

Oscillateur en régime forcé

Le régime forcé apparaît lorsqu'un oscillateur est soumis à une excitation périodique, par exemple, pousser un enfant sur une balançoire à intervalles réguliers. On observe le phénomène de résonance lorsque le système est excité à une pulsation proche de sa pulsation propre (qui caractérise ses oscillations libres). Dans ce cas, l'amplitude du mouvement peut augmenter considérablement. Par ailleurs, plusieurs ponts ont été détruits ou menacés de destruction à cause du phénomène de résonance. Le 18 avril 1850 à Angers, un régiment traversant au pas cadencé un pont suspendu enjambant le Maine provoqua sa destruction. C'est pour éviter cela que les soldats rompent le pas lorsqu'ils franchissent un pont. Plus récemment, un problème similaire est apparu sur le pont Millénaire de Londres le 10 juin 2000. Il fut fermé au public deux jours plus tard, en raison d'un phénomène de résonance, le pont oscillant latéralement de façon imprévue. En 2007, des études numériques ont permis de comprendre la synchronisation des marcheurs avec la fréquence de résonance du pont (cf. fig. 1.1).

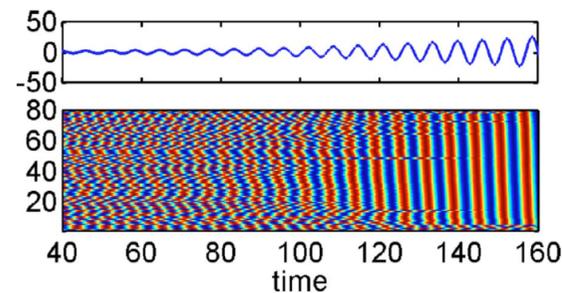


FIGURE 1.1 – Synchronisation de 80 marcheurs sur le Millenium Bridge. En haut : mise en oscillations du pont. En bas, les couleurs indiquent la phase de chaque marcheur et montre l'effet collectif vers le temps 120. Reproduit avec permission de *Modeling walker synchronization on the Millennium Bridge*, Bruno Eckhardt et al., *Phys. Rev. E*, 75, 021110, 2007, © 2023 the American Physical Society.

I. Mise en oscillations forcées

1 - Système modèle sans frottement

a) Forçage sinusoïdal

Dans le chapitre précédent, nous avons établi les propriétés générale de l'oscillateur harmonique libre (c'est-à-dire qu'on laisse évoluer spontanément). Nous avons mis en évidence, qu'en cas de frottements modérés, il oscille à une fréquence bien déterminée ($f = \Omega/2\pi \approx \omega_0/2\pi$ si les frottements sont faibles, avec ω_0 la pulsation propre du système). Dans cette partie, nous nous intéressons à la réponse du même système lorsqu'il est soumis à une force qui oscille (excitation sinusoïdale). En particulier, nous décrirons la réponse du système lorsque la force supplémentaire imposée oscille à une fréquence proche de la fréquence propre du système libre.

tion du support¹. On se place dans le référentiel d'étude supposé galiléen. Le PFD conduit à

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{F} = m\vec{a}$$

Le mouvement est selon l'axe horizontal (Ox) uniquement, on projette le PFD sur cet axe :

$$m\ddot{x} = -k(\ell - \ell_0) + F_0 \cos(\omega t)$$

Or $x = \ell - \ell_0$ est l'allongement du ressort et la vitesse de l'objet vaut $v = \dot{x}$. Finalement, $kx + F_0 \cos(\omega t) = m\ddot{x}$. On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $A_0 = F_0/m$ pour obtenir l'équation différentielle sous sa forme canonique

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = A_0 \cos(\omega t)$$

c) Forme du mouvement et notion de résonance

On retrouve une équation similaire à celle obtenue en régime libre mais avec un second membre (cf. chap. ??). La réponse du système à l'excitation forcée va être une combinaison du régime libre discuté précédemment et du mouvement imposé par cette excitation. Mathématiquement, cela se traduit par le fait que la solution générale de l'équation différentielle du régime forcé peut se décomposer en 2 termes $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ où x_h est solution de l'équation homogène (c'est-à-dire l'équation sans second membre ce qui correspond au régime libre) et x_p une solution particulière de l'équation avec second membre. En général, une solution particulière simple est similaire au le second membre. Ici, on peut donc essayer une solution de la forme

$$x_p(t) = X_p \cos(\omega t)$$

L'amplitude X_p est l'inconnue à déterminer. En injectant cette solution dans l'équation différentielle puisque $\ddot{x}_p = -\omega^2 X_p \cos(\omega t)$, on obtient

$$(-\omega^2 + \omega_0^2)X_p \cos(\omega t) = F_0/m \cos(\omega t) \quad \text{soit} \quad X_p = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

1. Pour une orientation verticale, en prenant l'origine du repère à la position d'équilibre ℓ_{eq} , les équations sont identiques (élimination du poids pris en compte dans ℓ_{eq}).

Définition :
 Un forçage sinusoïdal est un système soumis à une force excitatrice de la forme $\vec{F} = \vec{F}_0 \cos \omega t$.

Cette expression simpliste de la force d'excitation permettra par la suite d'utiliser tout type de formulation grâce à la transformée de Fourier.

b) Mise en équation du mouvement du régime forcé

Considérons notre système modèle usuel composé d'une masse accrochée à un ressort et soumise à une force sinusoïdale. Pour simplifier l'étude, on supposera le dispositif horizontal pour s'affranchir de l'influence du poids et de la réaction

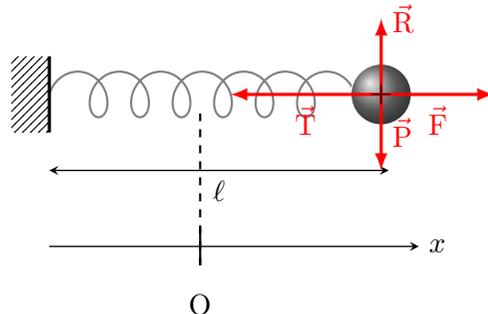


FIGURE 1.2 – Système masse-ressort forcé

De sorte que la solution générale² est finalement

$$x_p(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t)$$

La forme générale du régime forcé montre que si la force excitatrice exercée sur la masse oscille avec exactement la même pulsation que la pulsation propre du système ($\omega = \omega_0$), alors l'amplitude du mouvement diverge :

$$X_p(\omega) = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \xrightarrow{\omega \rightarrow \omega_0} \pm \infty$$

Propriétés :

- L'amplitude du mouvement forcé dépend de la pulsation du forçage.
- Lorsque la pulsation de forçage est égale à la pulsation propre, le système oscillant résonne.

