Chapitre 1

Propagation dans un plasma

La matière peut exister essentiellement sous trois formes bien familières : l'état solide, l'état liquide et l'état gazeux. Il existe cependant un quatrième état de la matière, appelé plasma, obtenu lorsque la matière est partiellement ou totalement ionisée. les astrophysiciens estiment que 99% de la matière est sous cette forme. On le rencontre, sur Terre, dans la partie ionisée de l'atmosphère (ionosphère et magnétosphère), dans les étoiles, le vent solaire, les arcs électriques....

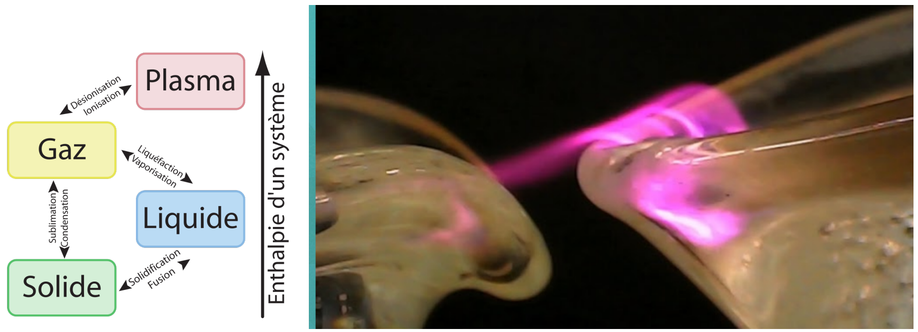


FIGURE 1.1 – L'état plasma parmi les différents états usuels. Cliché, obtenu par une différence de potentiel de 4 kV entre deux béchers remplis d'eau. Cliché de A. Breuillet, Y. Cardot, T. De Warren et A. Relave, Olympiades de physiques 2023.

La science des plasmas permet d'appréhender les phénomènes astrophysiques (aurores boréales, éruption solaires, atmosphères stellaires...) mais porte aussi des applications industrielles comme le traitement de surface par plasma ou la réalisation de sources d'énergie par fusion thermonucléaire. La manipulation des équations de mécanique des fluides pour comprendre le mouvement des particules ionisées associée aux équations de Maxwell constitue une branche de la physique appelée magnétohydrodynamique qui dépasse le cadre de ce cours. Il s'agit surtout ici de comprendre la propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu dit dispersif, c'est-à-dire où la vitesse des ondes dépend de leur pulsation.

I. Ondes et charges dans un plasma

1 - Description d'un plasma

Définition :
Un plasma est un gaz conducteur composé d'atomes ou de molécules partiellement ou complètement ionisés mais qui reste globalement électriquement neutre.

Le terme "plasma" est introduit par I. Langmuir en 1928 pour décrire l'état de la matière dans des tubes à décharge où le gaz ionisé avait un comportement gélatineux. Pour créer un plasma à partir d'un gaz neutre, il faut lui apporter suffisamment d'énergie pour arracher les électrons aux noyaux. On y parvient

- à l'aide de décharges électriques (cf. fig. 1.1) ;
- par chauffage extrême permettant les collisions des atomes (centre du soleil, réacteurs expérimentaux à fusion nucléaire type Tokamak ou laser) ;
- ou encore par rayonnement ionisant. L'absorption de photons UV énergétiques. La ionosphère terrestre provient de ce dernier cas de figure.

Le comportement des plasmas dépend notamment des interactions entre les espèces ionisées. Il est pratique de classer les plasmas selon leur densité volumique. Avant de discuter de la densité des plasmas, il est utile de fixer des ordres de grandeur en considérant un gaz non ionisé. Pour un gaz parfait à température ambiante, on peut écrire $\mathrm{PV} = n\mathrm{RT}$ avec $n = 1/\mathcal{N}_\mathrm{A}$ pour une molécule de gaz. Soit $\mathrm{PV} = k_\mathrm{B}\mathrm{T}$ pour une molécule [1]. Et sa densité volumique (nombre de molécules par unité de volume) vaut $n^\star = 1/\mathrm{V} = \mathrm{P}/k_\mathrm{B}\mathrm{T} \sim 2 \cdot 10^{25}\,\mathrm{m}^{-3}$ à température ambiante. D'autre part, on peut relier la densité volumique au libre parcours moyen. Pour un gaz, la modélisation usuelle est une collection d'entités qui s'entrechoquent. Le libre parcours moyen ℓ est alors défini comme la distance moyenne parcourue entre deux chocs, assimilée à la distance entre deux particules. Alors $n^\star = 1/\ell^3$ et $\ell \sim n^{\star -1/3} \sim 4$ nm pour un gaz parfait.

