

Approche énergétique

Le principe fondamental de la dynamique (PFD) permet d'obtenir une équation horaire du mouvement. Souvent, l'étude énergétique simplifie la description et facilite la compréhension. De plus, la conservation de l'énergie totale d'un système isolé est un principe général en physique, particulièrement utile pour décrire et comprendre l'évolution de systèmes complexes. Enfin, la notion de conversion d'énergie permet de comprendre des phénomènes à l'interface de plusieurs domaines scientifiques et est un enjeu sociétal important.



FIGURE 1.1 – Force et déplacement d'un wagon (vue de dessus). Wagon tracté le long des rails a) ou sur le côté b).

I. Puissance et travail d'une force

1 - Travail d'une force

a) Notion de travail

Si on veut déplacer un wagon sur des rails en le poussant, il est plus judicieux d'exercer une force orientée selon les rails que sur le coté (cf. fig. 1.1 a et b).

L'énergie à fournir est d'autant plus grande que la distance à parcourir est élevée et que la force à exercer est importante.

▲ Définition :
 Si la force est uniforme et le trajet rectiligne, le travail de la force pour parcourir la distance $L = AB$ vaut

$$W_{A \rightarrow B} = F \times L = F \times AB$$

Le travail est une énergie et s'exprime en Joule.

🍃 Exemple 1
 On veut lever une charge lourde comme un moteur de masse $m = 200 \text{ kg}$ sur une hauteur $h = 1 \text{ m}$.

1 - Si on le monte directement, il faut exercer une force compensant le poids, donc de magnitude

$F = mg \approx 2 \cdot 10^3$ N. Déterminer le travail nécessaire pour une élévation d'une hauteur h .

2 - En utilisant un palan à 3 brins comme sur la figure ci-contre, l'énergie est la même mais la longueur de corde utilisée est triplée ($d = 3h$). Déterminer la norme de la force F' exercée pour tracter la masse m .

Pour s'entraîner : exercice 1

1 - On exerce un travail donné par $W = F \times h = 2$ kJ.

2 - En tirant sur une longueur $d = 3h$ pour faire monter la masse de la hauteur h , le travail de la force $W = F' \times 3h$. La dépense énergétique est la même mais la force à exercée plus faible : $F \times h = F' \times 3h$ soit :

$$F' = \frac{F}{3} = 6,7 \cdot 10^2 \text{ N}$$

Cela revient à lever un objet d'une masse de $200/3=67$ kg au lieu de 200 kg.

b) Travail infinitésimal

Si on exerce une force de direction quelconque, seule sa composante parallèle au déplacement intervient. Dans l'exemple du wagon sur les rails (cf. fig. 1.1), la composante utile pour le faire avancer est $F_{//} = F \cos \alpha$. Le travail s'écrit alors s'écrit

$$W_{A \rightarrow B} = F_{//} \times AB = F \cos \alpha \times AB = \vec{F} \cdot \vec{AB}$$

Dans le cas général d'une force non uniforme et d'un déplacement non rectiligne, on peut décomposer le mouvement en portions infinitésimales rectilignes $d\vec{l}$ sur lesquelles on peut considérer la force constante. Cela permet de généraliser l'expression du travail.

Définition :

Le travail élémentaire δW de la force \vec{F} pendant la durée infinitésimale dt est donnée par :

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

où $d\vec{l}$ correspond au déplacement orienté de l'objet.

On peut utiliser la forme équivalente $\delta W = \vec{F} \cdot \vec{v}dt$ lorsque l'expression de la vitesse est connue.

Le déplacement élémentaire s'écrit respectivement en coordonnées cartésiennes et cylindriques par ¹

$$d\vec{l} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z$$

En pratique, le déplacement est le plus souvent

- soit orthogonal à la force $\vec{F} \cdot d\vec{l}$. Dans ce cas la force ne travaille pas et le travail est nul.
- soit colinéaire à la force. Il faut alors être vigilant sur le signe du produit scalaire.

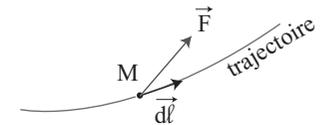


FIGURE 1.2 - Représentation d'un déplacement élémentaire

Définition :

Le travail (exprimé en J) entre les points A et B est obtenu par intégration le long de la trajectoire.

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}.$$

Le travail dépend *a priori* du déplacement de l'objet entre A et B. On dit alors qu'il dépend du « chemin suivi »².

1. On rappelle la définition de l'angle en radian : $\theta = l/r$ où l est la longueur de l'arc et r son rayon. Ainsi, le déplacement infinitésimal selon \vec{e}_θ est $dl = r d\theta$.

2. C'est la raison pour laquelle on note le travail élémentaire δW et non dW qui est la notation différentielle (dont l'intégrale ne dépend que des bornes). Les forces dont le travail ne dépend pas du chemin suivi sont appelées forces conservatives pour des raisons qui apparaîtront plus tard.

Propriété :

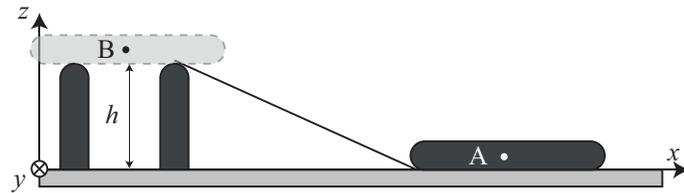
Un travail positif est qualifié de **moteur**. Un travail négatif est qualifié de **résistant**.

Exemple 2

On observe en Bretagne des trilithes réalisés vers 2000 av. J.-C, constitués de deux piliers de 2,0 m de hauteur surmonté d'un bloc. Les archéologues supposent que ce linteau d'une masse de $m = 5,0$ t a été déplacé à partir d'une rampe.



1 - Exprimer le travail du poids pour déplacer la pierre depuis le sol jusqu'au sommet des piliers.



2 - Le travail est il moteur ou résistant? Le travail dépend il de l'inclinaison de la rampe.

3 - Effectuer l'application numérique et estimer le dénivelé équivalent que doit gravir un marcheur de masse $m' = 70$ kg pour avoir la même énergie.

Données : accélération de la pesanteur $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Pour s'entraîner : exercice 1

1 - Considérons le travail du poids \vec{P} sur la pierre de masse m se déplaçant sur la rampe. Dans un repère cartésien, on peut écrire

$$\vec{P} = -mg\vec{u}_z \quad \text{et} \quad d\vec{\ell} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z.$$

où le déplacement infinitésimal $d\vec{\ell}$ est décomposé selon les trois directions dans le repère cartésien. Puis

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = \int_A^B \vec{P} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B -mgdz = -mg(z_B - z_A).$$

On obtient donc : $W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = -mgh$.

2 - Comme $W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) < 0$, le travail est résistant. On constate que le travail du poids ne dépend que des altitudes de départ z_A et d'arrivée z_B , quelque soit le chemin suivi³ (longueur de la rampe, inclinaison...).

3 - Avec les grandeurs numériques : $W = -5 \cdot 10^3 \times 10 \times 2 = -1,0 \cdot 10^5$ J. Pour une même énergie, on doit vérifier :

$$W = -m'gh' = -mgh \quad \text{soit} \quad h' = \frac{m}{m'}h$$

On obtient un dénivelé de : $h' = \frac{5 \cdot 10^3 \times 2}{70} \times 4 = 1,4 \cdot 10^2$ m. Le dénivelé obtenu est comparable la hauteur d'un immeuble de plus de 40 étages.

2 - Puissance d'une force

a) Puissance moyenne

Dans l'exemple précédent, le travail pour déplacer la pierre ne dépend que du point de départ et d'arrivée. Un critère important est aussi le temps mis pour déplacer la pierre. La puissance, énergie par unité de temps, tient compte de l'énergie dépensée et du temps de l'action.

Propriété :

La puissance moyenne d'une force lors d'un déplacement AB, sur une durée Δt est

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{W_{AB}(\vec{F})}{\Delta t}$$

Une puissance s'exprime en Watt (W).

Exemple 3

Lors de l'ascension du Mont Ventoux par un

3. Le poids fait partie des forces dites *conservatives*.



cycliste de masse totale $m = 90,0$ kg, le coureur passe du col du Bédoin (379 m) au le sommet (1912 m). Un amateur confirmé peut faire l'ascension en 1h45 tandis que le record est détenu par Iban Mayo qui a atteint le sommet en 55 minutes et 51 secondes.

- 1 - Évaluer le travail du poids pour lors de la montée.
- 2 - En supposant que le cycliste doivent uniquement compenser le travail du poids (on néglige les frottements), comparer la puissance moyenne d'un amateur au record-man.

Pour s'entraîner : exercice 2

- 1 - Notons A le point le plus bas et B le point le plus haut. Avec un dénivelé de $h = 1533$ m, le travail du poids est donné par :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = \int_A^B \vec{P} \cdot d\vec{l} = \int_A^B -mgdz = -mgh = -1,35 \text{ MJ}$$

- 2 - Le travail fourni par le cycliste est $W = 1,35 \cdot 10^6 \text{ J} = 1,35 \text{ MJ}$ qu'il soit amateur, confirmé ou professionnel. Par contre la puissance fournie dépend du niveau du cycliste. Ainsi, pour un amateur confirmé, la durée vaut $\Delta t = 6300$ s, la puissance est donnée par : $\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{W}{\Delta t} = 214 \text{ W}$. Pour le record, la durée vaut $\Delta t' = 3351$ s, on obtient : $\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{W}{\Delta t'} = 403 \text{ W}$.

Remarque 1 :

Dans les années 2000, l'entraîneur sportif Antoine Vayer s'associe à l'ingénieur Frédéric Portoleau pour effectuer une méthode du calcul indirect de la puissance développée par les cyclistes pour détecter les problèmes de dopage. Leur méthode permet de mettre en évidence les puissances brutalement hors-normes de certains coureurs. Une méthode équivalente pourrait être employée de nos jours pour détecter la présence de moteurs électriques incorporés dans les cadres.



b) Puissance instantanée

La puissance instantanée donne une information sur le débit d'énergie mis en jeu. Plus le travail est effectué sur un temps court, plus la puissance est importante.

Propriété :

La puissance instantanée d'une force lors d'un déplacement $d\ell$, sur une durée dt est

$$\mathcal{P} = \frac{\delta W}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Une puissance s'exprime en Watt (W).

