

# Mécanique en référentiel non galiléen

La mécanique en référentiel galiléen décrit parfois des mouvements complexes qui peuvent être grandement simplifiés en se plaçant dans un autre référentiel. Si celui-ci est non galiléen, il apparaît des forces fictives supplémentaires dites d'inertie dont l'expression peut être simple pour des mouvements de rotation ou de translation. Ces forces sont dites fictives car elles ne résultent pas d'interaction entre des systèmes mais traduisent le caractère non galiléen du référentiel d'étude. On en ressent par exemple les effets dans le cas de la force centrifuge qui nous pousse vers l'extérieur d'une voiture lorsque l'on prend un virage trop serré.

Dans un référentiel galiléen (par exemple lié à la route), la trajectoire de notre corps est circulaire mais nous ressentons la force centrifuge dans le référentiel lié à la voiture (non galiléen car en rotation par rapport à un référentiel galiléen). Au laboratoire, des centrifugeuses (cf. fig. 1.1) permettent de séparer les constituants d'un liquide en fonction de sa densité. Être capable de traiter le cas de référentiels non galiléen simplifie l'interprétation de phénomènes physiques (forces centrifuges, phénomène des marées, ...). Par ailleurs, le concept de forces



FIGURE 1.1 – Centrifugeuse 1  
FastGene©, pouvant tourner à

fictives révèle que la notion de force est intimement liée au référentiel. Ce couplage entre force et référentiel est poussé à l'extrême dans le cadre de la relativité générale où la gravitation est décrite comme une déformation de l'espace temps.

## I. Les référentiels non galiléens

### 1 - Présentation

#### a) Distinction galiléen et non galiléen

On rappelle qu'un **référentiel** est un système de coordonnées de l'espace (repère) et du temps (horloge) permettant de repérer le mouvement d'un corps. En général, on lie un référentiel à des objets (origine et direction pointant vers des étoiles lointaines par exemple), si ces objets peuvent être considérés comme fixes pendant la durée de l'expérience alors, on pourra abusivement admettre que ce référentiel est **galiléen**.

**Remarque 1 :**

Le principe d'inertie a été exprimé par Galilée au XVII<sup>e</sup> siècle. Il l'illustra en considérant un observateur enfermé dans la cabine d'un bateau regardant des gouttes tombant d'une bouteille. Que le bateau soit immobile ou se déplace à n'importe quelle vitesse *constante*, l'observateur verrait le même mouvement des gouttes. Ce principe n'est pas intuitif : quelle que soit la vitesse *constante* de déplacement du bateau, il observe une chute verticale, comme si le bateau était à l'arrêt.

Ce principe sera généralisé au XX<sup>e</sup> siècle à d'autres domaines, et conduira à l'idée que les lois de la physique en général sont les mêmes dans les référentiels galiléens (notion d'invariant physique). Dans le cas de l'électromagnétisme, cela conduira Poincaré au principe de relativité et Einstein à fonder la relativité restreinte (cf. chap. ??), puis à la relativité générale pour décrire la gravitation.

**Définition :**

Un référentiel est dit **non galiléen** s'il n'est pas en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen.

Selon les conditions d'utilisation, les référentiels usuels deviennent non galiléens :

- le référentiel **terrestre** ( $\mathcal{R}_T$ ) en présence de tremblement de terre ;
- le référentiel **géocentrique** ( $\mathcal{R}_G$ ) sur des échelles de temps de l'ordre de la journée, par exemple pour expliquer le phénomène des marées.

**b) Intérêt : mesure du mouvement**

Le mouvement d'un solide peut être mesuré à l'aide d'accéléromètre que ce soit dans un but ludique (console de jeu, téléphone portable) ou industriel (capteur de chocs pour AirBag, orientation d'un avion...). Les propriétés du mouvement d'une masse accrochée à un ressort dans le cas où le bâti est mobile sont utilisées pour remonter aux propriétés de l'accélération dans le référentiel terrestre. Il est ensuite possible de calculer la trajectoire.

**Remarque 2 :**

En 2019, un groupe de chercheurs français a réussi à exploiter les données d'un accéléromètre pour repérer le mouvement d'un marcheur (cf. fig. 1.2). Si la localisation par GPS est performante à la surface du globe, dans des bâtiments ou des sous-terrains, elle est inopérante et pourrait être remplacée par un positionnement par accéléromètre afin de suivre le déplacement de sauveteurs dans un tunnel par exemple.

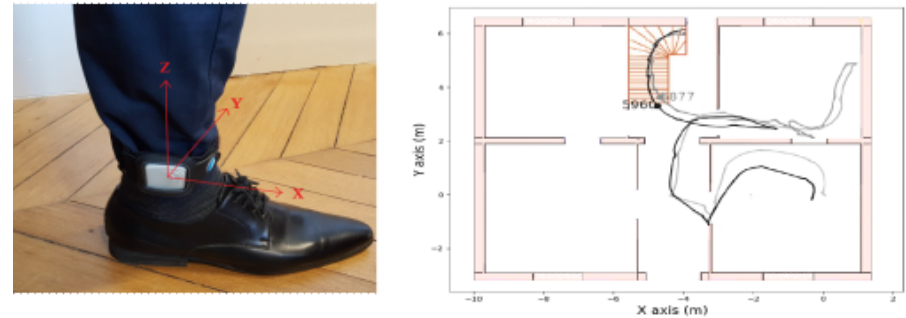


FIGURE 1.2 – Reconstruction du mouvement d'un marcheur à l'aide d'un accéléromètre, d'après *Robust Stride Detector from Ankle-Mounted Inertial Sensors for Pedestrian Navigation and Activity Recognition with Machine Learning Approaches, Sensors, 2019*, sous licence Creative Commons 4.0.

**c) Restriction de l'étude**

Nous simplifierons l'étude d'un mouvement à deux types de déplacement d'un référentiel par rapport à un autre :

- les mouvements de **translation rectiligne** ;
- les mouvements de **rotation autour d'un axe fixe**.

En géométrie, une translation est une transformation géométrique qui correspond à l'idée intuitive de « glissement » d'un objet, sans rotation de cet objet. La translation s'effectue selon une direction particulière de l'espace.

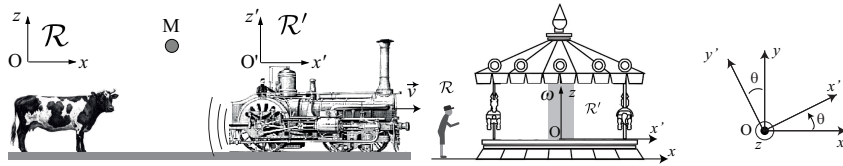


FIGURE 1.3 – Référentiel en translation ou en rotation.

Un solide est en rotation si la trajectoire de tous ses points sont des cercles dont le centre est une même droite ; cette droite est appelée « axe de rotation », et habituellement notée  $\Delta$ . Dans la suite, afin de simplifier les notations, la plupart du temps, l'axe de rotation sera confondu avec l'axe  $Oz$ . En cinématique dans le plan, les trajectoires des points sont des cercles concentriques, le centre commun de ces cercles est appelé « centre de rotation » et habituellement noté  $O$ . L'orientation du solide est repérée par un angle habituellement noté  $\theta$  (cf. fig. 1.3). On caractérise la rotation autour de  $(Oz)$  par le vecteur  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$  avec  $\theta = \omega t$  l'angle de rotation autour de l'axe  $(Oz)$ <sup>1</sup>.