2 - Mouvement forcé en présence de frottements

a) Mise en équation du mouvement du régime forcé

On considère maintenant le cas plus réaliste en présence de forces de frottements fluides. On ajoute au cas précédent une force de frottement fluide d'expression $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$. Le PFD s'écrit alors :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{f} + \vec{F}$$

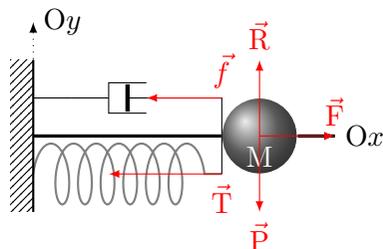


FIGURE 1.3 - Oscillateur amorti forcé

La projection de cette équation selon (Ox) donne :

$$m\ddot{x} = -k(\ell - \ell_0) - \alpha v + F_0 \cos(\omega t)$$

2. Les inconnues A,B de la solution homogène x_h sont déterminées à partir des conditions initiales (appliquées sur x_{tot}) mais n'est pas traité ici car cela présente peu d'intérêt.

avec $x = \ell - \ell_0$ l'allongement du ressort et la vitesse de l'objet défini par $v = \dot{x}$, on obtient finalement : $m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x} + F_0 \cos(\omega t)$.

Afin d'obtenir une écriture canonique, posons : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $2\Gamma = \frac{\alpha}{m}$ et $A_0 = \frac{F_0}{m}$, il vient :

$$\ddot{x} + 2\Gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = A_0 \cos(\omega t)$$

b) Régimes transitoire et forcé

Comme précédemment, la réponse du système à l'excitation forcée va être une combinaison du régime libre discuté précédemment et du mouvement imposé par cette excitation $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ où x_h est la solution du régime amorti dite homogène et x_p et une solution particulière due au forçage. On cherche x_p sous une forme similaire au second membre $x_p(t) = X_p \cos(\omega t + \varphi)$ où X_p est l'amplitude du mouvement et φ son déphasage par rapport à l'excitation (à déterminer).

Si le début du mouvement obtenu peut être assez compliqué (cf. fig.1.4), en présence d'amortissement, la solution x_h tend toujours vers 0 et la masse finit toujours par décrire un mouvement décrit uniquement par la solution particulière x_p . En effet, dans le chapitre ??, nous avons montré que quelque soit le régime (pseudo-périodique ou aperiodique), et quelque soient les conditions initiales, la solution générale est décroissante avec un temps caractéristique de l'ordre de $\tau = 1/\Gamma$.

Propriété :

En dehors du temps de relaxation du régime libre, l'amplitude de l'oscillateur forcé dépend uniquement du forçage. Le temps d'établissement du régime forcé est de l'ordre de

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} = \frac{2Q}{\omega_0}$$

En régime permanent, l'amplitude du système peut donc s'écrire sous la forme :

$$x(t) \underset{t \gg 1/\Gamma}{\approx} X_p \cos(\omega t + \varphi)$$

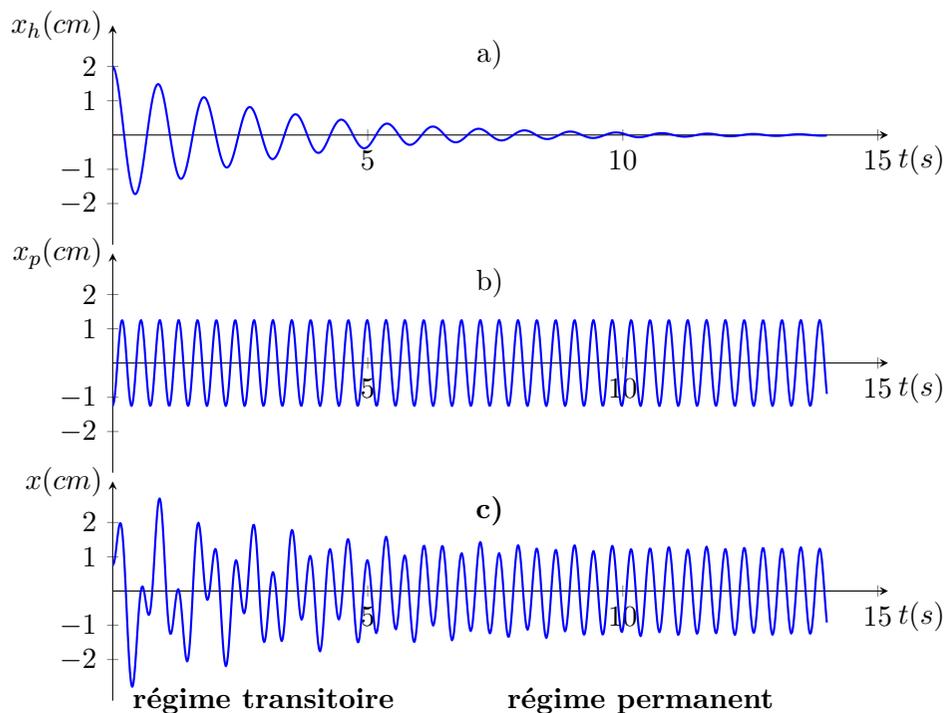


FIGURE 1.4 – Mise en mouvement d'un oscillateur amorti en régime forcé. a) Régime libre, b) Régime forcé, c) Mouvement complet $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$. $x_p(t) = X_p \cos(\omega t)$. c) Mouvement complet $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$, avec $X_p = A_0/(\omega_0^2 - \omega^2)$, $A_0 = 300 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$, $\omega = 17 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $x_0 = 2 \text{ cm}$, $\omega_0 = 7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $\Gamma = 0,3 \text{ s}^{-1}$.

Il reste donc 2 inconnues (X_p et φ) à déterminer pour établir la forme complète du mouvement. L'amplitude X_p et la phase φ du mouvement dépendent de la force excitatrice. Pour les déterminer, on peut utiliser le fait que $x(t) = X_p \cos(\omega t + \varphi)$ doit être solution de l'équation du mouvement. Cependant, l'insertion de cette solution dans l'équation conduit à des calculs pénibles. Aussi, une méthode particulièrement efficace pour résoudre ce problème repose sur la représentation complexe d'une grandeur physique (voir aussi l'annexe ??).

II. Représentation complexe du régime forcé

1 - Solution de l'équation canonique

a) Mise en forme

Afin d'utiliser la notation complexe, l'équation doit être linéaire et ne présenter aucun terme constant.