De même que pour le travail, si la puissance est positive, elle est dite motrice. Afin de fixer des repères d'ordre de grandeur, une voiture développe une puissance de 15 kW environ pour rouler à la vitesse constante de $90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ et 60 kW lors d'une accélération.

Un cycliste amateur peut fournir une puissance de 200 W sur une durée d'une heure environ pour maintenir sur du plat une vitesse de $30 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Il est néanmoins possible de délivrer jusqu'à 1 kW sur une courte période pour gravir une petite côte. Le cycliste Robert Förstemann (champion du monde de sprint, médaillé de bronze olympique) s'est prêté au jeu d'alimenter un grille pain pour démontrer l'effort à fournir (cf. fig. 1.3). Il faut toute sa puissance pour griller une tranche !



FIGURE 1.3 – Robert Förstemann en action pour alimenter un grille pain.

II. De l'étude dynamique au bilan énergétique

1 - Différentes formes d'énergie

Prenons l'exemple d'une balle rebondissante lâchée d'une hauteur h , sans vitesse initiale (cf. fig. 1.4). Dans le cas idéal (absence de frottement, rebond parfaitement élastique), après un rebond sur le sol, elle remontera à la même hauteur h . Au cours de la chute libre, la balle accélère sous l'effet de la pesanteur (qui provoque la chute, travail moteur). On définit son énergie cinétique par $E_C = 1/2 mv^2$, cette grandeur d'abord nulle (vitesse initiale nulle) augmente et est maximale juste avant de toucher le sol. Après le rebond, la balle remonte mais sa vitesse diminue sous l'effet de la pesanteur (qui s'oppose au mouvement, travail résistant) et s'annule lorsqu'elle est revenue à sa position initiale. On voit ainsi que l'énergie cinétique de la balle oscille entre une valeur nulle (hauteur maximale, vitesse nulle) et une valeur maximale (juste avant le contact avec le sol, vitesse maximale).

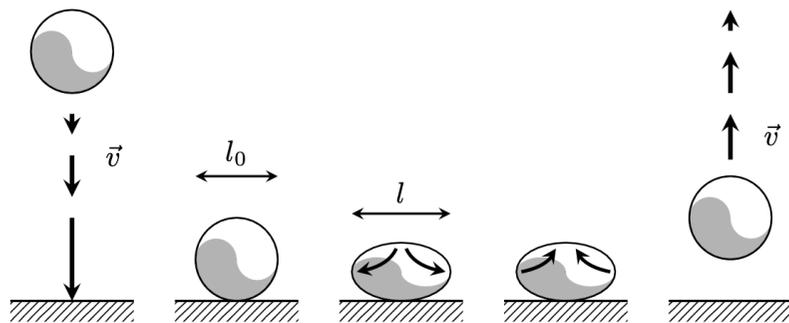


FIGURE 1.4 – Évolution d'une balle rebondissante. i) Chute avec accélération. ii) Choc sur le sol. La balle a une vitesse maximale dirigée vers le bas. iii) et iv) Déformation de la balle au cours du rebond. v) La balle remonte avec une vitesse dirigée vers le haut et décélère.

Il est donc intuitif de définir une sorte de réservoir d'énergie qui va être restituée à la balle lors de sa chute. Il s'agit de l'énergie potentielle. Dans le

cas présent, la chute de la balle est due à l'action de la pesanteur terrestre et on parle donc d'énergie potentielle de pesanteur. L'énergie totale de la balle (conservée dans le cas présent) est appelée **énergie mécanique**.

▲ Définition :

On appelle énergie mécanique d'un système la somme de ses énergies potentielle et cinétique.

$$E_M = E_C + E_P$$

où l'énergie cinétique s'exprime par $E_C = \frac{1}{2}mv^2$. Toutes ces énergies s'expriment en Joule (J). Quelques ordres de grandeur sont disponibles dans le tableau 1.1.

Exemple	Énergie cinétique
balle de tennis (58 g) - service à $200 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$	90 J
athlète de 80 kg courant à $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	$4,0 \cdot 10^3 \text{ J} = 4,0 \text{ kJ}$
voiture (1 tonne) roulant à $90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$	$3 \cdot 10^6 \text{ J} = 3 \text{ MJ}$.
Exemple	Énergie potentielle
balle de tennis (58 g) à 1 m du sol	0,6 J
adulte de 75 kg au sommet d'une falaise de 100 m	74 kJ

TABLE 1.1 – Ordre de grandeur d'énergies usuelles.

L'expression de l'énergie potentielle dépend des forces auxquelles est soumis l'objet (énergie potentielle de pesanteur dans un champ de pesanteur, élastique en présence d'un ressort, ...). Nous en donnerons une définition précise plus loin (cf. p. 9) mais nous pouvons évoquer deux cas importants.

Énergie potentielle de pesanteur Pour amener la balle à une hauteur h , il a fallu compenser le travail de la force de pesanteur ($W = -mgh$). C'est cette énergie $E_{p,pes} = -W = +mgh$ qui est stockée sous forme d'énergie potentielle de pesanteur.

Énergie potentielle élastique La description du rebond sur le sol nécessite une attention toute particulière (voir la fig. 1.4)

- Juste avant le choc, la vitesse de la balle est maximale, dirigée vers le bas.
- Au moment du choc, la vitesse de la balle est nulle.
- Juste après le choc, la vitesse de la balle est maximale, dirigée vers le haut.

Ainsi, au moment du choc, l'énergie cinétique de la balle est nulle, de même que son énergie potentielle de pesanteur. Il est donc utile de définir une autre énergie potentielle expliquant la restitution de l'énergie cinétique au cours du choc. C'est l'élasticité de la balle qui est à son origine. En effet, lors du choc, la balle va s'écraser puis retrouver son aspect initial avant de remonter. L'énergie potentielle mise en jeu lors de cette déformation est appelée énergie potentielle élastique⁴.

i Remarque 2 :

Le choc parfaitement élastique est un cas idéalisé. En réalité, la balle rebondit de moins en moins haut et son énergie mécanique n'est donc pas conservée au cours des rebonds successifs. Celle-ci diminue sous l'effet de différentes forces de frottement : entre la balle et l'air, entre la balle et le sol ou internes à la balle lors de sa déformation pendant le choc. Ces forces qui s'opposent au mouvement sont dites dissipatives. En étudiant attentivement l'évolution de la balle, on observe que celle-ci s'échauffe légèrement. Ce phénomène est relié au mouvement des molécules de gaz dans la balle (agitation thermique). La diminution de l'énergie mécanique à l'échelle macroscopique correspond ainsi à un transfert d'énergie à l'échelle microscopique. Cette forme d'énergie est appelée énergie interne, notée U . Finalement, la conservation de l'énergie sous la forme $E_C + E_P + U = C^{\text{te}}$ nécessite une description microscopique qui dépasse le cadre de ce cours.

Par contre, en mécanique, une description macroscopique est suffisante et on étudie l'évolution de l'énergie mécanique uniquement. On considère alors que l'énergie mécanique peut diminuer sans préciser ce que devient l'énergie perdue (généralement transformée en chaleur).

4. En première approximation, on peut modéliser l'élasticité d'un matériau en considérant un ressort de constante de raideur k . L'énergie potentielle élastique est $E_{p,el} = 1/2k(l - l_0)^2$ où $l - l_0$ est l'amplitude de la déformation (cf. fig. 1.4).

2 - Théorème de l'énergie cinétique

a) Énoncé

Nous avons évoqué que la composante de la force parallèle au mouvement est responsable de sa variation de vitesse et donc d'énergie cinétique. Le théorème de l'énergie cinétique relie le travail de la force avec la variation d'énergie cinétique.

▲ Définition :

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'une masse ponctuelle soumise à des forces F_i vérifie

$$E_C(B) - E_C(A) = \sum_i W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_i)$$

où A et B sont deux points de sa trajectoire^a.

^a. Attention à l'ordre : la variation de l'énergie cinétique est donnée par l'énergie cinétique finale moins l'énergie cinétique initiale et les travaux s'expriment pour aller du point initial jusqu'au point final.

Ce théorème est une conséquence directe du PFD (cf annexe ??). Par conséquent, il n'apporte pas d'information supplémentaire. Au contraire, il conduit à une perte d'information puisque l'on passe d'une information vectorielle avec le PFD à une information scalaire sur l'énergie. C'est justement l'intérêt de l'approche énergétique de ne conserver que l'information pertinente sur l'évolution de la vitesse. Un autre intérêt est d'introduire le concept d'énergie et donc de pouvoir faire des liens avec des phénomènes très différents (conversion d'énergie électrique en énergie cinétique dans une voiture électrique par exemple).

🍃 Exemple 4

Au curling, le palet glisse sur la glace avec une force de frottement de la forme $\vec{f} = -\mu mg\vec{u}$ où \vec{u} est un vecteur unitaire indiquant le sens du mouvement et $\mu = 5,00 \cdot 10^{-3}$ le coefficient de frottement. Le palet est lancé d'un



point A avec une vitesse V_0 et doit s'arrêter dans la zone adverse (point B) située entre $d_{min} = 40,0\text{ m}$ et $d_{max} = 42,0\text{ m}$.

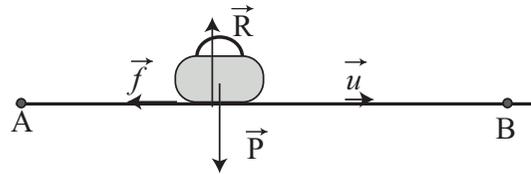
- 1 - Représenter un schéma avec le palet et les forces associées.
- 2 - Exprimer le travail de chacune des forces en fonction de m , g , μ et $d = AB$.
- 3 - Calculer l'écart relatif de vitesse pour que le palet soit dans la zone adverse.

Données : $g = 9,81\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Pour s'entraîner : exercice 1

1 - Le palet est soumis à

- son poids \vec{P} ,
- la réaction du support \vec{R}
- la force de frottement \vec{f} .



On attend la figure ci-contre.