### ◆ Définition :

Pour une rotation d'un angle  $\theta$ , la vitesse angulaire de rotation  $\omega$  et l'accélération angulaire sont définis respectivement par

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \quad \text{et} \quad \dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt}$$

### 🍃 Exemple 1

Dans une centrifugeuse utilisée en laboratoire, des tubes sont mis en rotation afin de séparer les différents constituants selon leur densité. Dans le domaine médical, la centrifugation du sang permet de séparer le plasma des plaquettes plus denses.

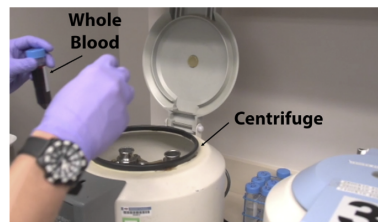


FIGURE 1.4 – Séparation

1. Le sens de rotation suit la règle de la main droite : si les doigts tournent dans le sens de l'angle  $\theta$ , le pouce pointe selon  $\vec{e}_z$ .

des constituants sanguins par centrifugation, d'après *Arth. tech.* **6**, e763 (2017), sous licence Creative Commons 4.0.

- 1 - Le référentiel lié au plateau tournant de la centrifugeuse est-il galiléen ?
- 2 - Conclure sur l'intérêt de ce référentiel par rapport au référentiel du laboratoire.

- 1 - Le référentiel lié au plateau de la centrifugeuse n'est pas en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel du laboratoire supposé galiléen. On peut donc conclure que le référentiel tournant n'est pas galiléen.
- 2 - Dans le référentiel tournant, le mouvement est simple car décrit par une seule variable de mouvement tandis que, dans le référentiel du laboratoire, le mouvement de rotation combiné à la translation est plus complexe.

## 2 - Loi de composition des vitesses et accélération

### a) Référentiel en translation

Soit  $M$  un point mobile dans l'espace. Par définition la vitesse de ce point dans un référentiel  $(\mathcal{R})$  est donnée par :

$$\vec{v}_{(M)(\mathcal{R})} = \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right|_{(\mathcal{R})}$$

Soit  $O'$  l'origine d'un repère associé au référentiel  $(\mathcal{R}')$  en mouvement par rapport au référentiel  $(\mathcal{R})$  (cf. fig 1.5). On en déduit que

$$\vec{v}_{(M)(\mathcal{R})} = \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right|_{(\mathcal{R})} = \left. \frac{d\vec{OO}'}{dt} \right|_{(\mathcal{R})} + \left. \frac{d\vec{O'M}}{dt} \right|_{(\mathcal{R})}$$

On définit alors la vitesse d'**entraînement** comme la vitesse du référentiel  $(\mathcal{R}')$  par rapport au référentiel  $(\mathcal{R})$  :

$$\vec{v}_e = \left. \frac{d\vec{OO}'}{dt} \right|_{(\mathcal{R})} = \vec{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$$

Le référentiel  $(\mathcal{R}')$  étant en translation par rapport au référentiel  $(\mathcal{R})$ , on en déduit que la vitesse dite **relative** de  $M$  dans le référentiel  $(\mathcal{R}')$  s'écrit :

$$\vec{v}_{(M)(\mathcal{R}')} = \left. \frac{d\vec{O'M}}{dt} \right|_{(\mathcal{R}')} = \left. \frac{d\vec{O'M}}{dt} \right|_{(\mathcal{R})}$$

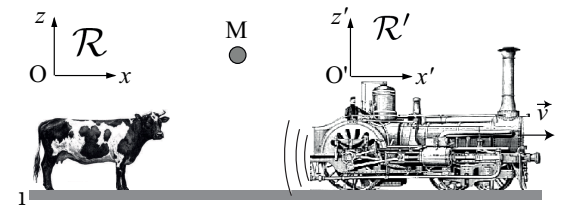


FIGURE 1.5 – Référentiels en translation.

Ainsi, on retiendra que la loi de composition est assez intuitive puisqu'elle s'écrit :

$$\vec{v}(M)_{(\mathcal{R})} = \underbrace{\vec{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}_{\text{entraînement}} + \underbrace{\vec{v}(M)_{(\mathcal{R}')}}_{\text{relative}}$$

Ainsi la vitesse dite **absolue** dans le référentiel  $\mathcal{R}$  se décompose en vitesse **d'entraînement** et vitesse **relative**. Avec le même raisonnement, on obtient ainsi la loi de composition des accélérations :

$$\vec{a}(M)_{(\mathcal{R})} = \underbrace{\vec{a}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}_{\text{entraînement}} + \underbrace{\vec{a}(M)_{(\mathcal{R}')}}_{\text{relative}}$$

L'accélération **absolue** dans le référentiel  $\mathcal{R}$  se décompose en accélération **d'entraînement** et accélération **relative**.

### b) Référentiel en rotation

Soit le référentiel non galiléen ( $\mathcal{R}'$ ) en rotation uniforme par rapport au référentiel galiléen ( $\mathcal{R}$ ) selon le vecteur vitesse angulaire constant :  $\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})}$  (cf. fig. 1.6). La formule de Bour permet d'exprimer la dérivée d'un vecteur dans une base mobile (cf. annexe I). Pour tout vecteur  $\vec{B}(t)$ , on a<sup>2</sup> :

$$\left(\frac{d\vec{B}}{dt}\right)_{(\mathcal{R})} = \left(\frac{d\vec{B}}{dt}\right)_{(\mathcal{R}')} + \vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \vec{B}$$

On en déduit qu'en rotation, la composition de vitesse s'écrit :

$$\vec{v}(M)_{(\mathcal{R})} = \vec{v}(M)_{(\mathcal{R}')} + \vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \overrightarrow{OM}$$

2. Le calcul d'un produit vectoriel est précisé dans une remarque du chap. ??, page ??. On appliquera généralement la formule de Bour pour 2 vecteurs  $\vec{\omega}$  et  $\vec{B}$  *perpendiculaires*. On peut alors appliquer la règle de la main droite :  $\vec{\omega} \wedge \vec{B} = \vec{W}$  avec  $W = \omega \times B$  et la direction et le sens de  $\vec{W}$  sont donnés par le pouce de la main droite lorsque celle-ci pousse avec les doigts  $\vec{\omega}$  vers  $\vec{B}$ .

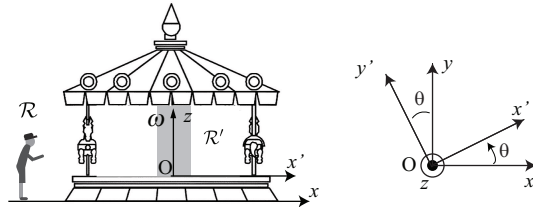


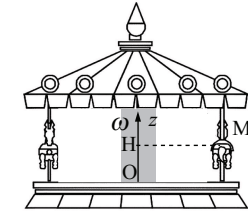
FIGURE 1.6 – Référentiel en rotation.