Dans un plasma, les interactions entre espèces ionisées sont principalement de nature électrostatiques mais on peut généraliser la notion de collision (choc avec contact ou interactions attractive/répulsive sans contact) et établir la modification du mouvement après collision (via la conservation de la quantité de mouvement). Le libre parcours moyen est alors défini comme une distance à partir de laquelle la déviation d'une particule est importante. On obtient des ordres de grandeurs plus élevées que pour un gaz parfait donc une densité volumique plus faible.

D'autre part, les interactions électromagnétiques entre particules chargées dépend du champ électrique générées par l'ensemble des autres espèces chargées. On peut définir une distance caractéristique λ_D appelée distance de Debye, au-delà de laquelle les effets des autres charges est négligeable. Cette grandeur dépend de la température et de la densité volumique : $\lambda_\mathrm{D} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_\mathrm{B}\mathrm{T}}{n^\star q^2}}$ où q est la charge des espèces ionisées.

1. $k_\mathrm{B} = \mathrm{R}/\mathcal{N}_\mathrm{A} = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}$ est la constante de Boltzmann.

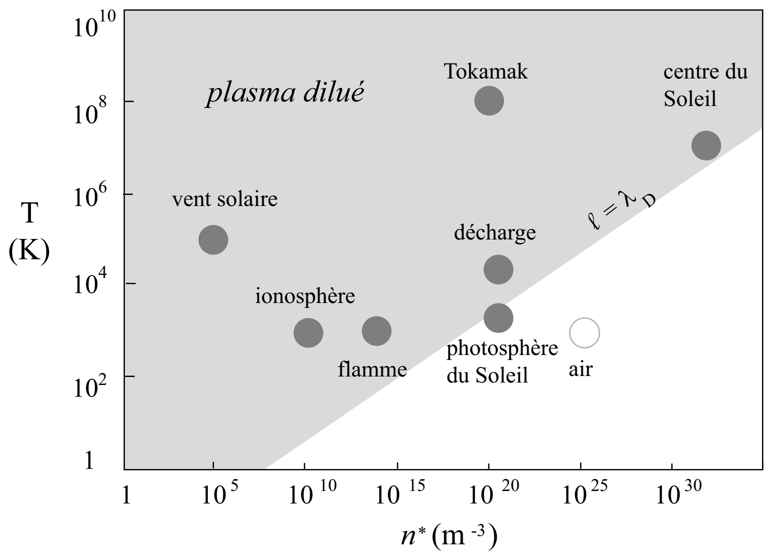


FIGURE 1.2 – Quelques densités de plasmas.

La figure 1.2 présente les ordres de grandeurs des densités de différents plasmas. On a aussi placé la densité de l'air à température ambiante à titre de comparaison. L'éventail des plasmas possibles est très important et la physique qui en découle également. Dans ce chapitre, nous poserons des hypothèses simplificatrices sur les plasmas pour une première approche. Nous verrons qu'à faible densité, les collisions entre les entités (au sens large d'interactions et chocs) sont quasiment-inexistants. Néanmoins, il y a un couplage entre le mouvement des charges et le champ électromagnétique. Ce dernier met en mouvement les charges qui à leur tour modifient le champ électromagnétique. On observe alors des effets collectifs.

Définition :

Un plasma est dit **peu dense** ou **dilué** lorsque le libre parcours moyen est grand devant la distance caractéristique d'écrantage des effets électromagnétiques : $\ell \gg \lambda_\mathrm{D}$.