2 - On remarque que la réaction du support et le poids sont perpendiculaires au déplacement : $\vec{R} \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{P} \cdot \vec{u} = 0$. On en déduit que le travail de ces forces est nul :

$$W_{AB}(\vec{R}) = \int_A^B \vec{R} \cdot d\vec{u} = 0$$

De même : $W_{AB}(\vec{P}) = 0$. La force de frottement est opposé au mouvement, il vient :

$$W_{AB}(\vec{f}) = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{u} = -\mu mgd$$

3 - Dans le référentiel galiléen associé au sol, l'application du théorème de l'énergie cinétique donne :

$$E_C(B) - E_C(A) = W_{A \rightarrow B}(\vec{f}) + W_{A \rightarrow B}(\vec{R}) + W_{A \rightarrow B}(\vec{P})$$

Au point B la vitesse est nulle, l'équation précédente devient :

$$-\frac{1}{2}mV_0^2 = -\mu mgd \quad \text{soit} \quad V_0 = \sqrt{2\mu gd}$$

Avec les valeurs indiquées, les vitesses correspondantes sont :

$$V_{min} = \sqrt{2\mu gd_{min}} = 1,98\text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad V_{max} = \sqrt{2\mu gd_{max}} = 2,03\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

On en déduit que l'écart relatif vaut :

$$e = \frac{V_{max} - V_{min}}{V_{max}} = 2,5\%$$

Cet écart très faible montre la grande précision des joueurs de curling.

Remarque 3 :

Le curling, discipline inscrite aux jeux olympiques d'hiver, nécessite une grande dextérité pour lancer le palet. Au Canada, de nombreux scientifiques se sont intéressés au frottement de la glace sur le palet (cf. fig. 1.5) et à l'influence de la rotation du palet pour expliquer son mouvement latéral dépendant de nombreux paramètres. Que ce soit expérimentalement ou théoriquement, le mouvement du palet a lancé de nombreuses réflexions scientifiques.

b) Théorème de la puissance cinétique

Le théorème de la puissance cinétique est une variante qui peut être utile pour trouver une évolution temporelle de la vitesse.

Définition :

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'une masse ponctuelle soumise à des forces \vec{F}_i vérifie

$$\frac{dE_C}{dt} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_i)$$

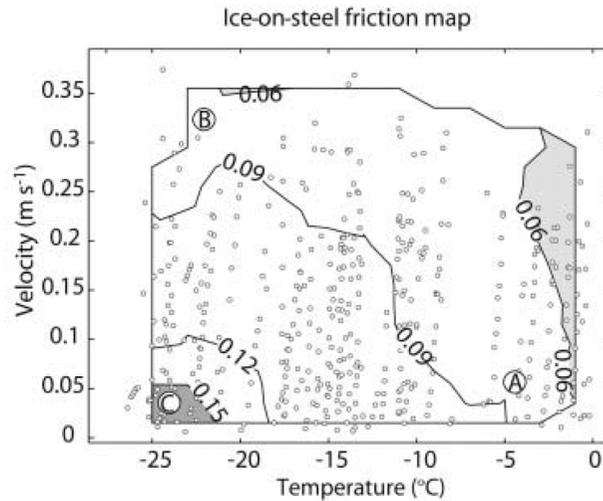
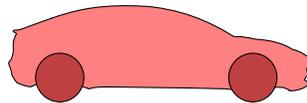


FIGURE 1.5 – Coefficient de frottement acier/glace en fonction de la vitesse et de la température, *inspiré de Ice friction, wear features and their dependence on sliding velocity and temperature, J. of Glaciology, 2017*.

Ce théorème permet de montrer qu'une vitesse est constante si les forces ne travaillent pas ou établir l'évolution temporelle de la vitesse (voir exemple ci-dessous).

Exemple 5

Un constructeur automobile annonce en 2022 que sa voiture électrique développe une puissance maximale de 1000 ch soit 750 kW environ et peut passer de 0 à 100 km/h en 2,1 s.



On modélisera la voiture par un point matériel de masse $m = 2250$ kg initialement immobile dont la puissance \mathcal{P} du moteur est intégralement utilisé pour déplacer horizontalement le véhicule, tous les frottements seront négligés.

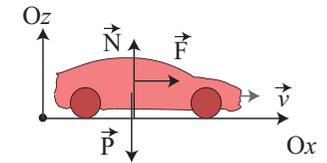
1 - Déterminer l'équation horaire de la vitesse $v(t)$ en fonction de m et \mathcal{P}

2 - En déduire le temps nécessaire pour passer de 0 à 100 km/h. Proposer des explications pour justifier l'écart par rapport aux données constructeur.

Pour s'entraîner : exercice 6

1 - Sur un sol horizontal servant de référentiel galiléen, la voiture assimilée à un point matériel est soumise à :

- son poids : $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$;
- la réaction du support $\vec{N} = N\vec{e}_z$;
- la force du moteur \vec{F} de puissance \mathcal{P} .



Le théorème de la puissance cinétique donne alors :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \vec{P} \cdot \vec{v} + \vec{N} \cdot \vec{v} + \mathcal{P}$$

Comme la route est horizontale, $\vec{P} \cdot \vec{v} = \vec{N} \cdot \vec{v} = 0$, il reste :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \mathcal{P}$$

Par intégration entre l'état initial ($t = 0, v = 0$) et un état courant (t, v) on obtient :

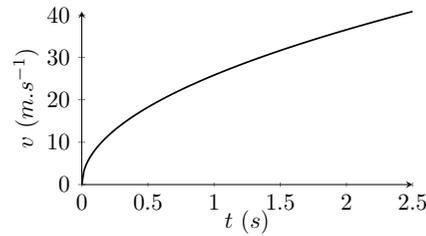


FIGURE 1.6 – Évolution temporelle de la vitesse, départ arrêté.

$$\frac{1}{2} m v^2 = \mathcal{P} t \quad \text{soit} \quad v(t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{P}}{m} t}$$

2 - En utilisant l'équation précédente, on en déduit que le temps nécessaire pour passer de 0 à 100 km/h soit $28,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ est :

$$t = \frac{m v^2}{2\mathcal{P}} = 1,35 \text{ s}$$

Le temps est largement inférieur à celui annoncé car les frottements ont été négligés et la puissance n'est pas intégralement disponible pendant toute la phase d'accélération.

III. Énergie potentielle

1 - Travail d'une force

Par définition⁵, toute force perpendiculaire au déplacement ne travaille pas. C'est le cas notamment de la réaction du support (en absence de frottement) \vec{R} ou de la tension du fil \vec{T} dans un pendule simple.

Lorsque le travail est non nul, il faut dépenser de l'énergie pour amener l'objet à une position donnée. Si ce travail W ne dépend pas du chemin suivi, c'est-à-dire que le travail ne dépend que de l'état initial et de l'état final (la

5. Pour une force perpendiculaire au déplacement, le produit scalaire $\vec{F} \cdot d\vec{\ell} = 0$, ou plus physiquement, parce qu'une force perpendiculaire au déplacement, ne participe pas à la mise en mouvement.

force est alors dite **conservative**), on peut lui associer une énergie potentielle qui correspond à l'énergie que l'on a fournie à l'objet ($E_p = -W$). On oppose aux forces conservatives, les forces dites **dissipatives** comme les frottements.



Propriété :

Les forces dont le travail ne dépend pas de du chemin suivi sont dites **conservatives**.



Définition :

L'énergie potentielle d'une force **conservative** \vec{F} est définie par

- une valeur nulle en un point origine O choisi arbitrairement

$$E_p(O) = 0$$

- l'opposé du travail de la force menant de O à M :

$$E_p(M) = -W_{O \rightarrow M}(\vec{F})$$

L'énergie potentielle étant écrite à partir du travail d'une force entre deux points, elle est définie « à une constante près ». En général, on impose un point de référence O pour lequel l'énergie potentielle est nul. Ce point est généralement choisi de façon la plus simple possible et dépend donc du problème étudié.



Remarque 4 :

Lorsque on veut discuter l'énergie potentielle d'un objet soumis à plusieurs forces, il est judicieux de choisir la même origine comme référence de chaque énergie potentielle.

2 - Énergies potentielles usuelles

a) Énergie potentielle de pesanteur

Nous avons établi l'expression du travail du poids pour déplacer une masse m d'une altitude z_A à une altitude z_B :

$$W_{AB}(\vec{P}) = -mg(z_B - z_A)$$

En prenant l'origine de l'énergie potentielle au sol ($z = 0$), nous obtenons immédiatement l'énergie potentielle de pesanteur d'un point M d'altitude z :

$$E_P(M) = -W_{O \rightarrow M}(\vec{P}) = mg(z - z_O) = mgz$$

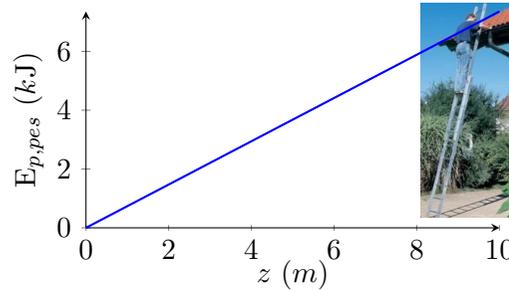


FIGURE 1.7 – $E_{p,pes}$ d'un adulte de 75 kg montant une échelle de 10 m.

Considérons un ressort de constante de raideur k , et longueur à vide ℓ_0 . La force de rappel s'écrit

$$\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_\ell$$

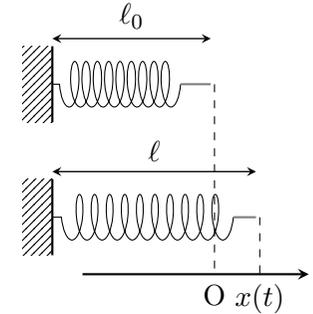
où ℓ est la longueur du ressort et \vec{e}_ℓ un vecteur unitaire orienté dans le sens de l'allongement.

On choisit l'origine de l'énergie potentielle en $\ell = \ell_0$, lorsque l'objet est au repos, de sorte que l'énergie potentielle s'obtienne facilement par intégration. En effet,

$$E_{P,el}(M) = - \int_O^M \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = + \int_O^M k(\ell - \ell_0)d\ell = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$$

Posons $x = \ell - \ell_0$, l'intégrale précédente devient :

$$E_P(M) = \int_O^M kx dx = \frac{1}{2}kx^2$$



◆ Définition :

L'énergie potentielle de pesanteur est définie par :

$$E_{p,pes} = mgz$$

où Oz est un axe ascendant.