L'accélération s'obtient de la même façon en utilisant la formule de Bour (cf. annexe I). On obtient trois termes : l'accélération **relative** de M dans  $\mathcal{R}'$ , l'accélération de **Coriolis** et l'accélération dite **d'entraînement**.

$$\vec{a}(M)_{(\mathcal{R})} = \underbrace{\vec{a}(M)_{(\mathcal{R}')}}_{\text{relative}} + \underbrace{2\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \vec{v}(M)_{(\mathcal{R}')}}_{\text{Coriolis}} + \underbrace{\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge (\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \overrightarrow{OM})}_{\text{entraînement}}$$

#### Propriété :

En utilisant les propriétés du double produit vectoriel, il est possible de montrer que l'accélération d'entraînement s'écrit en fonction de H, projeté orthogonal sur l'axe de rotation du point M :



$$\vec{a}_e = \vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge (\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \overrightarrow{OM}) = -\omega_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})}^2 \overrightarrow{HM}$$

## II. 2<sup>e</sup> loi de Newton en référentiel non galiléen

### 1 - Notion de force d'inertie

Dans un référentiel galiléen ( $\mathcal{R}$ ), considérons un point matériel de masse  $m$  soumis à une résultante des forces  $\vec{F}$ , le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$m\vec{a}(M)|_{(\mathcal{R})} = \vec{F}$$

Dans le cas d'une translation, l'accélération se décompose dans un référentiel ( $\mathcal{R}'$ ) selon la formulation suivante :

$$\vec{a}(M)_{(\mathcal{R})} = \underbrace{\vec{a}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}_{\text{entraînement}} + \underbrace{\vec{a}(M)_{(\mathcal{R}')}}_{\text{relative}}$$

Ainsi, le principe fondamental de la dynamique peut s'écrire dans un référentiel non galiléen sous la forme suivante :

$$m\vec{a}(M)|_{(\mathcal{R}')} = \vec{F} - m\vec{a}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$$

Le terme  $-m\vec{a}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$  joue le rôle d'une pseudo-force appelée **force d'inertie** puisqu'elle ne provient pas d'une interaction entre systèmes. Elle ne fait pas partie des forces usuelles manipulées dans les référentiels galiléens mais se rajoute au bilan des forces.

## 2 - Référentiel en translation

galiléen.

2 - a) Dans ce référentiel, déterminer la longueur à l'équilibre  $\ell_{eq}$  du ressort.

b) Établir l'équation du mouvement de la masse  $m$  glissant sans frottement sur le bâti, on posera  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  et  $x' = \ell - \ell_{eq}$ .

Pour s'entraîner : exercices ??, ??, ?? et 5

1 - Le référentiel  $\mathcal{R}'$  est en accélération par rapport au référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ , il n'est donc pas galiléen.

2 - a) Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , la masse est soumise à

- son poids  $\vec{P} = -mg\vec{e}_{y'}$  ;
- la réaction du support  $\vec{P} = R\vec{e}_{y'}$ ,
- la force de rappel du ressort :  $\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_{x'}$

Le référentiel étant non galiléen, on rajoute la force d'inertie d'entraînement :  $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_0$ . À l'équilibre,  $\vec{P} + \vec{P} + \vec{F} + \vec{F}_{ie} = \vec{0}$  et, après projection selon  $(Ox')$  :  $-k(\ell_{eq} - \ell_0) - ma_0 = 0$  donc

$$\ell_{eq} = \ell_0 - \frac{ma_0}{k}$$

b) En mouvement, le PFD devient  $\vec{P} + \vec{P} + \vec{F} + \vec{F}_{ie} = m\vec{a}$  La projection du principe fondamental de la dynamique selon  $\vec{e}_{x'}$  s'écrit :

$$m\ddot{x}' = -k(\ell - \ell_0) - ma_0 = -kx' - ma_0$$

En divisant par la masse, on obtient l'équation canonique :

$$\ddot{x}' + \omega_0^2 x' = 0$$

Lorsque le bâti est en accélération, la masse oscille à la pulsation  $\omega_0$  autour de la position d'équilibre qui n'est plus  $\ell_0$  mais diminuée  $\ell_0 - a_0/\omega_0^2$ .

### Définition :

Soit un référentiel non galiléen  $\mathcal{R}'$  en translation par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  galiléen, telle que que  $O\vec{O}' = u(t)\vec{e}_x$  est la position du centre de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . La force d'inertie d'entraînement appliquée en un point M est de la forme

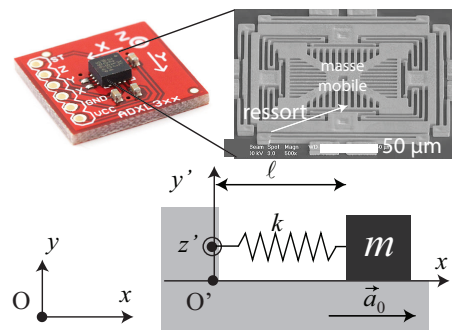
$$\vec{F}_{ie} = -m\ddot{u}\vec{e}_x$$

où  $\ddot{u}$  est l'accélération du référentiel  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ .

Si le référentiel  $\mathcal{R}'$  est en translation rectiligne uniforme par rapport à  $\mathcal{R}$ , sa vitesse est constante, on obtient alors  $\ddot{u} = 0$ , la force d'inertie est nulle. On retrouve bien les mêmes forces que pour un référentiel galiléen.

### Exemple 2

Les accéléromètres utilisés par exemple dans les téléphones portables sont des systèmes masses-ressorts de taille inférieure au mm. On considère une masse  $m$  accrochée à un ressort de longueur à vide  $\ell_0$  et de constante de raideur  $k$ . Le bâti est soumis à une accélération  $\vec{a}_0 = a_0\vec{e}_x$  par rapport au référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ .



1 - Justifier que le référentiel  $\mathcal{R}'$  associé au bâti est un référentiel non

**Remarque 3 :**

Dans les accéléromètres, la mesure du mouvement autour de la position d'équilibre s'effectue par mesure de fluctuations de la capacité du condensateur formé entre le bâti et la masse mobile. Ces dispositifs ne peuvent être soumis à de trop fortes accélérations ( $a_0 < \omega_0^2 l_0$ ), des chercheurs ont donc développé des accéléromètre fonctionnant sur le décalage du profil de température d'un fluide piégé dans une cavité et chauffé au milieu au moyen d'un fil résistif (cf. fig. 1.7).