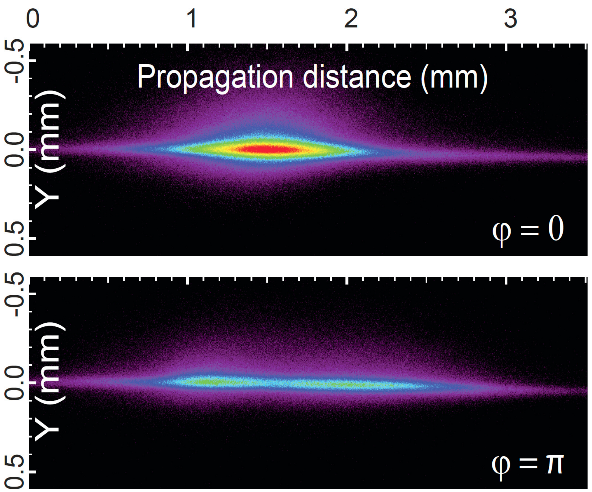


FIGURE 1.3 – Observation de différents régimes de propagation d'un laser dans un plasma. D'après Béjot *et al*, Phys. Rev. A **92**, 053417 (2015). ©(2024) aps.

Définition :
Un plasma est **froid** lorsque l'agitation thermique ne permet pas la ionisation du gaz.

La ionosphère dont parle la plupart des exemples de ce chapitre, est considérée comme un plasma froid.

Exemple 1
Calculer la température pour qu'un électron soit relativiste. Les plasmas cités dans la figure sont ils relativistes ou non ? On pourra considérer que la vitesse moyenne des électrons suit une distribution de Maxwell-Boltzmann :

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k_{\mathrm{B}}\mathrm{T}$$

Données : Masse de l'électron $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg ; constante de Boltzmann $k_{\mathrm{B}} = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J\cdot K^{-1}}$; vitesse de la lumière $c = 3{,}00 \cdot 10^8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

On a immédiatement $\mathrm{T} = \dfrac{mv^2}{3k_{\mathrm{B}}}$.
Pour les électrons, on obtient un gaz relativiste pour une température caractéristique voisine de $\mathrm{T} \sim mc^2/3k_{\mathrm{B}} = 2{,}0 \cdot 10^9$ K. Dans une large gamme de température, on peut donc raisonnablement supposer que les électrons sont non relativistes.

2 - Mouvement des charges

Dans la suite, on choisit un modèle de plasma situé dans le domaine $x > 0$, constitué de $n^\star$ ions (de masse M et charge[2] $+e$ et de $n^\star$ électrons (de masse m et de charge $-e$) par unité de volume (cf. fig. 1.4). On suppose le plasma suffisamment dilué pour négliger toutes interactions entre les ions : ni attraction ou répulsion électrostatique entre deux entités à courte distance, ni choc. On s'intéresse alors à la propagation d'une onde électromagnétique transverse dans ce milieu (cf. fig.1.4). Cette onde interagit avec les particules chargées qui elles-mêmes sont sources d'un champ électromagnétique.

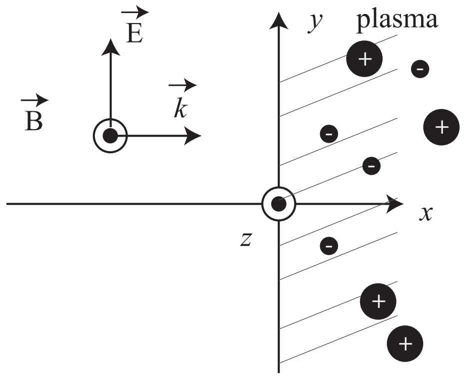


FIGURE 1.4 – OPPM polarisée selon Oy se propageant dans un plasma.

