'un solide va diffracter la lumière et les interférences seront constructives uniquement selon un angle particulier vérifiant la formule des réseaux.



FIGURE 1.25 – Principe de diffraction atomique

Plusieurs méthodes de cristallographie existent, l'une d'entre elles utilise un matériel identique dans son principe au goniomètre utilisé en séance de travaux pratiques.

L'appareil permet la mesure de l'intensité lumineuse selon l'angle d'incidence et de diffraction. Les angles sont caractéristiques de la position des atomes les uns par rapport aux autre. Un logiciel permet ensuite de recomposer l'image du solide.

Les progrès rapides des densités d'enregistrement supportées par les médias magnétiques amènent à explorer des voies crédibles pour la synthèse de média à ultra haute densité de stockage de l'information (> $1Tbits/inch^2$). De telles densités impliquent l'utilisation de supports d'enregistrement constitués de grains ferromagnétiques de quelques nanomètres seulement. Une voie sé-



FIGURE 1.26 – Goniomètre de la marque Bruker-AXS, type D8



 $\rm FIGURE~1.27$ – Diagramme de diffraction des rayons X pour des particules de FePt de 5 nm de diamètre, Image, en microscopie à balayage, de nanoparticules FePt

5 nm

50

60

70

20 (°)

80 90

100 110