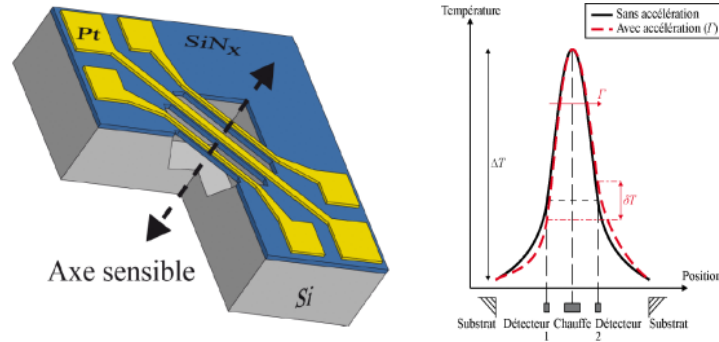


FIGURE 1.7 – Schéma d'un micro-accéléromètre composé de trois fils suspendus au-dessus d'une cavité micro-usinée dans le silicium. Profil de température du fluide dans la cavité sans ou avec accélération imposée au capteur, *d'après Amélioration des performances et nouveau concept de détecteurs de capteurs inertiels à détection thermique, A. Garrand, Thèse 2011.*

### 3 - Référentiel en rotation

#### a) Expression des pseudo-forces d'inertie

L'accélération dans un référentiel ( $\mathcal{R}'$ ) en rotation par rapport à un référentiel ( $\mathcal{R}$ ) se décompose en trois termes, on utilisera les notations  $\vec{a}_c$  et  $\vec{a}_e$  pour les termes de Coriolis et d'entraînement :

$$\vec{a}(M)_{(\mathcal{R})} = \underbrace{\vec{a}(M)_{(\mathcal{R}')}}_{relative} + \underbrace{2\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \vec{v}(M)_{(\mathcal{R}')}}_{\vec{a}_c} + \underbrace{\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge (\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \vec{OM})}_{\vec{a}_e}$$

Ainsi, le principe fondamental de la dynamique s'écrit  $m\vec{a}(M)|_{(\mathcal{R})} = \vec{F}$  dans le référentiel galiléen ( $\mathcal{R}$ ), et peut s'écrire dans le référentiel non galiléen en rotation sous la forme suivante :  $m\vec{a}(M)|_{(\mathcal{R}')} = \vec{F} - m\vec{a}_c - m\vec{a}_e$ .

Les termes  $-m\vec{a}_c$  et  $-m\vec{a}_e$  sont les pseudo-forces d'inertie dues à la rotation du référentiel.

**Définition :**

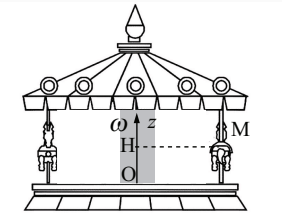
Si un référentiel  $\mathcal{R}'$  est en rotation par rapport à  $\mathcal{R}$  à la vitesse angulaire constante  $\vec{\omega}$ , alors dans  $\mathcal{R}'$  apparaissent deux forces d'inertie appliquées en M, définie par :

- la force d'inertie d'*entraînement*

$$\vec{F}_{ie} = m\omega^2 \vec{HM}$$

où H est le projeté de M sur l'axe de rotation ;

- la force d'inertie de *Coriolis* :  $\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}$ .


**Remarque 4 :**

La force d'inertie d'entraînement est également appelée force **centrifuge** car elle est dirigée de l'axe de rotation vers l'extérieur : selon  $\vec{HM}$ .

## b) Utilisation de la pseudo-force d'entraînement

**Exemple 3**

Un manège tel que celui montré ci-contre est constitué d'un simple cylindre de rayon  $R = 3\text{m}$ , en rotation dont le sol est escamotable. Une fois le manège lancé, les personnes sont plaquées contre la paroi et semblent léviter une fois le sol enlevé. On notera



$f = 0,7$ , le coefficient de friction entre le mur et les personnes.

1 - Représenter un schéma modèle accompagné des forces.

2 - Déterminer la vitesse de rotation minimale (en tr/min) que doit avoir le manège pour que les personnes ne glissent pas vers le bas de la paroi.



Pour s'entraîner : exercices 2, 4, 6, 7 et ??

Dans le référentiel non galiléen en rotation, les personnes immobiles sont soumises à

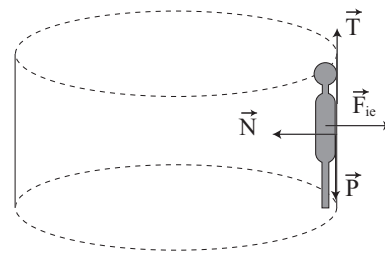
- leur poids  $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$  ;
- la réaction du support :  $\vec{R} = -N\vec{e}_r + T\vec{e}_z$  ;
- la pseudo-force d'inertie d'entraînement :  $\vec{F}_{ie} = m\omega^2 R\vec{e}_r$  ;

La projection du principe fondamental de la dynamique conduit à

$$-mg + T = 0 \quad \text{et} \quad -N + m\omega^2 R = 0$$

À la limite du glissement :  $T = f \times N$ , on en déduit que :  $mg = fm\omega_{lim}^2 R$ . On obtient alors :

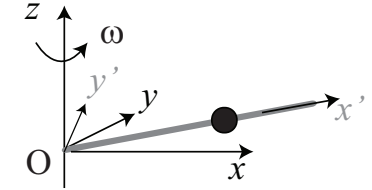
$$\omega_{lim} = \sqrt{\frac{g}{fR}} = 2,3 \text{ rad.s}^{-1} = 21 \text{ tr.min}^{-1}$$



## c) Utilisation de la pseudo-force de Coriolis

**Exemple 4**

Une perle P de masse  $m$ , considérée ponctuelle, soumise à la pesanteur et susceptible de se déplacer sur une tige tournant à une vitesse angulaire  $\vec{\omega}$  autour d'un axe contenant son centre O. L'accélération de la pesanteur  $\vec{g}$  est constante et dirigée vers le bas. On note  $\vec{OM} = x'\vec{e}_{x'}$  le vecteur position à l'instant  $t$ . La tige est dans le plan horizontal  $(Ox, Oy)$  et tourne autour de l'axe  $Oz$  à la vitesse angulaire  $\omega$ .



Les mouvements ont lieu sans frottement.

1 - Établir l'équation différentielle en  $x'(t)$  du mouvement.

2 - Résoudre cette équation pour les conditions initiales  $x'(0) = X_0$  et  $\dot{x}'(0) = 0$ .

3 - Déterminer la force exercée par la tige sur la bille.

Pour s'entraîner : exercice ??

1 - Plaçons nous dans le référentiel tournant à la vitesse angulaire  $\vec{\omega}$ . Dans le référentiel galiléen, la bille n'est soumise qu'à son poids  $\vec{P}$  et à la réaction du support  $\vec{R}$ . Appliquons la 2<sup>e</sup> loi de Newton dans le référentiel non galiléen tournant ;  $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{ie} = m\vec{a}'$ . Une projection suivant  $(Ox')$  conduit à

$$m\ddot{x}' = -ma_e$$

Avec  $a_e = -\omega^2 x'$ , l'équation du mouvement devient :  $\ddot{x}' - \omega^2 x' = 0$ .