On note $\vec{\mathrm{V}}$ et $\vec{v}$ les vitesses des ions et des électrons. Dans le référentiel d'étude supposé galiléen, les charges sont soumises à

- leur poids, négligé devant la force de Lorentz
- la force de Lorentz pour les électrons : $\vec{\mathrm{F}} = -e(\vec{\mathrm{E}} + \vec{v} \wedge \vec{\mathrm{B}})$
- la force de Lorentz pour les ions : $\vec{\mathrm{F}} = e(\vec{\mathrm{E}} + \vec{v} \wedge \vec{\mathrm{B}})$

Une OPPM vérifie $\vec{\mathrm{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{\mathrm{E}}}{\omega}$. Pour un plasma suffisamment dilué, en supposant que[3] $\omega \sim kc$, l'amplitude du champ magnétique vérifie :

$$||\vec{\mathrm{B}}|| \sim k \times \mathrm{E}/\omega \sim \mathrm{E}/c$$

2. Dans un souci de simplicité, la charge des ions est opposée à celle des électrons, un ion chargé $+Ze$ donnerait des résultats identiques.
3. Cette hypothèse peut être vérifiée comme limite basse *a posteriori*. Par définition $\omega = kv_\phi$ et on montrera que $v_\phi \geqslant c$.

Ainsi, les électrons étant non-relativistes, la composante magnétique de la force de Lorentz est négligée :

$$\frac{||e\vec{v}\wedge\vec{\mathrm{B}}||}{||e\vec{\mathrm{E}}||}\sim\frac{v}{c}\ll 1$$

La 2$^{\mathrm{e}}$ loi de Newton appliquée à un électron [4] de masse m et au noyau de masse M conduit à :

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=-e\vec{\mathrm{E}}\quad\text{et}\quad\mathrm{M}\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{V}}}{\mathrm{d}t}=e\vec{\mathrm{E}}$$

En présence d'une onde électromagnétique sinusoïdale, on obtient en représentation complexe :

$$\underline{\vec{v}}=-\frac{e}{im\omega}\underline{\vec{\mathrm{E}}}\text{ et }\underline{\vec{\mathrm{V}}}=\frac{e}{i\mathrm{M}\omega}\underline{\vec{\mathrm{E}}}$$

Ainsi, $|\mathrm{V}/v|=|m/\mathrm{M}|\ll 1$ ce qui consiste à négliger le mouvement des ions devant celui des électrons car ils sont beaucoup plus lourds. On peut donc obtenir l'expression du vecteur densité de courant limité à celui des électrons [5] :

$$\vec{j}=-n^\star e\vec{v}+n^\star e\vec{\mathrm{V}}\approx-n^\star e\vec{v}$$

Le lien avec le champ électrique sinusoïdal est alors en représentation complexe

$$\underline{\vec{j}}=-n^\star e\underline{\vec{v}}=\underbrace{\frac{n^\star e^2}{im\omega}}_{\underline{\sigma}}\underline{\vec{\mathrm{E}}}=-i\frac{n^\star e^2}{m\omega}\underline{\vec{\mathrm{E}}}=e^{-i\frac{\pi}{2}}\frac{n^\star e^2}{m\omega}\underline{\vec{\mathrm{E}}}$$

Propriété :
La conductivité électrique étant imaginaire pure, le vecteur densité de courant et le champ électrique sont en quadrature de phase.

4. L'approche hydrodynamique, plus rigoureuse nécessite de décrire le plasma comme un fluide continu. Le choix effectué ici aboutit au même résultat mais présente des subtilités et néglige les effets thermiques.

5. Le lien entre $\vec{j}$ et la vitesse $\vec{v}$ d'un électron isolé suppose que tous les électrons ont la même vitesse. L'approximation effectuée ici suppose que l'on a négligé les effets thermiques conduisant à une répartition des vitesses différentes.

II. Propagation dans un plasma

1 - Équation de propagation

Propriété :
La propagation d'une onde transverse dans un plasma impose une densité de charge nulle.