Propriété :

L'équation différentielle canonique d'un oscillateur forcé est de la forme ^a :

$$\ddot{x} + 2\Gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = A_0 \cos \omega t$$

- Γ est homogène à l'inverse d'un temps (unité s^{-1})
- ω_0 est homogène à une pulsation (unité $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$)
- A_0 est homogène à une accélération (unité $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$)

^a. Les unités des différents paramètres se déduisent facilement de la forme de l'équation. Chaque terme doit être homogène à la dérivée seconde du déplacement \ddot{x} donc à une accélération.

Un dispositif couramment employé comme démonstration est constitué d'un moteur permettant de tirer d'un côté d'un ressort. L'obtention de la forme canonique passe par l'obtention de la position d'équilibre afin de définir l'origine des axes du mouvement.

Exemple 1

Un système de démonstration est composé d'une masselote m excitée par un moteur. L'extrémité supérieure O' d'un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 est animé d'un mouvement de la forme

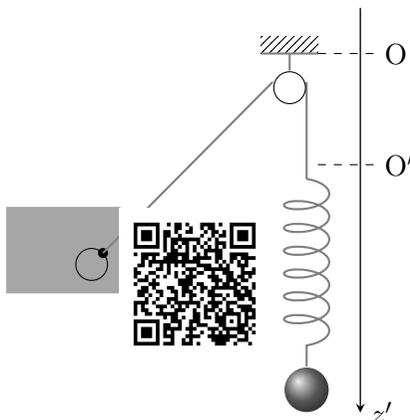
$$OO' = u(t) = U_0 \cos \omega t .$$

On considère une force de frottement fluide sur la masse m modélisée par $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$.

- 1 - Le moteur arrêté, exprimer la longueur à l'équilibre du ressort ℓ_{eq} .
- 2 - Le moteur tourne. La position du point M est donnée par z' (telle que $\vec{OM} = z' \vec{e}_z$). Exprimer la longueur du ressort à un instant quelconque $\ell = O'M$ en fonction de z' et $u(t)$.
- 3 - En posant $z = z' - \ell_{eq}$, montrer que le système d'étude peut se mettre sous la forme canonique suivante :

$$\ddot{z} + 2\Gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = A_0 \cos \omega t$$

En exprimant les différents paramètres Γ, ω_0 et A_0 .



On projette selon l'axe Oz :

$$m\ddot{z}' = mg - k(\ell - \ell_0) - \alpha \dot{z}' \quad \text{soit} \quad m\ddot{z}' = mg - k(z' - u - \ell_0) - \alpha \dot{z}'$$

Le décalage par rapport à la position d'équilibre permet d'éliminer tous les termes constant. Ainsi, avec $z = z' - \ell_{eq} = z' - \ell_0 - \frac{mg}{k}$, les dérivées sont identiques : $\dot{z} = \dot{z}'$ et $\ddot{z} = \ddot{z}'$, on obtient :

$$m\ddot{z} = mg - k(z + \ell_0 + \frac{mg}{k} - u(t) - \ell_0) - \alpha \dot{z}'$$

La simplification de cette équation conduit à :

$$\ddot{z} + \underbrace{\frac{\alpha}{m}}_{2\Gamma} \dot{z} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2} z = \underbrace{\frac{kU_0}{m}}_{A_0} \cos \omega t$$

L'absence de terme constant dans l'équation canonique est nécessaire pour l'utilisation de la notation complexe.

Remarque 1 :

Le pendule paramétrique est un pendule entretenu par variation de sa longueur. On le retrouve par exemple sous la forme de l'encensoir ou Botafumeiro de la cathédrale de Saint Jacques de Compostelle (cf. image ci-contre sous licence Creative Commons). En diminuant la longueur du pendule au moment où celui-ci passe par la verticale, les moines parviennent à augmenter l'amplitude des oscillations du pendule.



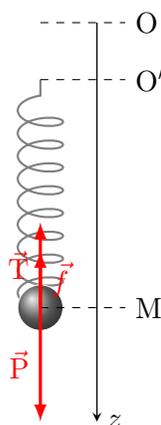
Pour s'entraîner : exercice ??

1 - Dans le référentiel d'étude supposé galiléen, la masse est soumise, en l'absence de mouvement (donc de frottements), au poids et la force du ressort. À l'équilibre, il vient $\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$. On projette verticalement pour obtenir $mg - k(\ell_{eq} - \ell_0) = 0$ puis la longueur à l'équilibre $\ell_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{k}$. Le ressort est étiré sous l'effet du poids.

2 - On a immédiatement $\ell = O'M = OM - OO' = z' - u(t)$.

3 - Dans le référentiel d'étude, supposé galiléen, le PFD s'écrit

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{f} = m\vec{a}$$



L'équation de l'oscillateur harmonique est alors légèrement modifiée et l'oscillateur paramétrique obit à une équation connue sous l'équation de Mathieu :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2(1 + 2f \cos \omega_e t)\theta = 0$$

où f est un paramètre relié à l'allongement de la corde et ω_e la pulsation d'excitation. Dans le cas du botafumeiro, l'excitation est deux fois plus rapide

que la période propre du pendule, phénomène caractéristique d'un problème non linéaire.

Ce type d'excitation se retrouve également dans une simple balançoire. Une équipe de chercheurs japonais et australien ont récemment montré que la phase a également son importance. En étudiant le mouvement d'une dizaine de personnes sur une balançoire installée dans un laboratoire, ils ont validé leur modèle indiquant que la phase d'excitation du mouvement du corps par rapport au pendule variait dans le temps en fonction de l'amplitude du mouvement.

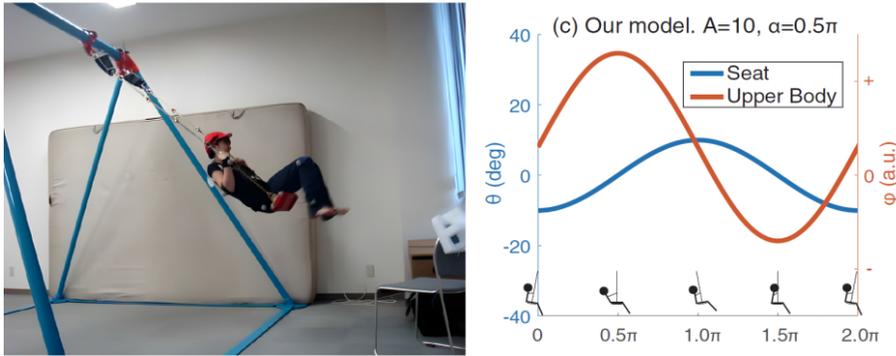


FIGURE 1.5 – Balançoire de test et modèle d'excitation. *D'après Initial phase and frequency modulations of pumping a playground swing, Phys. Rev. E, 2023.*