2 - La solution de cette équation différentielle est de la forme :

$$x' = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$$

Appliquons les conditions initiales :  $X_0 = A+B$  et  $0 = \omega(A-B)$ . Finalement,  $A = B = X_0/2$ , on obtient :  $x'(t) = \frac{X_0}{2}e^{\omega t} + \frac{X_0}{2}e^{-\omega t} = X_0 \cosh \omega t$

3 - La force normale est perpendiculaire au déplacement et possède deux composantes : l'une selon  $Oy'$  et l'autre selon  $Oz$  :

$$\vec{N} = N_y\vec{e}_{y'} + N_z\vec{e}_z$$

La force de Coriolis est de la forme

$$\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}|_{\mathcal{R}} = -2m\omega\dot{x}'\vec{e}_y'$$

La projection du principe fondamental de la dynamique dans le référentiel tournant selon  $Oy'$  et  $Oz$  conduit à :

$$0 = N_y - 2m\omega\dot{x}' \quad \text{et} \quad 0 = N_z - mg$$

d'où  $N_y = 2m\omega^2 X_0 \sinh \omega t$  et  $N_z = mg$

### III. Référentiel terrestre non galiléen

#### 1 - Gravitation et pesanteur

La pesanteur terrestre est la force qui nous attire vers le sol. Elle résulte de la gravitation terrestre mais inclue aussi la force d'inertie centrifuge liée à la rotation de la Terre en 24h.

Plus précisément, le poids  $\vec{P}$  d'un objet de masse  $m$  est évaluée en utilisant un fil à plomb. Considérons une masse  $m$  suspendue à un fil. Dans le référentiel terrestre ; à l'équilibre

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0},$$

par définition du poids. Ainsi,  $\vec{P} = -\vec{T}$ .

Pour comprendre le lien entre poids et gravité, il faut tenir compte du caractère non galiléen du référentiel terrestre. La masse  $m$  est soumise à la gravitation terrestre, la tension du fil et aux forces d'inerties. À l'équilibre dans le référentiel terrestre, la force de Coriolis est nulle ( $\vec{v}_{\mathcal{R}'} = \vec{0}$ ). La condition d'équilibre dans le référentiel terrestre, non galiléen, s'écrit alors  $\vec{F}_G + \vec{T} + \vec{F}_{ie} = \vec{0}$ .

Ainsi la verticale est donnée par l'orientation de  $\vec{T} = -(\vec{F}_G + \vec{F}_{ie})$  où  $\vec{F}_G$  est la force de gravitation terrestre ( $\vec{F}_G = -\mathcal{G}\frac{M_T m}{R_T^2}\vec{e}_r$ ) et  $\vec{F}_{ie}$  la force d'inertie

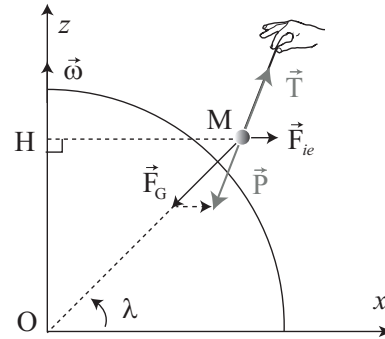


FIGURE 1.8 – Forces exercées sur une masse suspendue à un fil.

d'entraînement par rapport au référentiel géocentrique :

$$\vec{F}_{ie} = m\omega^2\overrightarrow{HM} = m\omega^2 R_T \cos \lambda \vec{e}_x$$

Par identification, on en déduit l'expression du poids

$$\vec{P} = -\vec{T} = \vec{F}_G + \vec{F}_{ie} = -\mathcal{G}\frac{M_T m}{R_T^2}\vec{e}_r + m\omega^2 R_T \cos \lambda \vec{e}_x$$

et, avec la forme  $\vec{P} = m\vec{g}$ , on peut exprimer le champ de pesanteur terrestre

$$\vec{g} = -\mathcal{G}\frac{M_T}{R_T^2}\vec{e}_r + \omega^2 R_T \cos \lambda \vec{e}_x$$

Les écarts seront donc le plus important entre les pôles et l'équateur :

- à l'équateur,  $\vec{e}_r = \vec{e}_x$  et  $\lambda = 0$  d'où  $g = -\mathcal{G}\frac{M_T}{R_T^2} + \omega^2 R_T = 9,794 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  et est dirigé vers le centre terrestre ;
- aux pôles,  $\vec{e}_r = \vec{e}_z$  et  $\lambda = \pi/2$  d'où  $g = -\mathcal{G}\frac{M_T}{R_T^2} = 9,828 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  et est dirigé vers le centre terrestre.

Pour toutes les autres latitudes, le champ de pesanteur n'est pas dirigé vers le centre terrestre et prend des valeurs comprises entre ces deux extrêmes.

#### Remarque 5 :

Dans le référentiel terrestre, dès lors que l'on utilise le poids et non la gravitation terrestre, il est inutile d'introduire la force d'inertie d'entraînement (y compris en tenant compte du caractère non galiléen de ce référentiel). Par contre, pour un objet en mouvement dans le référentiel terrestre, il faut tenir compte de la force de Coriolis (sauf à la négliger si on suppose ce référentiel galiléen).

#### 2 - Forces de marées

Les forces de marées peuvent également s'expliquer comme une conséquence du caractère non galiléen du référentiel géocentrique. Lorsque l'on veut étudier le mouvement de la Terre autour du Soleil, on se place dans le référentiel héliocentrique, supposé galiléen. Le PFD conduit alors à



$$\vec{F}_{S \rightarrow T} = M_T \vec{a}_T$$

où  $\vec{F}_{S \rightarrow T} = -\mathcal{G} \frac{M_S M_T}{R^2} \vec{e}_r$  est la force gravitationnelle exercée par le Soleil sur le centre de la Terre<sup>3</sup>. On en déduit le mouvement elliptique de la Terre autour du Soleil (voir le chapitre ?? sur les mouvements à force centrale).

L'attraction gravitationnelle due au Soleil dépend de la distance au Soleil et n'est donc pas la même en tout point de la surface de la Terre. Par exemple, sur la figure 1.9, la force au point  $M_2$  est plus faible que celle au point  $M_1$  car  $M_2$  est plus éloigné du point S.

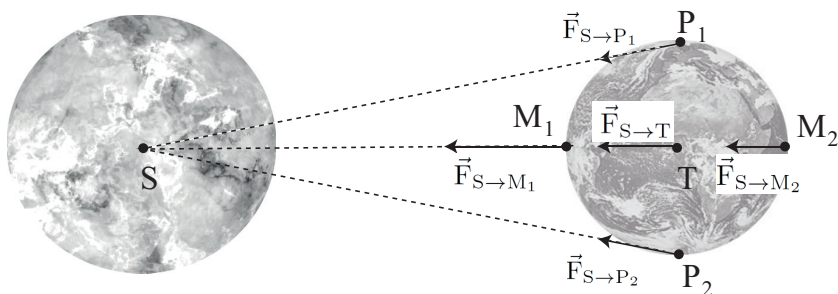


FIGURE 1.9 – Attraction gravitationnelle solaire.

Pour analyser l'effet de la gravitation Solaire sur un point situé à la surface de la Terre, on se place dans le référentiel géocentrique. Il n'est pas galiléen car il est en rotation dans le référentiel héliocentrique. Il faut donc tenir compte de la force d'inertie d'entraînement  $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e = m\omega^2 \vec{ST}$ . Dans le référentiel géocentrique, l'immobilité du point T se traduit par :

$$\vec{0} = \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{S \rightarrow T} \quad \text{soit} \quad \vec{F}_{ie} = -\vec{F}_{S \rightarrow T}$$

Ainsi un point M de la Terre de masse  $m$  subit la force gravitationnelle du Soleil et la force d'inertie centrifuge, la résultante des deux est appelée force de marée<sup>4</sup>.