L'énergie potentielle de pesanteur ainsi définie n'est valable que pour des déplacements restreints. En effet, le calcul suppose que l'accélération de la pesanteur \vec{g} est constant le long du chemin d'intégration. Or la gravité est différente entre différents points du globe et décroît en fonction de l'altitude (cf. chap. ??). On retiendra que l'expression proposée est valable si le déplacement, tant en hauteur qu'horizontalement, est très inférieur au rayon terrestre ($R_T = 6400$ km). Cette hypothèse est largement vérifiée dans la plupart des cas usuels, dans le cas contraire, un calcul avec la force de gravitation est nécessaire (cf. annexe ??).

b) Énergie potentielle élastique

◆ Définition :

L'énergie potentielle élastique associée à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 s'écrit

$$E_{P,el}(M) = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$$

L'énergie potentielle élastique représentée ci-contre (cf. 1.8) est de forme parabolique. L'expression obtenue est valide sous réserve que la déformation du ressort soit « élastique », c'est-à-dire que le ressort une fois relâché doit revenir à sa longueur à vide. Si l'étirement est trop important, la structure interne du ressort est déformée et la longueur à vide est allongée.

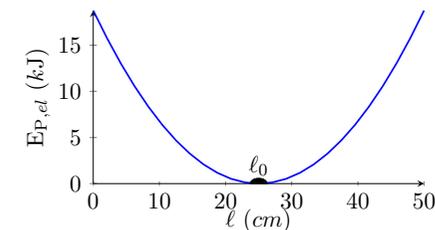


FIGURE 1.8 – Énergie potentielle élastique d'un amortisseur de voiture ($k = 6 \cdot 10^5$ N·m⁻¹, $\ell_0 = 25$ cm).

Exemple 6

Une sauterelle adulte de masse $m = 5,0\text{ g}$ est capable d'atteindre une hauteur de $1,0\text{ m}$ depuis le sol.

1 - Déterminer le gain d'énergie potentielle de pesanteur.

2 - En supposant que cette énergie est stockée initialement dans les pattes de l'animal, assimilées à un ressort, déterminer sa constante de raideur k sachant que la compression est voisine de 2 mm .

Données : $g = 10\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.



Pour s'entraîner : exercices 4, ??

1 - Par convention, l'énergie potentielle de pesanteur est nulle au niveau du sol. Au sommet de sa trajectoire, la sauterelle possède une énergie potentielle de

$$E_{P, pes} = mgh = 5 \cdot 10^{-3} \times 10 \times 1 = 50\text{ mJ}$$

2 - L'énergie élastique est définie par :

$$E_{P, el} = \frac{1}{2} kx^2$$

où x est l'élongation du ressort. Avec $x = 2\text{ mm}$, en égalant les énergies potentielles, la constante de raideur du ressort vérifie

$$\frac{1}{2} kx^2 = mgh \quad \text{soit} \quad k = \frac{2E_{P, pes}}{x^2} = 2 \cdot 10^4\text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

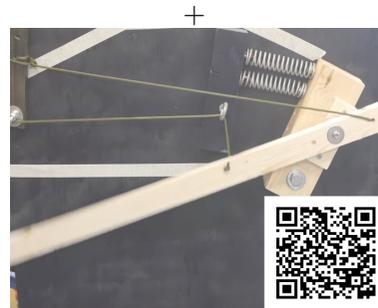


FIGURE 1.9 - Mécanisme d'une patte de sauterelle

Cette constante de raideur est du même ordre de grandeur que les ressorts de moto !

Remarque 5 :

Les petits robots éprouvent habituellement des problèmes insurmontables lorsque la rugosité d'un terrain augmente significativement. Des chercheurs de l'EPFL ont mis au point des mini-robots capables de sauter puis de planer à la manière des sauterelles. Ces robots pourraient être utilisés comme engin de reconnaissance après des catastrophes naturelles. Plus récemment à Berkeley, des chercheurs tentent de télécommander ce type de robot. D'après *A Vidyasagar et al, 2015, Bioinspir. Biomim.*, 10 025006, sous licence Creative Commons 3.0, DOI 10.1088/1748-3190/10/2/025006.



3 - Théorème de l'énergie mécanique

a) Énoncé

Nous avons établi le théorème de l'énergie cinétique (§2 -) :

$$\Delta E_C = E_C(B) - E_C(A) = \sum_i W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_i)$$

Bien évidemment, les forces ne travaillant pas n'interviennent pas. Il reste finalement les forces conservatives auxquelles on peut associer une énergie potentielle et les forces dissipatives :

$$E_C(B) - E_C(A) = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{conservatives}) + \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{dissipatives})$$

De plus, par définition de l'énergie potentielle; $\sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{conservatives}) = -\Delta E_P$ où ΔE_P est la variation de l'énergie potentielle du système étudié. Ainsi, on fait directement apparaître la variation de l'énergie mécanique du système :

$$E_C(B) - E_C(A) = -[E_P(B) - E_P(A)] + \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{dissipatives})$$

pour obtenir le théorème de l'énergie mécanique :

$$\Delta E_M = E_M(B) - E_M(A) = \Delta E_C + \Delta E_P = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{dissipatives})$$

Pour s'entraîner : exercices 3, 4, 7, ??

Propriété :

Dans un référentiel galiléen, l'énergie mécanique d'un système matériel soumis à des forces conservatives et dissipatives vérifie :

$$\Delta E_M = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{dissipatives})$$

Finalement, en l'absence de force dissipatives (comme les frottements), l'énergie mécanique est conservée (**système conservatif**). Au contraire, si l'objet est soumis à l'action de forces dissipatives, son énergie mécanique diminue (car le travail des forces dissipatives est toujours négatif). L'énergie perdue est généralement perdue sous forme d'échange de chaleur avec le milieu extérieur.

b) Système conservatif

Définition :

Un système est dit **conservatif** si il n'est soumis qu'à des forces conservatives (dérivant donc d'une énergie potentielle) ou qui ne travaillent pas. Alors, son énergie mécanique est conservée au cours du mouvement :

$$E_M = Cte$$

Exemple 7

Sur un tremplin de vol à ski, le skieur s'élance du haut d'un tremplin d'une hauteur de 88,0 m.

1 - Déterminer la vitesse V_0 à l'extrémité de la piste.

2 - La vitesse dépend-elle de la forme ou la longueur de la piste ?

3 - En réalité, la vitesse des athlètes ne dépasse pas les $120 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, proposer une explication.

Données : $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$



1 - En négligeant les forces non conservatives, nous pouvons supposer l'énergie mécanique conservée :

$$E_M = \frac{1}{2}mv^2 + mgz = Cte$$

Notons A l'état de départ ($z = h, v = 0$) et B l'état à l'extrémité de la piste ($z = 0, v = V_0$), nous obtenons :

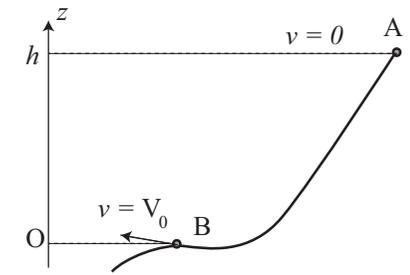
$$E_M(A) = E_M(B) \text{ soit } \frac{1}{2}m0^2 + mgh = \frac{1}{2}mV_0^2 + mg \times 0$$

On obtient alors :

$$V_0 = \sqrt{2gh} = 41,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

2 - La vitesse obtenue est indépendante de la taille ou de la forme de la piste. En revanche, les frottements ayant été négligées, plus la piste est longue plus les frottements auront un impact sur la vitesse.

3 - Convertissons la vitesse en km/h : $V_0 = 41,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 150 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. La vitesse réelle est inférieure car les frottements ont été négligés.



Remarque 6 :

La forme et les inclinaisons des tremplins sont règlementées par la fédération internationale de ski. On peut retrouver les préconisation de constructions sur la réglementation des sauts à skis (cf fig. 1.10).

c) Forces dissipatives

Les forces dissipatives les plus courantes sont la force de frottement fluide et la force de frottement solide (cf. chap. ?? et chap. ??). Considérons une masse m soumis en particulier à une force de frottement fluide $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$. Le travail de cette force pour aller d'un point A à un point B s'écrit

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{f}) = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{l} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{f} \cdot \vec{v} dt = \int_{t_A}^{t_B} -\alpha\vec{v} \cdot \vec{v} dt = - \int_{t_A}^{t_B} \alpha v^2 dt$$

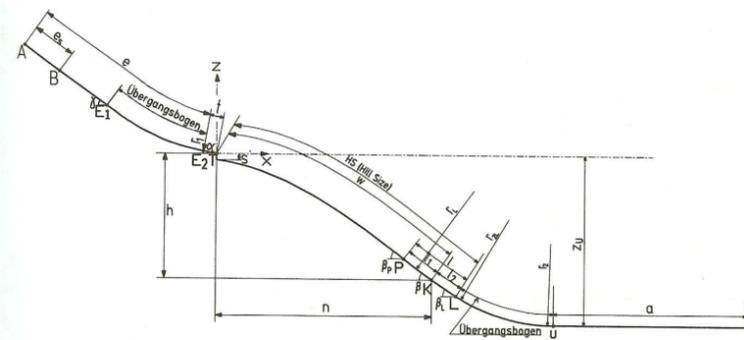


FIGURE 1.10 – Caractéristiques géométriques d'un tremplin de saut à ski, tiré du règlement de la fédération française de saut à ski (d'après <http://www.ffs.fr/pdf/reglements/REGSAUTCN/FFSreg-sautcn4b.pdf>.)

Il est important de remarquer que le travail de cette force est toujours résistant ($W_{A \rightarrow B}(\vec{f}_f) < 0$), car la force de frottement s'oppose toujours au mouvement. De plus, le travail de cette force dépend du chemin suivi (dépend de la vitesse le long du chemin). En effet, l'intégrant (v^2) est strictement positif donc l'intégrale augmente avec le parcours. On obtient les mêmes constatations avec une force de frottement solide $R_T = \mu mg$ opposée au déplacement. Alors le travail de cette force entre A et B s'écrit $W_{A \rightarrow B}(\vec{R}_T) = -mgAB < 0$.