b) Représentation complexe d'une grandeur physique

Considérons l'équation différentielle canonique de l'oscillateur forcé :

$$\ddot{x} + 2\Gamma\dot{x} + \omega_0^2x = A_0 \cos \omega t$$

On cherche à caractériser un mouvement oscillant à la même pulsation que l'excitation sous la forme $x(t) = X_p \cos(\omega t + \varphi)$. Pour déterminer l'amplitude X_p et la phase φ on peut travailler sur la représentation complexe associée à la grandeur oscillante $x(t) = X_p \cos(\omega t + \varphi)$:

$$\underline{x}(t) = X_p e^{i(\omega t + \varphi)}$$

Cette grandeur est définie de sorte que sa partie réelle soit la fonction recherchée : $\text{Re}[\underline{x}(t)] = X_p \cos(\omega t + \varphi)$.

▲ Définition :

En présence d'un **forçage sinusoïdal**, l'amplitude du mouvement du mouvement obéissant à une équation différentielle **linéaire** peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{x}(t) = X_p e^{i(\omega t + \varphi)}$$

où X_p est l'amplitude du mouvement et φ son déphasage par rapport à l'excitation.

Comme la dérivée de la fonction exponentielle $f(t) = e^{at}$ vaut $f'(t) = ae^{at}$, cela revient à remplacer des dérivées par des multiplications et simplifie grandement les manipulations mathématiques :

$$\dot{\underline{x}} = i\omega X_p e^{i(\omega t + \varphi)} = i\omega \underline{x}$$

■ Propriété :

Pour une amplitude complexe $\underline{x}(t)$, vitesse et accélération sont données par :

$$\dot{\underline{x}}(t) = i\omega \underline{x}(t) \quad \text{et} \quad \ddot{\underline{x}}(t) = (i\omega)^2 \underline{x}(t) = -\omega^2 \underline{x}(t)$$

c) Méthodologie

Finalement, on remplace les grandeurs physiques réelles (mouvement x , vitesse \dot{x} , ...) par leur représentation complexe selon le schéma

$$\begin{aligned} x(t) = X_p \cos(\omega t + \varphi) &\rightarrow \underline{x}(t) = X_p e^{i(\omega t + \varphi)}, \\ \dot{x}(t) &\rightarrow \dot{\underline{x}}(t) = i\omega X_p e^{i(\omega t + \varphi)}, \\ \ddot{x}(t) &\rightarrow \ddot{\underline{x}}(t) = -\omega^2 X_p e^{i(\omega t + \varphi)}, \\ A_0 \cos(\omega t) &\rightarrow A_0 e^{i\omega t} \end{aligned}$$

L'équation canonique suivante : $\ddot{x} + 2\Gamma\dot{x} + \omega_0^2x = A_0 \cos \omega t$ devient après factorisation par $X_p e^{i(\omega t + \varphi)}$:

$$\left[-\omega^2 + i2\Gamma\omega + \omega_0^2\right] X_p e^{i(\omega t + \varphi)} = A_0 e^{i\omega t}$$

La simplification par $e^{i\omega t}$ permet de déterminer l'amplitude X_p et la phase φ du mouvement. Pour cela, on isole à gauche les inconnues et à droite les paramètres connus du problème

$$X_p e^{i\varphi} = \frac{A_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\Gamma\omega} \quad (*)$$

d) Amplitude et déphasage du mouvement en régime forcé

À partir de l'expression (*) ci-dessus, on reconnaît l'écriture exponentielle d'un nombre complexe par son module et son argument, il est alors assez simple d'exprimer l'amplitude et déphasage du mouvement. L'amplitude est donnée par le module de cette expression

$$X_p(\omega) = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\Gamma^2\omega^2}}$$

Le déphasage est l'argument de cette expression. Une façon simple de l'exprimer est d'utiliser les propriétés de l'argument³ :

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= \arg\left(\frac{A_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\Gamma\omega}\right) \\ &= \arg A_0 - \arg(\omega_0^2 - \omega^2 + i2\Gamma\omega) \\ &= 0 - \arctan \frac{2\Gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

Les représentations de l'amplitude et du déphasage en fonction de la pulsation sont données fig. 1.6 pour des frottements faibles ($\Gamma = \omega_0/10$) ou élevés ($\Gamma = 3\omega_0$).

3. On utilise le fait que $\arg(z_1/z_2) = \arg z_1 - \arg z_2$ et que pour $z = a + ib$, $\arg z = \arctan b/a$.

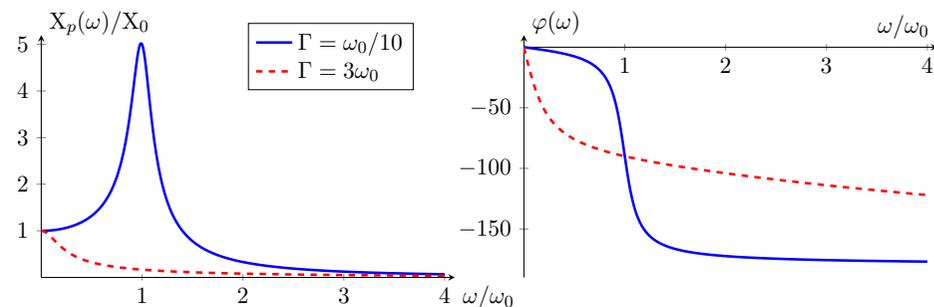


FIGURE 1.6 – Évolution de l'amplitude et du déphasage en fonction de la pulsation de l'excitation.

2 - Résonance en élongation

a) Condition de résonance

La possibilité d'un maximum d'amplitude pour $\omega \approx \omega_0$ fait apparaître trois domaines différents (voir la fig. 1.6).

Domaine basse fréquence ($\omega \ll \omega_0$) Notons X_0 l'amplitude pour une fréquence nulle alors : $X_0 = X_p(0) = \frac{A_0}{\omega_0^2}$. Le déphasage étant nul, on en déduit que pour $\omega \ll \omega_0$, la position prend une forme simple $x(t) \approx X_0 \cos(\omega t)$. Sans perte de généralité, on peut facilement interpréter le comportement dans le cas du ressort vertical présenté précédemment où $X_0 = U_0$. L'allongement du ressort reste quasiment constant à sa longueur d'équilibre, la masse suit les mouvements de l'excitation.