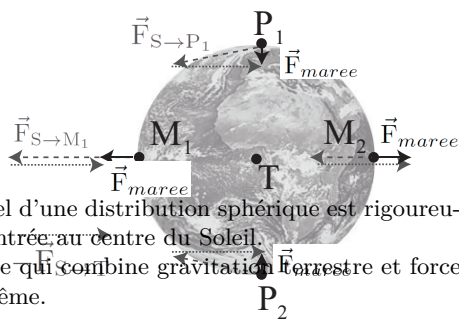


FIGURE 1.10 – Représentation des forces de marée.

$$\vec{F}_{maree} = \vec{F}_{S \rightarrow M} + \vec{F}_{ie} = \vec{F}_{S \rightarrow M} - \vec{F}_{S \rightarrow T}$$

Finalement, la force de marée est la différence entre la force gravitationnelle exercée par le Soleil sur la masse  $m$  à sa position et celle au centre de la Terre. Elle est représentée sur la figure 1.10. Elle est maximale à la surface de la Terre, côté Soleil ( $M_1$ ), vaut l'opposée au point diamétralement opposé ( $M_2$ ). Aux pôles (points  $P_1$  et  $P_2$ ), la force de marée est, en première approximation, une force qui est orientée vers le centre de la Terre.

La force de marée conduit à la formation d'un bourrelet océanique comme représenté sur la figure 1.11. La rotation de la Terre en 24h explique que l'on observe deux marées hautes par jour. Il faut également tenir compte de l'effet de l'attraction lunaire qui est comparable à celle du Soleil (la Lune étant nettement moins massive mais beaucoup plus proche que le Soleil). Les forces de marées sont dues pour environ 2/3 à la Lune et environ 1/3 au Soleil. Un détail des calculs est proposé en annexe II. Les forces de marées sont environ 7 ordres de grandeurs plus faibles que le poids et n'ont donc des effets visibles que sur d'importantes masses.

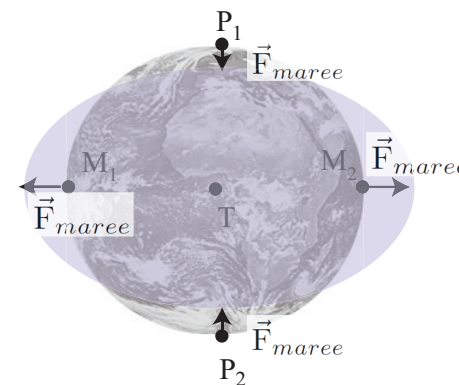


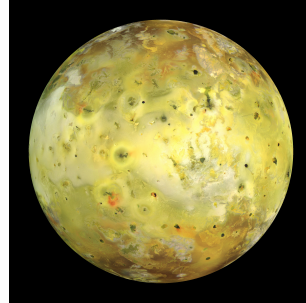
FIGURE 1.11 – Formation d'un bourrelet océanique par force de marée.

3. On peut montrer que le champ gravitationnel d'une distribution sphérique est rigoureusement le même que si toute la masse était concentrée au centre du Soleil.

4. De manière analogue à la pesanteur terrestre qui combine gravitation terrestre et force centrifuge due à la rotation de la Terre sur elle-même.

**Remarque 6 :**

Io, satellite de Jupiter de même taille que la Lune, est couvert de volcans (actifs et inactifs) et de lacs de lave. Cette activité volcanique, absente sur notre Lune, s'explique par la force de marée de Jupiter suffisamment importante pour déformer la surface du satellite. Ci-contre, cliché de Io par la mission Galiléo, d'après NASA, Photo ID : PIA02308.

**3 - Influence de la force de Coriolis**

La pseudo-force d'inertie de Coriolis intervient par exemple dans le sens de rotation des masses d'air à la surface du globe<sup>5</sup>. Pour des systèmes cycloniques, les masses d'air s'enroulent dans le sens des aiguilles d'une montre dans l'hémisphère sud et dans le sens inverse dans l'hémisphère nord. En effet, la force de Coriolis dévie l'écoulement d'air des hautes pressions (HP) vers les basses pressions (BP), vers sa droite dans l'hémisphère nord. Au contraire, l'écoulement vers les basses pressions est dévié vers la gauche (cf. fig. 1.12).

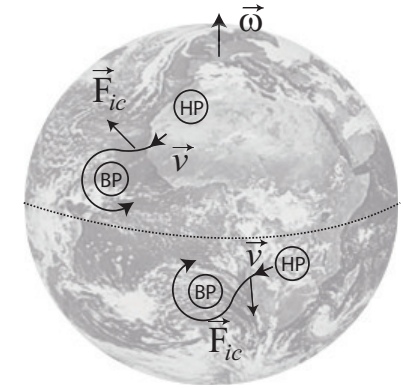


FIGURE 1.12 – Force de Coriolis sur Terre.

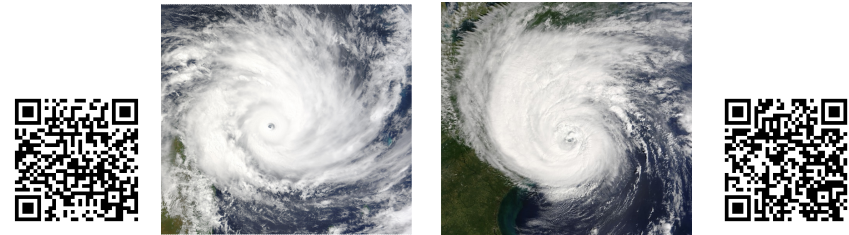
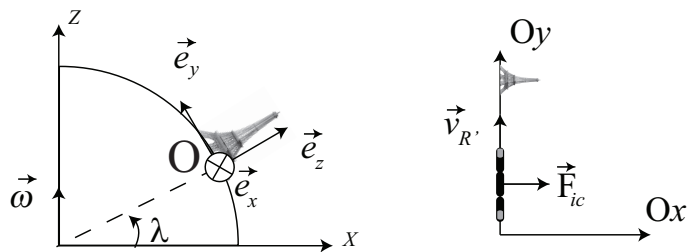


FIGURE 1.13 – Images satellites de cyclones dans l'hémisphère sud (gauche) et nord (droite).

**Exemple 5** Un train à grande vitesse ( $v = 240 \text{ km.h}^{-1}$ ) de masse 380 t circule dans la direction nord-sud à partir d'un lieu de latitude  $\lambda = 48^\circ$ .

5. Une légende urbaine fait intervenir la force de Coriolis pour expliquer la rotation de l'eau lors de son évacuation d'un évier. Cette force est négligeable devant celle de pression induite par une dissymétrie des tuyaux d'écoulement.



Expliciter la force d'inertie de Coriolis dans la base locale  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .  
Commenter.

Dans la base locale, le vecteur rotation a pour coordonnées

$$\vec{\omega} = \omega(\cos \lambda \vec{e}_y + \sin \lambda \vec{e}_z)$$

Le train a pour vitesse dans cette même base  $\vec{v} = v \vec{e}_y$ . On en déduit que la force d'inertie de Coriolis agissant sur le train vaut

$$\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v} = 2m\omega \sin \lambda v \vec{e}_x$$

soit

$$F_{ic} = 2700 \text{ N}$$

Notez que cette force est dirigée vers l'est et que sa norme est une bagatelle comparée au poids ( $380.10^4 \text{ N}$ ). Une légende urbaine veut que les rails soient plus usés du côté est que du côté ouest.