Propriété :

Les forces (dont le travail est toujours résistant et dépend du chemin suivi) sont appelées **forces dissipatives** car elles sont associées à une déperdition d'énergie. Ces forces ne dérivent pas d'une énergie potentielle et sont responsables de la perte d'énergie du système comme nous le discuterons dans le cadre du théorème de l'énergie mécanique.

4 - Diagramme d'énergie potentielle

a) Lecture du diagramme

▲ Définition :

Le diagramme d'énergie potentielle est la représentation de la fonction $E_P = f(X)$ où X est une coordonnée spatiale associée au mouvement.

Le diagramme d'énergie potentielle permet une lecture très intuitive du mouvement d'un objet par analogie avec une bille dans une cuvette d'équation $z = f(x)$. En effet, dans ce cas, l'énergie potentielle de pesanteur a la forme de la cuvette puisqu'elle est proportionnelle à l'altitude ($E_{p,pes} = mgz$, cf. fig. 1.11).

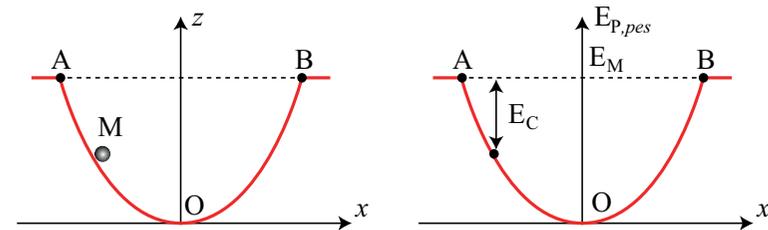


FIGURE 1.11 – Forme de la cuvette. Altitude en fonction de la position (gauche). Énergie potentielle de la bille en fonction de sa position (droite).

On lâche la bille du point A, sans vitesse initiale. En l'absence de frottement, elle va dévaler la pente en accélérant jusqu'au fond de la cuvette O, puis remonter vers B en décélérant. Elle redescend en sens inverse vers O puis A, et ainsi de suite. Elle va donc osciller indéfiniment. Le diagramme permet aussi de discuter le mouvement d'un point de vue énergétique. Au point A, l'énergie mécanique vaut $E_M = E_C(A) + E_P(A) = mgh$ car il n'y a pas de vitesse initiale. Le système est conservatif puisqu'il n'y a pas de frottements donc $E_M = C^{te} = mgh$, représenté par la ligne horizontale en pointillés sur la figure 1.11. Lorsque la bille dévale la pente son énergie potentielle est donnée par la courbe et son énergie cinétique $E_C = mgh - E_P$ est donnée par la distance entre la courbe de E_P et la ligne E_M . L'énergie cinétique augmente jusqu'en O où elle est maximale ($E_P = 0$ donc $E_C = E_M = mgh$). Entre O et B, l'énergie potentielle augmente

et l'énergie cinétique diminue. En B, on se retrouve dans une situation analogue à celle en A avec une vitesse nulle. Ainsi, on lit directement que le mouvement d'oscillations de la bille dans la cuvette correspond à des échanges d'énergie entre énergie potentielle et énergie cinétique.

Remarque 7 :

L'ensemble de ces raisonnements est applicable pour les différentes formes d'énergie potentielle. La figure 1.12 représente le diagramme d'énergie potentielle d'une protéine chaperonne (énergie potentielle d'origine électrostatique principalement). Cette protéine est surexprimée en cas de cancer. Les différentes formes (repliées, ouvertes, ...) apparaissent sur la figure. Le passage d'une forme à l'autre se fait par le chemin de plus grande "pente" le long du diagramme d'énergie potentielle, en analogie directe avec la cuvette d'énergie potentielle de pesanteur.

b) Information sur la trajectoire

En fonction de la forme de l'énergie potentielle, on distingue deux types de situations. Imaginons une cuvette ayant la forme suivante (cf. fig. 1.13).

Il apparaît alors deux cas distincts en fonction de la valeur de l'énergie mécanique :

- si l'énergie mécanique est plus petite que la valeur de l'énergie potentielle au point B, alors la bille va rester dans la cuvette (fig. 1.13 gauche). Cela se produit par exemple si on lâche la bille d'un point intérieur de la cuvette sans vitesse initiale (point A). Les états dans les zones grisées sont inaccessibles.
- Si l'énergie mécanique est plus grande que $E_P(C)$, alors la bille va s'échapper de la cuvette (fig. 1.13 droite). Cela se produit dès que l'altitude de C est plus basse que celle de A. En C l'énergie cinétique est non nulle.

Selon la valeur de l'énergie mécanique, le mouvement peut être limité à un domaine spatial restreint ou au contraire être illimité. La différence de comportement entre ces deux cas conduit à définir deux types d'état pour un système.

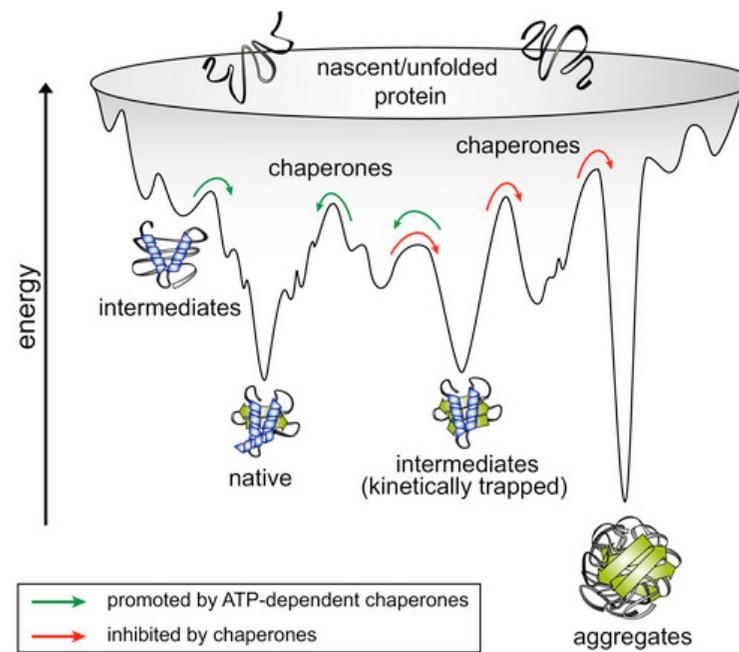


FIGURE 1.12 – Représentation des différents formes de la protéine chaperonne, d'après *Recent advances in understanding catalysis of protein folding by molecular chaperones, FEBS Letters, (2020)*.

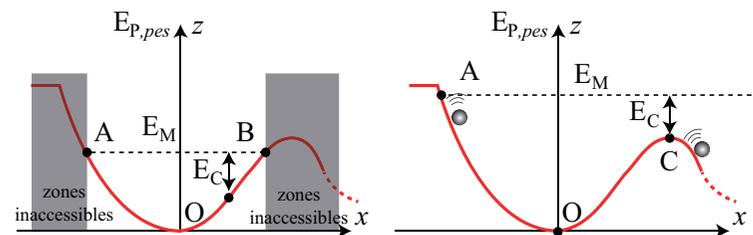


FIGURE 1.13 – Comparaison de l'énergie mécanique et énergie potentielle

Définition :

- Lorsque l'énergie mécanique du système est inférieure à l'énergie potentielle d'un col, le système est dans un **état lié**. Le mouvement est borné.
- Lorsque l'énergie mécanique du système est supérieure à l'énergie potentielle, le système est dans un **état libre (ou de diffusion)**. Le mouvement est alors non borné.

c) Information sur la stabilité

Le diagramme d'énergie potentielle permet également d'avoir une lecture intuitive des critères de position d'équilibre. En effectuant toujours l'analogie entre l'énergie potentielle et le profil d'une cuvette, il paraît alors naturel que le point O sur la figure 1.14 est une position d'équilibre stable tandis que le point B correspond à une position d'équilibre instable. En effet, une bille déposée au point O restera à proximité, même soumise à un petit déplacement. En revanche, au point B, la moindre perturbation déplacera la bille d'un côté ou de l'autre.

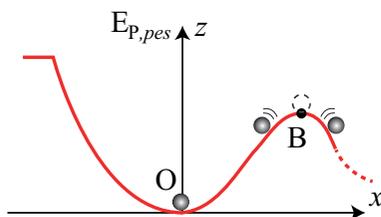


FIGURE 1.14 – Position d'équilibre et stabilité

Nous avons vu qu'un système immobile et soumis à aucune force reste immobile. Pour une force qui dérive de l'énergie potentielle, mathématiquement, cela se traduit par $F = -\frac{dE_P}{dx}|_{x_0} = 0$. On en conclut qu'un état d'équilibre se lit graphiquement en présence d'une tangente horizontale à la courbe de l'énergie potentielle.

Définition :

Une position d'équilibre correspond à un extremum local de l'énergie potentielle.

Considérons une masse initialement à la position O. Pour un léger déplacement à droite de cette position, l'énergie potentielle augmente ($\frac{dE_P}{dx} > 0$) ce qui impose que la masse est soumise à une force $F = -\frac{dE_P}{dx} < 0$ qui la ramène vers la gauche.

De même, si on déplace faiblement la masse vers la gauche, l'énergie potentielle est plus importante ($\frac{dE_P}{dx} < 0$). Elle est donc soumise à une force $F = -\frac{dE_P}{dx} > 0$ qui la ramène vers la droite. Ainsi, après un déplacement faible autour de sa position d'équilibre, la masse revient spontanément vers sa position d'équilibre. On dit que l'équilibre est stable. La dérivée de l'énergie potentielle augmente au voisinage de O, (elle passe de négatif à positif), on en déduit que pour une position stable, la dérivée seconde est positive.

Propriété :

Un état d'équilibre est **stable** si il correspond à un minimum local d'énergie potentielle :

$$\frac{d^2E_P}{dx^2}(x_{eq}) > 0$$

On parle d'état **instable** pour un maximum locale d'énergie potentielle ($\frac{d^2E_P}{dx^2}(x_{eq}) < 0$).

Exemple 8

Dans la molécule d'ammoniac NH_3 , l'atome d'azote peut osciller de part et d'autres du plan des atomes d'hydrogène (appelé effet parapluie).