Domaine haute fréquence ($\omega \gg \omega_0$) . Pour des fréquences d'excitations élevées, l'amplitude du mouvement est quasi-nulle ($X_p(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0$). Le système n'a pas le temps de répondre aux sollicitations et reste quasiment figé à sa position d'équilibre. L'excitation est en opposition de phase avec les petits mouvements du système.

Domaine (non) résonant À la fréquence propre du système $\omega = \omega_0$, l'amplitude vaut alors :

$$X_p(\omega_0) = \frac{A_0}{2\Gamma\omega_0}$$

En particulier, si les pertes sont suffisamment faibles, $\Gamma \gg \omega_0$, alors $X_p(\omega_0) \gg X_0$. Il s'agit du phénomène de résonance en élongation. L'amplitude du mouvement peut être extrêmement grande.

Remarque 2 :

On démontre (voir annexe ??) que pour un amortissement vérifiant la condition $\Gamma < \omega_0/\sqrt{2}$, l'amplitude à la résonance est maximum pour

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\Gamma^2}$$

Le décalage en fréquence est d'autant plus faible que les frottements sont faibles ($\Gamma \ll \omega_0$) de sorte que l'on confonde souvent les deux pulsations.

Si les frottements sont élevés, l'amplitude des vibrations est limitée quelque soit la pulsation de l'excitation. Le système est alors non résonant ($X_p(\omega_0) \ll X_0$).

b) Notion de facteur de qualité

La figure 1.7 représente la résonance pour deux ratios Γ/ω_0 . La résonance est plus marquée lorsque les pertes sont faibles. On caractérise généralement la résonance par le facteur de qualité

$$Q = \frac{\omega_0}{2\Gamma}$$

À la pulsation propre du système, l'amplitude des oscillations forcées vaut

$$X_p(\omega_0) = \frac{A_0}{2\Gamma\omega_0} = \frac{\omega_0 X_0}{2\Gamma} = QX_0$$

Ainsi, le facteur de qualité caractérise l'amplification possible à la résonance. En l'absence de frottements ($\Gamma = 0$ donc $Q \rightarrow \infty$), on retrouve la divergence de la résonance déjà discutée en début de chapitre (cf. §I.1).

Le tableau 1.1 donne l'ordre de grandeur de facteur de qualité de quelques résonances mécaniques.

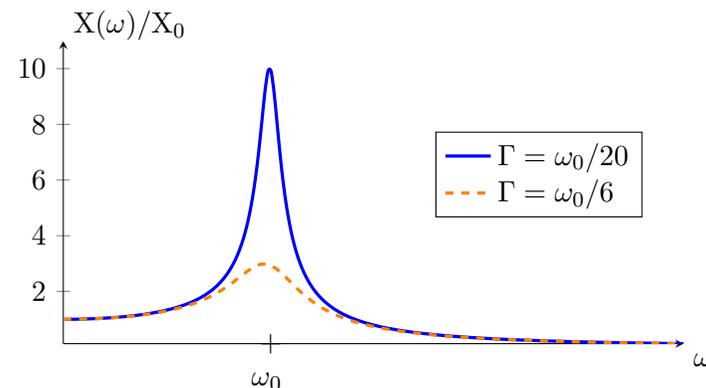


FIGURE 1.7 – Résonance en élongation pour $Q = 3$ ou $Q = 10$.

Oscillateur	Q
pendule	~ 100
diapason	~ 1000
corde de guitare	~ 1000
oscillateur à quartz	$\sim 10^4 - 10^6$

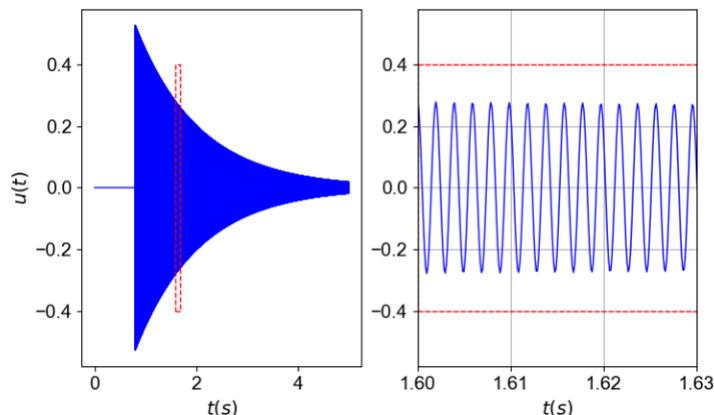
TABLE 1.1 – Facteur de qualités d'oscillateurs usuels

Propriétés :

- Il y a résonance en élongation seulement si $Q > \sqrt{2}/2$;
- la pulsation de résonance est proche de ω_0 ;
- Le facteur de qualité donne une indication de l'amplitude maximale à la résonance : $X(\omega_0) = Q \times X_0$. Plus le facteur de qualité est grand plus l'amplitude à la résonance est grande.

Exemple 2

Il est possible (mais difficile) de briser avec sa voix un verre de cristal en le faisant vibrer à sa fréquence de résonance. Pour appréhender ce phénomène, on modélise le bord du verre par un oscillateur de pulsation propre ω_0 et de facteur de qualité Q . Un enregistrement sonore d'un bref impact sur le verre donne le chronogramme suivant :



- 1 - À partir du chronogramme ^a, propose une estimation de Q et ω_0
- 2 - L'onde sonore de la voix correspond à un forçage sinusoïdale, quelle est la fréquence de l'onde pour espérer briser le verre ?

3 - L'onde impose une excitation d'amplitude $U_0 = 5 \mu\text{m}$, quelle est l'amplitude des oscillations du verre ?

4 - Justifier que pour éclater un verre, il faut tenir la note plusieurs secondes.

a. La méthode est détaillée dans le chapitre précédent cf. p.??.

Pour s'entraîner : exercices ??, ??, ??

1 - À partir de la figure de droite, on relève une pseudo-période de $T \approx 2,0$ ms. Le temps caractéristique de décroissance des oscillations est de $\tau \approx 1,2$ s. On en déduit que le facteur de qualité vaut :

$$Q = \frac{\omega_0}{2\Gamma} = \frac{\omega_0\tau}{2} \approx \frac{\pi\tau}{T} \approx 2000$$

2 - Lorsque la fréquence de l'onde excitatrice est accordée à la fréquence propre de l'oscillateur, il peut y avoir résonance soit : $f = \frac{1}{T} = 500$ Hz.

3 - À la résonance, l'amplitude est augmenté du facteur de qualité :

$$X_{max} = QU_0 = 1 \text{ cm}$$

On imagine aisément qu'une telle flexion peut briser le verre.