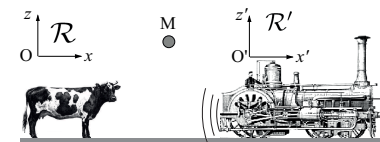
## L'essentiel

Un référentiel est **non galiléen** s'il n'est pas en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen. Dans ces référentiels, le PFD fait apparaître des forces supplémentaires : les forces **d'inertie** :

$$m\vec{a}(M)|_{(\mathcal{R}')} = \vec{F} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c$$

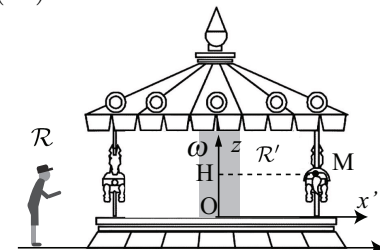
où  $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e$  est la force d'inertie d'entraînement et  $\vec{F}_c = -m\vec{a}_c$  est celle de Coriolis.

**Référentiel en translation** Pour un référentiel non galiléen  $\mathcal{R}'$  en translation accélérée par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  galiléen, avec  $\vec{a}_{\mathcal{R}}(O')$  l'accélération de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . La force d'inertie d'entraînement appliquée en un point M est de la forme



$$\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_{\mathcal{R}}(O')$$

**Référentiel en rotation** Pour un référentiel  $\mathcal{R}'$  est en rotation par rapport à  $\mathcal{R}$  à la vitesse angulaire constante  $\vec{\omega}$ , alors dans  $\mathcal{R}'$  apparaissent deux forces d'inertie définies par :



- la force d'inertie d'entraînement  $\vec{F}_{ie} = m\omega^2 \vec{HM}$  où H est le projeté de M sur l'axe de rotation.
- la force d'inertie de Coriolis :  $\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}$

**Référentiel terrestre** Le référentiel **terrestre** devient **non galiléen** pour quelques phénomènes où l'on peut observer des différences de quelques % sur le champ de pesanteur dû à la force d'inertie d'entraînement ou des déviations de trajectoire perpendiculaire à la vitesse en raison de la force d'inertie de Coriolis.

Les mouvements de la Terre, de la Lune et du Soleil sont responsables du phénomène de marée. La force d'inertie de rotation de la Terre autour

du Soleil, couplée à l'attraction gravitationnelle conduit à l'apparition d'un bourrelet océanique (cf. fig. 1.10).

## I. Dérivation vectorielle

### I1 Formule de Bour

La formule de Bour suivante se démontre en décomposant les vecteurs dans une base fixe :

$$\left(\frac{d\vec{B}}{dt}\right)_{(\mathcal{R})} = \left(\frac{d\vec{B}}{dt}\right)_{(\mathcal{R}')} + \vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \vec{B}$$

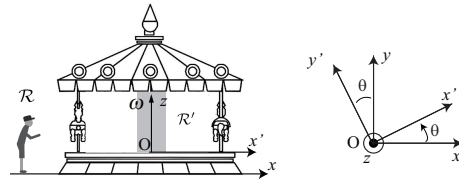


FIGURE 14 – Référentiel en rotation

Considérons la rotation selon l'axe  $Oz$  d'un référentiel  $\mathcal{R}'$  par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}$ . La projection des vecteurs s'écrit :  $\vec{e}_{x'} = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y$  et  $\vec{e}_{y'} = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y$ . Les vecteurs  $\vec{e}_{x'}$  et  $\vec{e}_{y'}$  sont mobiles, ainsi :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} = -\dot{\theta} \sin \theta \vec{e}_x + \dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_y = \dot{\theta} \vec{e}_{y'} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_{x'} \\ \frac{d\vec{e}_{y'}}{dt} = -\dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_x - \dot{\theta} \sin \theta \vec{e}_y = -\dot{\theta} \vec{e}_{x'} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_{y'} \end{cases}$$

Considérons pour simplifier un vecteur  $\vec{B} = B_x(t) \vec{e}_x = B_{x'}(t) \vec{e}_{x'}$ , dans le référentiel tournant, on obtient :

$$\frac{d\vec{B}}{dt}_{\mathcal{R}} = \frac{dB_{x'}(t)}{dt} \vec{e}_{x'} + B_{x'}(t) \frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} = \frac{dB_{x'}(t)}{dt} \vec{e}_{x'} + \dot{\theta} B_{x'}(t) \vec{e}_{y'}$$

En remarquant que  $\vec{e}_z \wedge \vec{e}_{x'} = \vec{e}_{y'}$ , on en déduit que

$$\frac{d\vec{B}}{dt}_{\mathcal{R}} = \frac{dB_{x'}(t)}{dt} \vec{e}_{x'} + \dot{\theta} \vec{e}_z \wedge \vec{B}$$

L'obtention de la formule sur l'autre axe est immédiate et conduit à la formule de Bour donnée en début de paragraphe.

### I2 Composition de l'accélération en rotation

La formule de composition des accélérations s'obtient de la même façon que pour la vitesse en utilisant la formule de Bour :

$$\left(\frac{d\vec{v}(M)_{(\mathcal{R})}}{dt}\right)_{(\mathcal{R}')} = \left(\frac{d\vec{v}(M)_{(\mathcal{R})}}{dt}\right)_{(\mathcal{R}')} + \vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \vec{v}(M)_{(\mathcal{R})}$$

On remplace la vitesse  $\vec{v}(M)_{(\mathcal{R})}$  obtenue précédemment :

$$\begin{aligned} \vec{a}(M)_{(\mathcal{R})} &= \frac{d}{dt} \left( \vec{v}(M)_{(\mathcal{R}')} + \vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \overrightarrow{OM} \right)_{(\mathcal{R}')} \\ &+ \vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \left( \vec{v}(M)_{(\mathcal{R}')} + \vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \overrightarrow{OM} \right) \end{aligned}$$

Le vecteur  $\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})}$  étant constant, on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{a}(M)_{(\mathcal{R})} &= \frac{d}{dt} \left( \vec{v}(M)_{(\mathcal{R}')} \right)_{(\mathcal{R}')} + \vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \frac{d}{dt} \left( \overrightarrow{OM} \right)_{(\mathcal{R}')} \\ &+ \vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \vec{v}(M)_{(\mathcal{R}')} \\ &+ \vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \left( \vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \overrightarrow{OM} \right) \end{aligned}$$

Identifions les différents termes, le premier ci-dessous correspond à l'accélération du point M dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  et le second à la vitesse :

$$\frac{d}{dt} \left( \vec{v}(M)_{(\mathcal{R}')} \right)_{(\mathcal{R}')} = \vec{a}(M)_{(\mathcal{R}')} \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} \left( \overrightarrow{OM} \right)_{(\mathcal{R}')} = \vec{v}(M)_{(\mathcal{R}')}$$

La réécriture de l'accélération fait intervenir trois termes, l'accélération **relative** de M dans  $\mathcal{R}'$ , l'accélération de **Coriolis** et l'accélération dite **d'entraînement**.