1 - La figure représente le po-

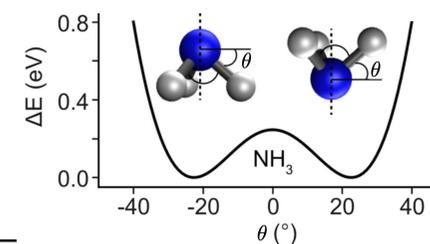


FIGURE 1.15 – Adapté de *Laser-induced electron diffraction of the*

tentiel calculé à partir d'une approche quantique. Indiquer qualitativement les positions d'équilibres stables et instable.

Le potentiel peut être modélisé par la formule suivante

$$V(\theta) = a\theta^2 + be^{-c\theta^2}$$

où θ représente l'angle (en radian) des atomes d'hydrogène par rapport à une molécule plane.

2.a - Montrer mathématiquement l'existence de deux positions stables et d'une position instable.

2.b - Calculer les angles correspondant aux positions d'équilibre stables.

Données : $a = 364 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$; $b = 149 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$; $c = 5,005$

Pour s'entraîner : exercice 5

1 - Les deux puits de potentiel à $\theta \approx \pm 20^\circ$ correspondent à des positions stables. La configuration plane $\theta = 0^\circ$ est instable.

2.a - On calcule la dérivée : $V'(\theta) = 2a\theta - 2bc\theta e^{-c\theta^2}$. Les positions d'équilibre correspondent à $V'(\theta) = 0$. on obtient $\theta_1 = 0$ ou

$$2a - 2bce^{-c\theta^2} = 0 \quad \text{soit} \quad -c\theta^2 = \ln\left(\frac{a}{bc}\right).$$

Il existe donc deux solutions : $\theta_{2,3} = \pm\sqrt{\left[-\frac{1}{c} \ln\left(\frac{a}{bc}\right)\right]} = \pm\sqrt{\left[\frac{1}{c} \ln\left(\frac{bc}{a}\right)\right]}$ La stabilité dépend du signe de la dérivée seconde.

$$V''(\theta) = 2a - 2bce^{-c\theta^2} + 4bc^2\theta^2 e^{-c\theta^2}$$

Ainsi $V''(0) = 2a - 2bc = -763 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} < 0$ et la position est instable⁶. D'autre part,

$$\begin{aligned} V''(\theta_{2,3}) &= 2a - 2bc \frac{a}{bc} - 4bc \ln\left(\frac{a}{bc}\right) \frac{a}{bc} \\ &= 4a \ln\left(\frac{bc}{a}\right) = 1,04 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} > 0 \end{aligned}$$

6. θ étant sans dimension, V , $V' = dV/d\theta$ et $V'' = d^2V/d\theta^2$ ont la même unité.

Comme $V''(\theta_{2,3})$, ces positions sont stables.

2.b - Les positions d'équilibre stables correspondent à $\theta_{2,3} = 0,379 \text{ rad} = 21,7^\circ$

Remarque 8 :

Dans l'étude citée, les auteurs ont mesuré la dynamique de l'effet parapluie lors de l'ionisation par laser d'une molécule d'ammoniac. Le temps caractéristique est de l'ordre de $10 \text{ fs} = 1 \cdot 10^{-15} \text{ s}$. La théorie VSPER permet d'établir prédire la géométrie des molécules à partir de la structure de Lewis. Pour l'ammoniac, celui conduit à $\theta \approx 20^\circ$ en bon accord (angle entre le doublet non liant et les atomes d'hydrogène d'environ $90 + 20 = 110^\circ$).

5 - Approximation harmonique

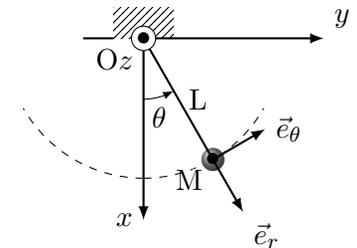
Exemple 9

On considère le pendule simple suivant, de masse m et de longueur L .

1 - Définir l'énergie potentielle du pendule simple en fonction de m , g , L et θ .

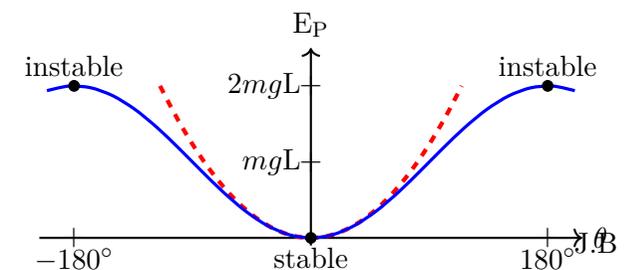
2 - En déduire que la position $\theta = 0$ est une position d'équilibre stable.

3 - Dans l'approximation des petits angles, $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$. Montrer que l'énergie potentielle peut s'écrire sous la même forme que l'énergie potentielle d'un ressort : $E_p \approx \frac{1}{2}K\theta^2$ à proximité de la position d'équilibre stable où K est une constante que l'on déterminera.



Pour s'entraîner : exercice 5

1 - On choisit le repère polaire $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. Dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen, le système de masse m est soumis à son



poids \vec{P} et la tension \vec{T} du fil. La tension du fil ne travaille pas. L'énergie potentielle de la masse m est donc l'énergie potentielle de pesanteur qui se met sous la forme $E_P(\theta) = mgL(1 - \cos\theta)$ qui est représentée sur la figure 1.16.

2 - Les positions d'équilibre stable correspondent au minimum ($\theta = 0$) et instable au maximum ($\theta = \pm 180^\circ$).

3 - Au voisinage de la position d'équilibre stable, l'approximation des petits angles donne immédiatement $E_P(\theta) \approx \frac{1}{2}mgL\theta^2$ qui a bien la forme demandée avec $K = mgL$.

Propriété :

Une énergie potentielle présentant un minimum locale peut être approchée par une parabole grâce à un développement limité :

$$E_P(x) \approx E_P(x_0) + \underbrace{(x - x_0) \frac{dE_P}{dx} \Big|_{x_0}}_{=0} + \frac{(x - x_0)^2}{2} \frac{d^2E_P}{dx^2} \Big|_{x_0}$$

On parle alors de **potentiel harmonique** car on lui associe un mouvement oscillant à une fréquence bien spécifique.

Avant d'entamer le prochain chapitre, il est intéressant de comprendre pourquoi l'oscillateur harmonique est idéalement représenté par une masse accrochée à ressort. Reprenons le cas du pendule simple. Seule la composante du poids selon \vec{e}_θ contribue à la mise en mouvement : $P_\theta = -mg\sin\theta \approx -mg\theta$. Ainsi, le poids ramène d'autant plus efficacement la bille vers sa position d'équilibre que celle-ci s'en éloigne (P_θ est proportionnel à θ). On retrouve une force de type force de rappel d'un ressort $F = -kx$.

Il est utile de retenir que l'évolution de tout système physique présentant un état stable peut-être décrit par un oscillateur harmonique. Ceci fait de l'oscillateur harmonique un modèle générique que l'on retrouve dans tous les domaines de la physique (mécanique classique et quantique, électricité, électronique, optique, acoustique, ...).

Remarque 9 :

Le potentiel de Morse, nommé d'après le physicien Philip Morse, est un modèle pratique d'énergie potentielle pour une molécule diatomique. C'est une meilleure approximation pour la structure vibrationnelle de la molécule que celle de l'oscillateur harmonique quantique car il comprend de manière explicite les effets d'une rupture de liaison, comme l'existence des états non liés. Il prend aussi en compte l'anharmonicité des liaisons réelles.

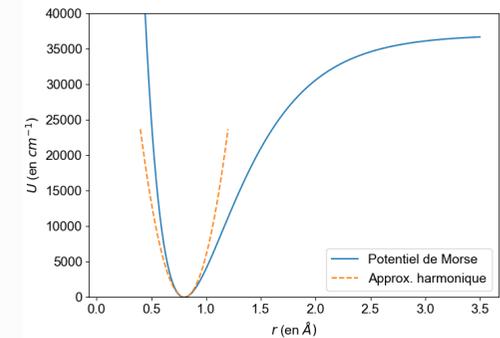


FIGURE 1.17 – Énergie potentielle de la molécule de dihydrogène, *inspiré de A new modified Morse potential energy function for diatomic molecules, Phys. Scr. 95, 085401 (2020).*

🔥 L'essentiel

Energies cinétique, potentielles et mécanique Toutes les énergies s'expriment en Joule (J).

- Énergie cinétique $E_C = \frac{1}{2}mv^2$
- Énergie potentielle de pesanteur $E_{P,pes} = mgh$
- Énergie potentielle élastique $E_{P,el} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$
- Énergie mécanique $E_M = E_C + E_P$

Travail et puissance d'une force

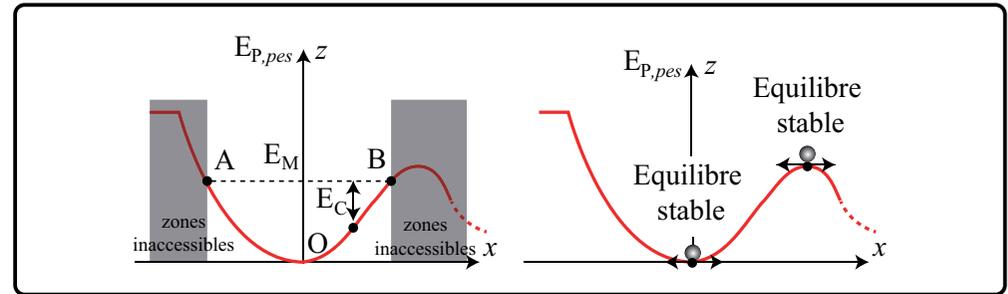
$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B \underbrace{\vec{F} \cdot \vec{v}}_{\mathcal{P}(\vec{F})} dt$$

- Si $W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) > 0$, le travail est moteur. Si $W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) < 0$, le travail est résistant.

Une force est dite **conservative** si son travail ne dépend pas du chemin suivi. On peut lui associer une énergie potentielle. Dans le cas contraire elle est dite **dissipative** (ou non conservative).

Théorèmes énergétiques

- Théorème de l'énergie cinétique : $\Delta E_C = \sum_i W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_i)$
- Théorème de la puissance cinétique : $\frac{dE_C}{dt} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_i)$
- Théorème de l'énergie mécanique : $\Delta E_M = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{dissipatives})$
- Un système est conservatif si il n'est soumis qu'à des forces conservative. Dans ce cas, son énergie mécanique est conservée.
- Sur un diagramme d'énergie potentielle, on reconnaît les positions d'équilibre à $\frac{dE_P}{dx} = 0$. Lorsque $\frac{d^2E_P}{dx^2} > 0$, l'équilibre est stable.