4 - Le temps d'établissement du régime permanent est identique au temps caractéristique d'atténuation du régime libre. Il faut donc maintenir la note sur une durée de quelques τ .

3 - Résonance en vitesse

a) Propriété

Pour un forçage sinusoïdale, nous avons vu que l'élongation se mettait sous la forme $x(t) = X_p(\omega) \cos(\omega t + \varphi)$. On en déduit la vitesse :

$$v(t) = \dot{x}(t) = -\omega X_p(\omega) \sin(\omega t + \varphi) = +\omega X_p(\omega) \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

que l'on peut mettre sous la forme générale amplitude et déphasage ⁴

4. On peut obtenir ce résultat plus directement en utilisant la représentation complexe $\underline{v} = V(\omega)e^{i(\omega t + \phi)} = \dot{\underline{x}}(t) = i\omega \underline{x}(t) = i\omega X_p(\omega)e^{i(\omega t + \varphi)} = \omega X_p(\omega)e^{i(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})}$. Ainsi, $V(\omega) = \omega X_p(\omega)$ et $\phi = \varphi + \pi/2$.

$$v(t) = V(\omega) \cos(\omega t + \phi)$$

$$\text{avec } \begin{cases} V(\omega) = \omega X_p(\omega) = \frac{\omega A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\Gamma^2 \omega^2}} \\ \phi = \varphi + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{2\Gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{cases}$$

En simplifiant numérateur et dénominateur par $\omega_0\omega$, on obtient l'amplitude de la vitesse sous la forme suivante⁵ :

$$\begin{aligned} V(\omega) &= \frac{A_0/\omega_0}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{4\Gamma^2}{\omega_0^2}}} = \frac{A_0/\omega_0}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{1}{Q^2}}} \\ &= \frac{QA_0/\omega_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \end{aligned}$$

Cette fonction présente au dénominateur une somme de deux nombres positifs 1 et $Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$. On en déduit que l'amplitude de la vitesse est maximale lorsque cette somme est minimale, c'est-à-dire lorsque le second terme est nul. Le minimum apparaît lorsque $\omega = \omega_0$. Ainsi, l'amplitude de la vitesse vaut alors :

$$V(\omega_0) = \frac{QA_0}{\omega_0}$$

À la résonance, la vitesse est en phase avec l'excitation ($\phi = 0$) et l'amplitude de la vitesse y est maximale. À cette pulsation, on montre que la transmission d'énergie entre l'excitation et l'oscillateur est maximale. On remarque sur la figure 1.8 que plus le facteur de qualité est grand plus la résonance est « piquée ». On définit alors l'acuité de la résonance comme l'intervalle de pulsations où la transmission d'énergie (proportionnelle à V^2 , cf. énergie cinétique) est supérieure à la moitié de la valeur maximale, c'est-à-dire que la vitesse y est supérieure à $V_{max}/\sqrt{2}$. Le calcul de ces pulsations est proposé dans l'exemple suivant.

Propriétés :

- Il y a toujours résonance en vitesse quelque soit Q ;
- La résonance en vitesse a lieu pour $\omega = \omega_0$ la vitesse du solide est en phase avec l'excitation.
- l'acuité de la résonance^a est définie par $Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$ où les pulsations ω_1 et ω_2 vérifient $V(\omega_{1/2}) = V_{max}/\sqrt{2}$.

a. Cf. exemple suivant

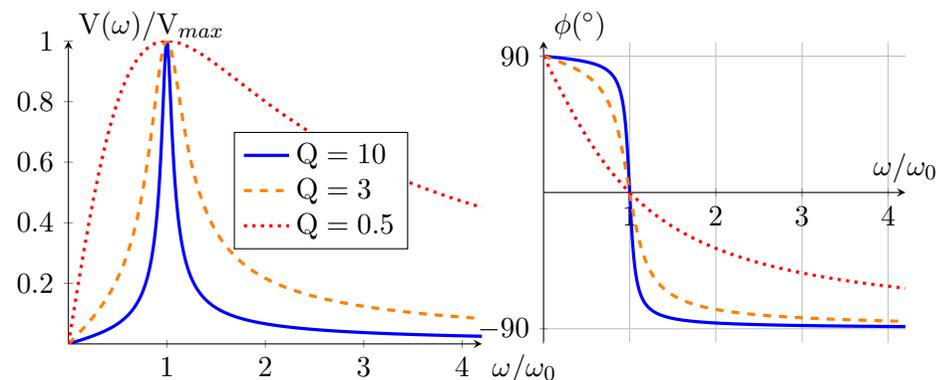
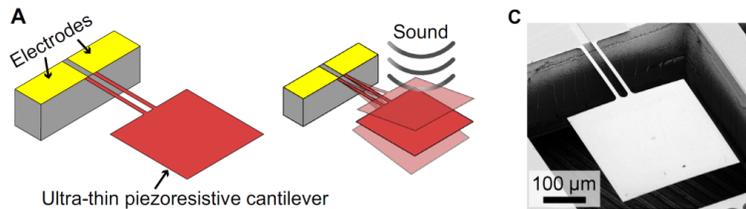


FIGURE 1.8 – Amplitude de la vitesse et sa phase.

Exemple 3 Il est possible de fabriquer de petits microphones sensibles à la vitesse de déplacement de l'air permettant de mesurer le rythme cardiaque (*d'après Highly sensitive low-frequency-detectable acoustic sensor using a piezoresistive cantilever for health monitoring applications, Nature. Sc. Rep. 2023*), reproduction sous licence Creative Commons 4.0.

5. Il s'agit de l'écriture canonique associée aux filtres passe-bande.



En utilisant la notation complexe, on montre que le mouvement de la partie mobile du microphone suit

$$\underline{X}(t) = X(\omega)e^{i(\omega t + \phi)} \quad \text{avec} \quad X(\omega)e^{i\phi} = \frac{F/m}{\omega^2 - \omega_0^2 + \frac{i\omega_0\omega}{Q}}$$

1 - Montrer que la vitesse s'écrit

$$\underline{V}(t) = V(\omega)e^{i(\omega t + \phi)} \quad \text{avec} \quad V(\omega)e^{i\phi} = \frac{V_0}{1 + iQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

3 - Exprimer les deux pulsations ω_1 et ω_2 telles que la vitesse est réduite d'un facteur $\sqrt{2}$.

4 - En déduire un lien entre Q , ω_1 , ω_2 et ω_0 .

Pour s'entraîner : exercices ??, ??