$$\vec{a}(M)_{(\mathcal{R})} = \underbrace{\vec{a}(M)_{(\mathcal{R}')}}_{\text{relatif}} + \underbrace{2\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \vec{v}(M)_{(\mathcal{R}')}}_{\text{Coriolis}} + \underbrace{\vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \left( \vec{\omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \overrightarrow{OM} \right)}_{\text{entraînement}}$$

## II. Effet de la Lune

### II1 Problème à deux corps

Une contribution non négligeable des marées est évidemment dû à la Lune. Ces effets ne peuvent être compris si l'on considère que la Lune tourne autour d'une Terre fixe. En annexe ??, nous montrerons que le mouvement doit être décrit rigoureusement en utilisant le repère barycentrique<sup>6</sup>. Dans le cas du système Terre-Lune, l'ensemble des deux tourne autour de leur centre de gravité. En considérant la masse de la Terre ( $m_T = 6,0 \cdot 10^{24}$  kg) et celle de la Lune ( $m_L = 7,3 \cdot 10^{22}$  kg), nous pouvons conclure que le centre de rotation du système est situé à une distance  $TCv = d_{T-L} \times \frac{m_T}{m_L+m_T} = 4,6 \cdot 10^3$  km du centre de la Terre.

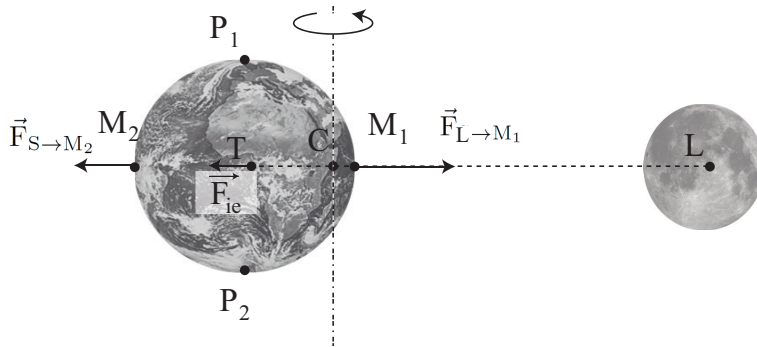


FIGURE 15 – Force de marée due à la Lune et à la rotation

Ainsi le référentiel terrestre, en rotation autour de C est responsable de l'apparition d'une force d'inertie qui se rajoute à la force de la Lune sur la Terre. Sur la figure 20, les points  $M_1$  et  $M_2$  subissent la force d'attraction de la Lune, d'autant plus importante que le point est

6. En effet, le système Terre-Lune se comporte comme une masse réduite placée au barycentre. Si on néglige l'effet de la gravitation du Soleil sur 24h, on peut considérer que le référentiel avec une origine le barycentre Terre-Lune est galiléen et on peut décrire les effets de marée par rapport à ce référentiel.

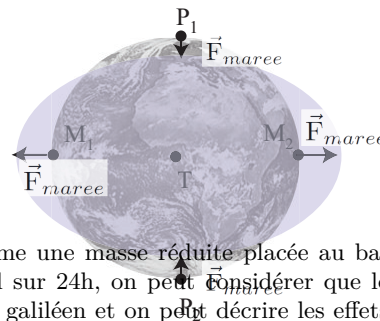


FIGURE 16 – Bourrelet océanique

proche de L, ainsi que la force d'inertie qui est d'autant plus importante que le point est loin du centre de rotation C. La force de marée est alors la somme de ces forces conduisant à la formation d'un bourrelet le long de l'axe Terre-Lune.

### II2 Soleil et Lune

Bien que les masses des astres soient très différentes (masse de la Lune :  $m_L = 7,3 \cdot 10^{22}$  kg et masse du Soleil :  $m_S = 2,0 \cdot 10^{30}$  kg), les contributions aux forces de marées de la Lune et du soleil sont comparables. Prenons le point  $M_1$  situé à la surface de la Terre, ce point est soumis à la force de la Lune, la force du Soleil et la force d'inertie. Pour la force de la Lune, en tenant compte du fait que la force d'inertie correspond à la force d'attraction au point T il vient :

$$F_L = \mathcal{G} \frac{m_T m_L}{LM_1^2} + F_{ie} = \mathcal{G} \frac{m_T m_L}{LM_1^2} - \mathcal{G} \frac{m_T m_L}{LT^2}$$

Comme  $LM_1 = d_{T-L} - R$ , où R est le rayon terrestre, un développement limité conduit à :

$$F_L = \mathcal{G} \frac{m_T m_L}{(d_{T-L} - R)^2} - \mathcal{G} \frac{m_T m_L}{d_{T-L}^2} \sim \mathcal{G} m_T m_L \frac{R}{d_{T-L}^3}$$

Un calcul analogue conduit à la même expression pour la force du soleil :

$$F_S \sim \mathcal{G} m_T m_S \frac{R}{d_{T-S}^3}$$

Du fait de l'éloignement du Soleil par rapport à la terre ( $d_{T-L} = 3,6 \cdot 10^5$  km et  $d_{T-S} = 1,5 \cdot 10^8$  km), la Lune conserve une importance deux fois supérieure à celle du soleil :

$$\frac{F_L}{F_S} = \frac{m_L}{m_S} \frac{d_{T-S}^3}{d_{T-L}^3} \approx 2,5$$

Lorsque le Soleil, la Lune et la Terre sont alignés, les effets du Soleil et de la Lune se cumulent, on parle alors de marées de **vives eaux**. Lorsque les directions Terre-Soleil, et Terre-Lune sont orthogonales, les effets se compensent partiellement, on parle alors de marées de **mortes eaux** (cf. fig. 22).

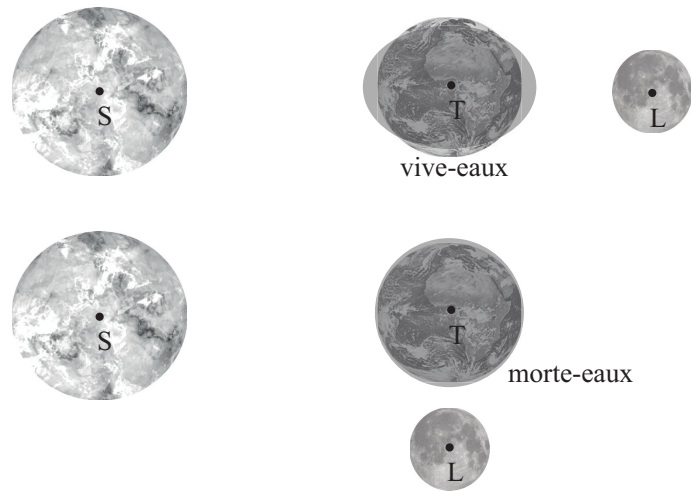


FIGURE 17 – Effet conjoint de la Lune et du Soleil

### **Temporary page!**

$\text{\LaTeX}$  was unable to guess the total number of pages correctly. As there was some unprocessed data that should have been added to the final page this extra page has been added to receive it.

If you rerun the document (without altering it) this surplus page will go away, because  $\text{\LaTeX}$  now knows how many pages to expect for this document.