Exercices

Les classiques

Exercice 1

solution p.21

Une voiture de masse $m = 1300 \text{ kg}$, roule sur une route nationale à la vitesse $v_0 = 90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Le conducteur, qui téléphone au volant au mépris des règles de sécurité, se fait surprendre par un obstacle situé à une distance $d = 30 \text{ m}$ devant lui. Il freine soudainement. On assimile le freinage à une force de frottements solides $\vec{R}_T = -\mu mg \frac{\vec{v}}{v}$. La route est rectiligne et on suppose que la voiture ne dévie pas de sa trajectoire lors du freinage.

- 1 - Exprimer le travail des forces de frottements sur la distance d .
- 2 - S'agit-il d'un travail résistant ou moteur ? Calculer ce travail.
- 3 - À l'aide du théorème de l'énergie cinétique, exprimer le module de la vitesse v_1 de la voiture quand elle arrive sur l'obstacle. Calculer la vitesse v_1 . L'exprimer en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Données : $\mu = 0,8$ et $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Exercice 2

solution p.21

Sur autoroute, la principale source de dissipation d'énergie pour une voiture est les frottements de l'air.



- 1 - Exprimer la puissance de la force de frottements de l'air. Cette force est-elle motrice ou résistante ?
- 2 - Calculer le travail des forces de frottements pour parcourir 100 km à $110 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ puis à $130 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.
- 3 - Conclure sur le gain de carburant en restreignant la vitesse d'un véhicule.

Données :

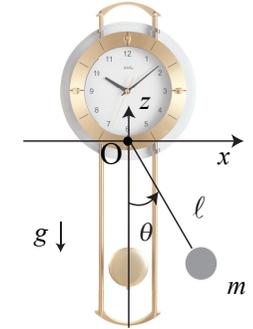
- force de frottement de l'air : $\vec{f} = -\frac{1}{2}\rho C_x v^2 \times \frac{\vec{v}}{v}$;
- pour une voiture usuelle $C_x = 0,23$, $S = 2,5 \text{ m}^2$.

- masse volumique de l'air à 20°C , $\rho = 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Exercice 3

solution p.22

On considère un pendule simple, constitué d'une masse ponctuelle m , accrochée à un point fixe O par l'intermédiaire d'un fil de longueur ℓ . Ce pendule est lâché sans vitesse initiale à $t = 0$ avec un angle $\theta = \theta_0$ par rapport à l'axe vertical Oz . Le pendule oscille avec la période $T_0 = 2,00 \text{ s}$. On prendra $\ell = 0,994 \text{ m}$.

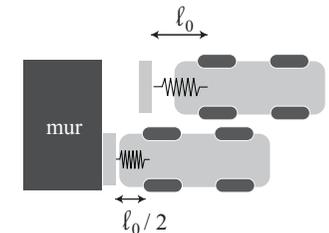


- 1 - Le pendule est lâché sans vitesse initiale de la position $\theta_1 = 6,0^\circ$. Exprimer l'énergie mécanique initiale. La calculer.
- 2 - Au bout de 30 oscillations, on constate que l'amplitude des oscillations n'est plus que de $\theta_2 = 3,0^\circ$. Calculer l'énergie mécanique lorsque la masse est en θ_2 , sans vitesse.
- 3 - Calculer la variation de l'énergie mécanique $\Delta E_m = E_m(\theta_2) - E_m(\theta_1)$ au cours de ces 30 oscillations. Quel est le signe de cette variation ? Pourquoi ?
- 4 - Pour compenser cette perte d'énergie, un système de contrepoids de masse $m' = 10,0 \text{ kg}$ peut descendre de $h = 1,50 \text{ m}$. Pendant combien d'oscillations peut-il faire fonctionner l'horloge ? À combien de temps cela correspond-il ? Donner le résultat en jours.

Exercice 4

solution p.22

Lors d'un accident de voiture, l'avant du véhicule se déforme lors du choc. Dans un premier temps, on considère la déformation élastique, la voiture est modélisée par une masse m associée à un ressort de masse négligeable, de constante de raideur k et de longueur à vide $\ell_0 = 2,0 \text{ m}$. Au cours de cette déformation, l'avant de la voiture se comprime de $\ell_0/2$. On négligera les frottements.



- 1 - Exprimer l'énergie potentielle élastique avant et après la déformation.
- 2 - Le système (voiture) est-il conservatif lors de la déformation élas-

tique?

3 - Sachant que la vitesse juste avant l'impact est de $v_1 = 35 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, à l'aide du théorème de l'énergie mécanique, exprimer la vitesse de la voiture à la fin de la déformation. La calculer.

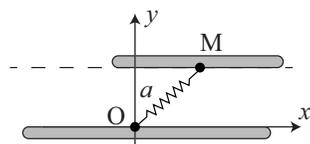
4 - À la fin de la déformation élastique, la vitesse de la voiture est donc diminuée mais non nulle, une partie de son énergie cinétique ayant été absorbée par la déformation du capot que nous venons de décrire. La fin du choc se traduit par l'arrêt brutal de la voiture. Cela signifie que l'énergie cinétique restante de la voiture est convertie à la fin du choc. Que devient-elle?

Données : $m = 1300 \text{ kg}$, $k = 8,50 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.

Exercice 5

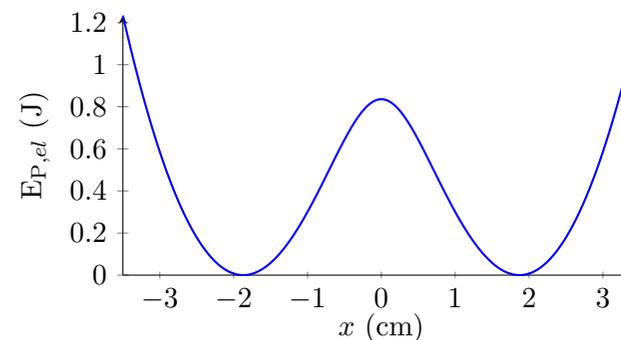
solution p.22

Un des premiers téléphones portables grands publics était composé de deux parties coulissantes composées de l'écran et du clavier. Un ressort de constante k et de longueur à vide ℓ_0 permettait d'avoir deux positions stables, l'une correspondant au téléphone ouvert et l'autre fermé. Dans le schéma proposé, le point $M(x,a)$ peut se translater horizontalement.



1 - À l'aide du schéma ci-dessus, déterminer la longueur du ressort ℓ en fonction de x et a . En déduire l'expression de l'énergie potentielle élastique.

2 - a) On trace $E_p(x)$, préciser les positions d'équilibre et leur stabilité.



b) Retrouver ces résultats mathématiquement.

Données : $k = 0,10 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$; $a = 0,50 \text{ cm}$; $\ell_0 = 2,0 \text{ cm}$.

Problèmes ouverts

Exercice 6

solution p.23

La société néerlandaise Lightyear propose une grande berline équipée de 5 m^2 panneaux solaires sur son toit fournissant une puissance de $\mathcal{P}_{\text{solaire}} = 500 \text{ W}$. La berline familiale très profilée fait $5,05 \text{ m}$ de long, $1,82 \text{ m}$ de large et $1,40 \text{ m}$ de hauteur et possède un coefficient de traînée $C_x = 0,23$.



Proposer une estimation de la vitesse maximale de ce véhicule dont l'unique source d'énergie provient d'un panneau solaire, en considérant que les frottements de l'air sont prépondérants devant toute autre forme de dissipation d'énergie.

Données :

- force de frottement de l'air : $\vec{f} = -\frac{1}{2}\rho S C_x v^2 \times \frac{\vec{v}}{v}$;
- masse volumique de l'air à 20°C : $\rho = 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Exercice 7

solution p.23

On estime qu'un planeur possède lancé à $v = 90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ depuis une hauteur de 200 m peut parcourir jusqu'à $9,0 \text{ km}$ en maintenant sa vitesse constante. Le dé-



placement dans l'air génère une force se décomposant sous la forme d'une traînée (parallèle au déplacement de l'engin) et d'une portance, perpendiculaire au déplacement. Ces forces s'écrivent respectivement :

- $\vec{f}_x = -\frac{1}{2}\rho S C_x v^2 \times \frac{\vec{v}}{v}$ avec ρ la masse volumique de l'air, C_x le coefficient de traînée et S la surface des ailes de l'appareil ^a.
- $\vec{f}_z = \frac{1}{2}\rho S C_z v^2 \times \vec{n}$ où \vec{n} est perpendiculaire à la vitesse.

Estimer la valeur du C_x pour un planeur de surface alaire $S = 16 \text{ m}^2$.

Données :

- masse volumique de l'air à 20°C : $\rho = 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$;
- masse d'un planeur : $m = 500 \text{ kg}$.

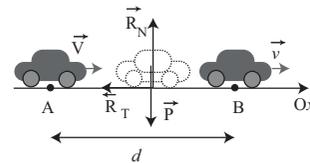
^a. Cette définition n'est valable qu'en aéronautique, en mécanique, il s'agit de la surface perpendiculaire à la trajectoire.

Corrigés

Exercice 1

1 - Considérons les instants A et B de la zone de freinage. Le travail des forces de frottements vaut

$$W_{AB}(\vec{R}_T) = \int_A^B \vec{R}_T \cdot d\vec{\ell} = -\mu mgd$$



2 - Le travail est négatif, il s'agit d'un travail résistant : $W(\vec{R}_T) = 3,5 \cdot 10^5 \text{ J}$.

3 - Dans le référentiel galiléen lié au sol, La voiture est soumise

- à son poids \vec{P}
- la réaction \vec{N}_N de la route
- les frottements \vec{R}_T de freinage

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre l'état A (voiture en mouvement) et B (juste avant l'impact) :

$$E_C(B) - E_C(A) = W_{AB}(\vec{R}_T) + W_{AB}(\vec{R}_N) + W_{AB}(\vec{P})$$

Les forces \vec{R}_N et \vec{P} ne travaillent pas car elles sont perpendiculaires au déplacement. On obtient :

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\mu mgd$$

D'où la vitesse au moment du choc

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2\mu gd} = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 35 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

Exercice 2

1 - Par définition, la puissance de la force est donnée par :

$$\mathcal{P} = \vec{f} \cdot \vec{v} = -\frac{1}{2}\rho C_x v^3$$

La puissance étant négative, il s'agit bien évidemment d'une force résistante.