1 - En utilisant la notation complexe, la vitesse est donnée par :

$$\underline{V}(t) = \dot{\underline{X}}(t) = i\omega X(\omega)e^{i(\omega t + \phi)} = V(\omega)e^{i(\omega t + \phi)}$$

Posons $V(\omega)e^{i\phi} = i\omega Z(\omega)e^{i\phi} = \frac{\frac{F}{m}i\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{i\omega_0\omega}{Q}}$. En divisant par $i\omega$, il vient :

$$\underline{V}(\omega) = \frac{F/m}{\frac{\omega_0^2}{i\omega} + i\omega + \frac{\omega_0}{Q}}$$

Factorisons le dénominateur par ω_0/Q , on a :

$$\underline{V}(\omega) = \frac{\frac{QF}{m\omega_0}}{\frac{Q\omega_0}{i\omega} + iQ\frac{\omega}{\omega_0} + 1} = \frac{\frac{QF}{m\omega_0}}{1 + iQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

On obtient la forme demandée avec $V_0 = \frac{QF}{m\omega_0}$

2 - La norme de la vitesse vaut :

$$V(\omega) = \frac{V_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

Les pulsations demandées vérifient : $Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = \pm 1$. Posons $x = \omega/\omega_0$, on doit résoudre : $Q(x - 1/x) = \pm 1$ soit $x^2 \pm x/Q - 1 = 0$.

Le discriminant de cette équation du second degré est toujours positif : $\Delta = 1/Q^2 + 4 > 0$. Il y a donc quatre solutions réelles : $x = \frac{\pm 1/Q \pm \sqrt{\Delta}}{2}$. Remarquons que $\Delta > 1/Q^2$ donc que $\sqrt{\Delta} > 1/Q$. Comme $x = \omega/\omega_0$ est positif, les deux seules solutions positives sont :

$$x = \frac{\pm 1/Q + \sqrt{\Delta}}{2}$$

Ainsi, les pulsations demandées sont : $\omega_1 = \omega_0 \frac{-1/Q + \sqrt{\Delta}}{2}$ et $\omega_2 = \omega_0 \frac{1/Q + \sqrt{\Delta}}{2}$.

4 - L'acuité de la résonance est liée au facteur de qualité : $Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$.

Remarque 3 :

Il est possible d'observer des effets quantiques sur des nano-objets vibrants. Des chercheurs ont réalisé de systèmes mécaniques de taille nanoscopiques (appelées NEMS pour Nano Electro Mechanical System). Cette "nano-corde" vibrante peut être utilisée comme détecteur d'accélération en mesurant les fluctuations de sa capacité électrique. Avec la miniaturisation de ces dispositifs, on commence à observer des phénomènes quantiques pour des températures inférieures à 100 mK (cf. fig. 1.9).

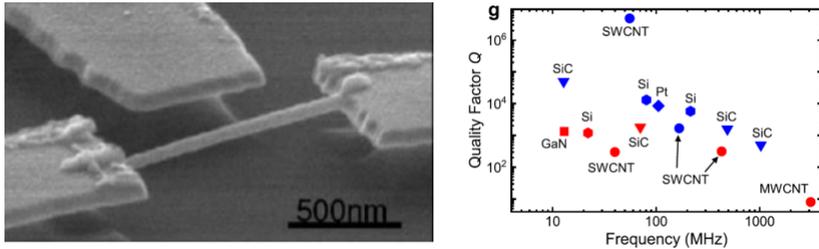


FIGURE 1.9 – Nanoresonateur et dépendance du facteur de qualité avec la fréquence, reproduit de *Nanowire-based very-high-frequency electromechanical resonator*, *Appl. Phys. Lett.*, 2003 avec la permission d’AIP Publishing et *Nano-mechanical Resonators : Toward Atomic Scale*, *ACS Nano* 2022, reproduction sous licence Creative Commons 4.0.

b) Bilan énergétique

On considère à nouveau le système masse-ressort en présence de frottements et soumis à une force oscillante \vec{F} (voir §2 -). La puissance instantanée associée à l’excitation par la force \vec{F} est

$$\mathcal{P}(t) = \vec{F} \cdot \vec{v} = F(t)\dot{x}(t)$$

Une méthode générale pour l’exprimer est de partir du PFD, pour exprimer $F(t)$

$$\begin{aligned} \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{f} + \vec{F} &= m\vec{a} \\ m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx &= F(t) \end{aligned}$$

On définit la puissance en multipliant par \dot{x} :

$$F(t)\dot{x} = m\ddot{x}\dot{x} + \alpha\dot{x}^2 + kx\dot{x}$$

Finalement, la puissance moyenne sur une période d’oscillation $T = 2\pi/\omega$ vaut

$$\langle \mathcal{P}(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T F(t)\dot{x}dt = \frac{1}{T} \int_0^T m\ddot{x}\dot{x}dt + \frac{1}{T} \int_0^T \alpha\dot{x}^2dt + \frac{1}{T} \int_0^T kx\dot{x}dt$$

De plus⁶ $\ddot{x}\dot{x} \propto \cos(\omega t + \varphi) \sin(\omega t + \varphi)$ est périodique, de même que $x\dot{x}$. Donc leur intégration sur une période est nulle. Finalement,

$$\langle \mathcal{P}(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \alpha\dot{x}^2dt$$

6. Le signe \propto signifie proportionnel à.

En notant que les forces de frottements sont $\vec{f} = -\alpha\vec{v} = -\alpha\dot{x}\vec{e}_x$, on peut aussi écrire

$$\langle \mathcal{P}(t) \rangle = -\frac{1}{T} \int_0^T \vec{f} \cdot \vec{v}dt$$

La puissance moyenne fournie par la force excitatrice compense exactement les pertes dues aux forces de frottements $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$. La puissance fournie est donc totalement absorbée par le système mécanique pour compenser les pertes. On peut retrouver ce résultat à partir du théorème de l’énergie mécanique. L’énergie mécanique ne varie pas sur une période (car la masse revient au même point avec la même vitesse). Les seules forces dissipatives étant la force excitatrice \vec{F} et les frottements \vec{f} ;

$$\begin{aligned} \Delta E_m &= W(\vec{F}) + W(\vec{f}) \\ E_c(T) + E_p(T) - [E_c(0) + E_p(0)] &= W(\vec{F}) + W(\vec{f}) \\ 0 &= \int_0^T \vec{F}(t) \cdot \vec{v}dt + \int_0^T \vec{f} \cdot \vec{v}dt \\ \int_0^T \vec{F}(t) \cdot \vec{v}dt &= - \int_0^T \vec{f} \cdot \vec{v}dt \end{aligned}$$

Le travail de la force d’excitation est moteur ($W(\vec{F}) > 0$) et compense le travail résistant des forces de frottements ($W(\vec{f}) < 0$). Les puissances moyennes se déduisent du travail via $\langle \mathcal{P}(t) \rangle = W/T$. Par contre, les puissances instantanées des forces d’excitation et de frottements ne se compensent pas car il faut alors prendre en compte la variation de l’énergie mécanique, qui n’est nulle que sur une période.

Finalement, on peut calculer⁷

$$\begin{aligned} P(\omega) = \langle \mathcal{P}(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \alpha v^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T \alpha V^2(\omega) \cos^2(\omega t + \varphi) \\ &= \frac{1}{2} \alpha V^2(\omega) \\ &= \frac{\alpha Q^2 A_0^2 / 2\omega_0^2}{1 + Q^2 \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} \end{aligned}$$

7. On a utilisé $\langle \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle = 1/2$ qui se déduit du graphique de $\cos^2(\omega t + \varphi)$ ou peut être obtenu en linéarisant selon $\int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi) dt = (1/2) \int_0^T [\cos 2(\omega t + \varphi) + 1] dt = (1/2) [\sin 2(\omega t + \varphi)/(2\omega) + 1]_0^T = T/2$.

L'expression de l'amplitude de la vitesse $V(\omega)$ étant donnée dans l'exemple précédent. La puissance absorbée par le système est maximale à la résonance et vaut alors

$$P_{max} = P(\omega_0) = \frac{\alpha Q^2 A_0^2}{2\omega_0^2}$$

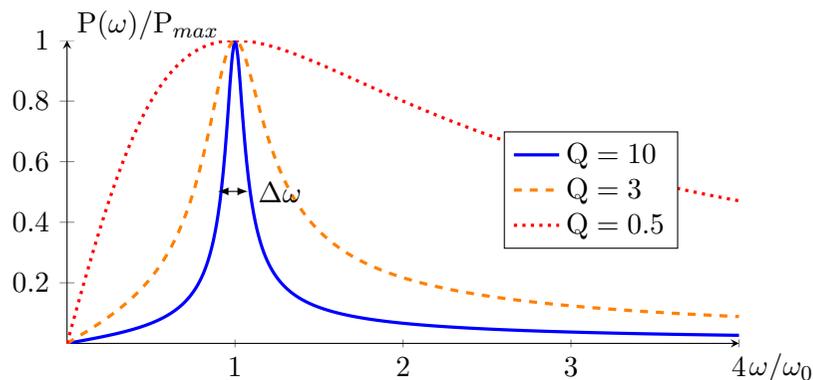


FIGURE 1.10 – Résonance en puissance.

La puissance est représentée sur la figure 1.10. Puisque les pertes dépendent de la vitesse, l'excitation doit être en phase avec la vitesse ($\phi = \varphi + \pi/2 = 0$) pour compenser efficacement les frottements. Cela se produit pour $\omega = \omega_0$ et conduit à la résonance en vitesse. Pour de faibles pertes, on observe aussi une résonance en élongation.

Le facteur de qualité caractérise la forme de la résonance en puissance (ou du carré de la vitesse). On peut montrer (voir annexe ??) que le facteur de qualité dépend de la largeur à mi-hauteur de la résonance (voir aussi la figure 1.10).

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{2\Gamma}$$

Ainsi, plus le facteur de qualité est élevée, plus la résonance est piquée.

Propriétés :

Le facteur de qualité est relié à l'acuité de la résonance :

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{2\Gamma}$$

où $\Delta\omega$ est l'intervalle de pulsation vérifiant $P(\omega) \geq P_{max}/2$

L'énergie apportée par la force excitatrice compense exactement les pertes par frottements sur une période

- À la résonance, la vitesse du solide est en phase avec l'excitation et la puissance absorbée par le système est maximale

🔥 L'essentiel

Équation de l'oscillateur harmonique en régime forcé

$$\ddot{x} + 2\Gamma\dot{x} + \omega_0^2x = A_0 \cos \omega t$$

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{\omega_0}{Q}\dot{x}}_{\text{amortissement}} + \underbrace{\omega_0^2x}_{\text{oscillation}} = \underbrace{A_0 \cos \omega t}_{\text{forçage}}$$

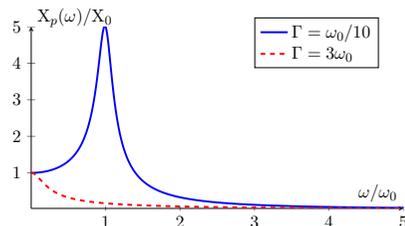
Facteur de qualité $Q = \omega_0/(2\Gamma)$

Réponse en élongation

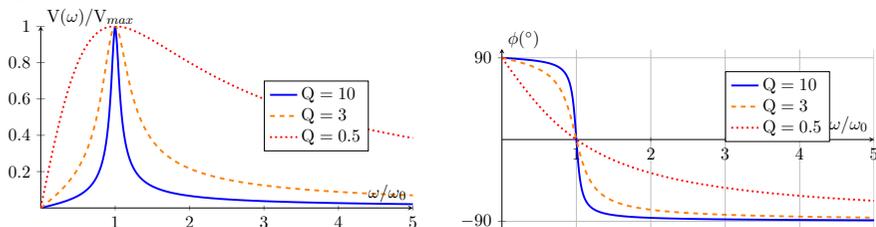
En dehors du temps de relaxation du régime libre ($t \gg 1/\Gamma$), l'amplitude de l'oscillateur forcé est donné par : $x(t) = X_p \cos(\omega t + \varphi)$. L'amplitude (X_p) et le déphasage par rapport à l'excitation (φ) sont obtenus grâce à la représentation complexe : $\underline{x}(t) = X_p e^{i(\omega t + \varphi)}$.

À basse fréquence ($\omega \ll \omega_0$), l'allongement du ressort est quasi-nul. À haute fréquence ($\omega \gg \omega_0$), le système reste quasiment figé à sa position d'équilibre.

Pour $\omega \approx \omega_0$, seulement si les frottements sont suffisamment faibles ($\Gamma < \omega_0/\sqrt{2}$ ou $Q > \sqrt{2}/2$), l'amplitude est maximum. Il s'agit du phénomène de résonance. Le facteur de qualité donne l'amplitude maximale à la résonance : $X(\omega_0) = Q \times X_0$.



Réponse en vitesse



Pour $\omega = \omega_0$, il y a toujours résonance en vitesse quelque soit les pertes (donc quelque soit Q ou Γ). La vitesse du solide, en phase avec

l'excitation conduit à une puissance absorbée maximale. L'acuité de la résonance vérifie :

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$