2 - En utilisant les valeurs fournies et en convertissant les vitesses en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, on obtient :

$$\mathcal{P}(110\text{km/h}) = 11 \text{ kW} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}(130\text{km/h}) = 18 \text{ kW}$$

Pour obtenir le travail sur 100 km, il suffit d'intégrer la puissance sur la durée du parcours :

$$W_{110} = \mathcal{P}(110\text{km/h}) \times \Delta t_{110} = 36 \text{ kJ} \quad \text{et} \quad W_{130} = \mathcal{P}(130\text{km/h}) \times \Delta t_{130} = 50 \text{ kJ}$$

3 - La puissance consommée pour maintenir la vitesse vient du carburant, la dépendance en v^3 de la puissance des frottements augmente considérablement la dépense énergétique. À vitesse constante, la dépense énergétique pour parcourir une distance donnée est proportionnelle à v^2 . Le passage de 130 km/h à 110 km/h conduit à une réduction de consommation d'énergie de près de $(50 - 36)/50 = 30\%$.

Remarque 10 :

Initiée en 2012 par Elon Musk, le projet hyperloop vise à déplacer des véhicules dans un tunnel dépressurisé afin de limiter les frottements de l'air. Depuis 2016, le concours "Hyperloop Pod Competition" met en lice plusieurs universités pour concevoir et réaliser les futurs capsules. (Photographie de Okras, sous licence Creative Commons 4.0)


Exercice 3

1 - À l'amplitude maximale, la vitesse du balancier s'annule donc son énergie cinétique est nulle. L'énergie potentielle vaut $E_P = mgH = mgl(1 - \cos \theta_1)$. D'où l'énergie mécanique

$$E_M(\theta_1) = mgl(1 - \cos \theta_1) = 11 \cdot 10^{-3} \text{ J} = 11 \text{ mJ}$$

2 - Au bout de 30 oscillations, on obtient

$$E_M(\theta_2) = mgl(1 - \cos \theta_2) = 2,7 \text{ mJ}$$

3 - On calcule la variation d'énergie mécanique :

$$\Delta E_M = E_M(\theta_2) - E_M(\theta_1) = -8,0 \cdot 10^{-3} \text{ J} = -8,0 \text{ mJ}$$

Cette variation est négative, il y a perte d'énergie en raison des frottements de l'air.

4 - L'énergie potentielle du contrepoids vaut $E_p = m'gh = 1,5 \cdot 10^2 \text{ J}$

Cette énergie permet de compenser les pertes pendant $30 \times 147/8,0 \cdot 10^{-3} = 5,5 \cdot 10^5$ oscillations. Chaque oscillation durant 2 secondes, cela correspond à $1,1 \cdot 10^6$ s soit 13 jours.

Exercice 4

1 - Au début de la déformation, le ressort a pour longueur $\ell = \ell_0$ et l'énergie potentielle élastique vaut $E_{P,e1} = \frac{1}{2}k(\ell_0 - \ell_0)^2 = 0$.

À la fin de la déformation, $\ell = \ell_0/2$ et $E_{P,e2} = \frac{1}{2}k(\ell_0/2 - \ell_0)^2 = \frac{1}{8}k\ell_0^2$

2 - La voiture est soumise

- à son poids \vec{P} (force conservative)
- la réaction \vec{R} de la route (qui ne travaille pas)
- la déformation élastique (force conservative)

Donc le système est conservatif.

3 - La conservation de l'énergie mécanique impose $E_M(M_1) = E_M(M_2)$ d'où

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{8}k\ell_0^2$$

on en déduit que $v_2 = \sqrt{v_1^2 - \frac{k\ell_0^2}{4m}} = 5,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 20 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$

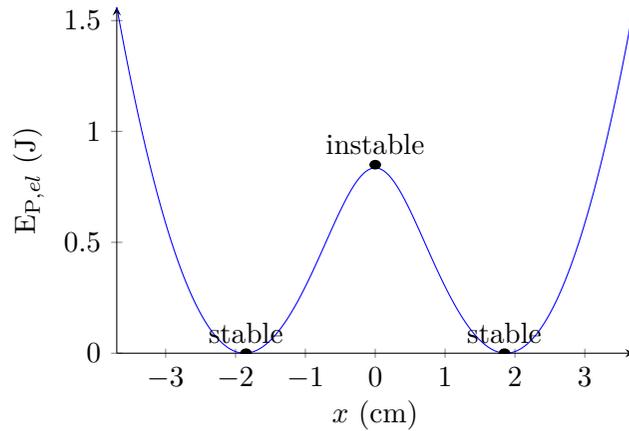
4 - La déformation n'absorbe pas toute l'énergie cinétique de la voiture au moment du choc. L'énergie cinétique restante est transférée au conducteur qui risque de percuter le volant. Mieux, si la voiture est équipée d'un airbag, celui-ci se déclenche et absorbera une partie de cette énergie. On a utilisé l'énergie potentielle élastique. Cependant, la déformation ne peut être considérée élastique que si la déformation est réversible (donc si le capot reprend sa forme initiale). Lorsque la déformation est trop importante, le système sort de la zone d'élasticité et la déformation devient irréversible. On peut supposer que la déformation est d'abord élastique puis que l'énergie potentielle élastique en fin de déformation est dissipée sous forme de déformation irréversible du capot (rupture des liaisons moléculaires). L'analyse proposée adopte ce point de vue puisque le capot ne reprend pas sa forme initiale et l'énergie potentielle élastique n'est pas restituée.

Exercice 5

1 - En utilisant le théorème de Pythagore : $\ell = \sqrt{a^2 + x^2}$. L'énergie potentielle élastique est donc donnée par :

$$E_{P,el} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 = \frac{1}{2}k(\sqrt{a^2 + x^2} - \ell_0)^2$$

2 - a) On repère les positions d'équilibre pour un extremum local de l'énergie potentielle. Les positions stables sont observées pour les minimums locaux et les positions instables pour les maximums locaux.



b) On exprime la dérivée

$$\frac{dE_{P,el}}{dx} = k \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} (\sqrt{a^2 + x^2} - \ell_0)$$

Les positions d'équilibres correspondent à la dérivée nulle donc $x = 0$ ou $\sqrt{a^2 + x^2} = \ell_0$ donc $x = 0$ ou $x = \pm \sqrt{\ell_0^2 - a^2} = \pm 1,9$ cm, en accord avec la courbe.

On détermine les positions d'équilibres stables ou instables avec la dérivée seconde

$$\frac{d^2E_{P,el}}{dx^2} = k \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} (\sqrt{a^2 + x^2} - \ell_0) - kx (\sqrt{a^2 + x^2} - \ell_0) \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + k \frac{x^2}{a^2 + x^2}$$

Ainsi ;

$$\frac{d^2E_{P,el}}{dx^2}(x = 0) = k \frac{a - \ell_0}{a} < 0$$

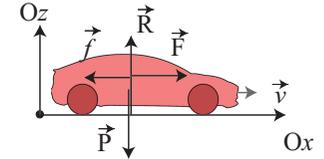
et c'est un équilibre instable.

$$\frac{d^2E_{P,el}}{dx^2}(x = \pm \sqrt{\ell_0^2 - a^2}) = k \frac{\ell_0^2 - a^2}{\ell_0^2} > 0$$

et c'est un équilibre stable.

Exercice 6

1 - Sur un sol horizontal servant de référentiel galiléen, la voiture, considérée comme un point matériel est soumise à :



- son poids : $\vec{P} = -mg \vec{e}_z$;
- la réaction du support $\vec{R} = R \vec{e}_z$;
- la force du moteur \vec{F} de puissance \mathcal{P} ;
- la force des frottements de l'air \vec{f} .

Le théorème de la puissance cinétique donne alors :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \vec{P} \cdot \vec{v} + \vec{R} \cdot \vec{v} + \vec{f} \cdot \vec{v} + \mathcal{P}$$

Pour une route horizontale, $\vec{P} \cdot \vec{v} = \vec{R} \cdot \vec{v} = 0$, lorsque la vitesse est constante : $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = 0$, il reste : $0 = \mathcal{P} - \frac{1}{2} \rho S C_x v^3$. On obtient alors :

$$v = \left(\frac{2\mathcal{P}}{\rho S C_x} \right)^{1/3}$$

La surface perpendiculaire au déplacement est $S = 1,40 \times 1,82 = 2,55 \text{ m}^2$, on obtient :

$$v = \left(\frac{2 \times 500}{1,3 \times 2,55 \times 0,23} \right)^{1/3} = 11,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 39 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

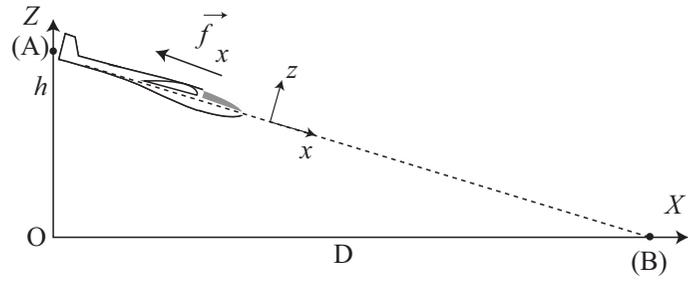
Exercice 7

On peut raisonnablement penser que le planeur évolue à vitesse constante lors de la descente pour éviter le phénomène de « décrochage », c'est-à-dire la perte de portance si la vitesse est trop faible. La vitesse étant constante, la perte d'énergie potentielle de pesanteur est reliée au travail de la force de frottement. L'application du théorème de l'énergie mécanique entre les points A et B définis ci-contre s'écrit :

$$E_M(B) - E_M(A) = W_{AB}(\vec{f}_x) = f_x \times AB$$

Comme $h \ll D$, on en déduit que $AB \approx D$, on peut donc écrire :

$$-mgh = -\frac{1}{2} \rho S C_x v^2 D \quad \text{soit} \quad C_x = \frac{2mgh}{Sv^2 D}$$



Avec les valeurs numériques de l'énoncé, on obtient : $C_x = 0,022$.