Pour une onde transverse, le champ électrique est perpendiculaire à la direction de propagation donnée par $\vec{k}$. Utilisons la notation complexe dans l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\mathrm{div}\,\underline{\vec{\mathrm{E}}}=-i\underbrace{\vec{k}\cdot\underline{\vec{\mathrm{E}}}}_{\perp}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Comme le champ électrique est transverse, $\vec{k}\perp\underline{\vec{\mathrm{E}}}$, on en déduit que la densité volumique de charge est nulle [6]. Les équations de Maxwell se résument donc, en représentation complexe, à :

- Maxwell-Gauss : $\mathrm{div}\,\underline{\vec{\mathrm{E}}}=0$
- Maxwell-Faraday : $\vec{\mathrm{rot}}\,\underline{\vec{\mathrm{E}}}=-\frac{\partial\underline{\vec{\mathrm{B}}}}{\partial t}=-i\omega\underline{\vec{\mathrm{B}}}$
- Maxwell-Thomson : $\mathrm{div}\,\underline{\vec{\mathrm{B}}}=0$
- Maxwell-Ampère : $\vec{\mathrm{rot}}\,\underline{\vec{\mathrm{B}}}=\mu_0\underline{\vec{j}}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\underline{\vec{\mathrm{E}}}}{\partial t}=\mu_0\underline{\vec{j}}+i\omega\mu_0\varepsilon_0\underline{\vec{\mathrm{E}}}=$ avec $\underline{\vec{j}}=\frac{n^\star e^2}{im\omega}\underline{\vec{\mathrm{E}}}$

L'utilisation des formules d'analyse vectorielle conduisent à :

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\underbrace{\vec{\mathrm{rot}}\,\underline{\vec{\mathrm{E}}}}_{-i\omega\underline{\vec{\mathrm{B}}}}=\vec{\mathrm{grad}}\,\underbrace{\mathrm{div}\,\underline{\vec{\mathrm{E}}}}_{0}-\Delta\underline{\vec{\mathrm{E}}}$$

6. L'existence d'une densité de charge non nulle est évoquée en annexe I

Puis

$$-i\omega\Big(\underbrace{\vec{\text{rot}}\,\underline{\vec{\text{B}}}}_{\mu_0\underline{\vec{j}}+i\omega\mu_0\varepsilon_0\underline{\vec{\text{E}}}}\Big) = -\Delta\underline{\vec{\text{E}}} \quad \text{soit} \quad -i\omega\mu_0\underline{\vec{j}} + \omega^2\mu_0\varepsilon_0\underline{\vec{\text{E}}} = -\Delta\underline{\vec{\text{E}}}$$

Avec $\mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$, et la densité de courant : $\underline{\vec{j}} = \frac{n^\star e^2}{im\omega}\underline{\vec{\text{E}}}$, on obtient

$$\frac{\mu_0 n^\star e^2}{m}\underline{\vec{\text{E}}} - \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\partial^2\underline{\vec{\text{E}}}}{\partial t^2} = \Delta\underline{\vec{\text{E}}}$$

En posant $\omega_p^2 = n^\star e^2/m\varepsilon_0$, on obtient l'équation de propagation suivante :

$$\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}\underline{\vec{\text{E}}} = \Delta\underline{\vec{\text{E}}}$$

Exemple 2 À partir des équations de Maxwell et de l'expression de la densité de courant $\underline{\vec{j}} = \frac{-n^\star e^2}{im\omega}\underline{\vec{\text{E}}}$, montrer qu'avec un champ électrique transverse, le champ magnétique dans un plasma satisfait l'équation suivante en représentation complexe

$$\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}\underline{\vec{\text{B}}} = \Delta\underline{\vec{\text{B}}}$$

on explicitera la valeur de ω_p.

Pour s'entraîner : exercice 1

L'utilisation des formules d'analyse vectorielle conduisent à :

$$\vec{\text{rot}}\ \underbrace{\vec{\text{rot}}\,\underline{\vec{\text{B}}}}_{\mu_0\underline{\vec{j}}+i\omega\mu_0\varepsilon_0\underline{\vec{\text{E}}}} = \vec{\text{grad}}\ \underbrace{\text{div}\,\underline{\vec{\text{B}}}}_{0} - \Delta\underline{\vec{\text{B}}}$$

On obtient alors :

$$\mu_0\vec{\text{rot}}\ \underbrace{\underline{\vec{j}}}_{\frac{n^\star e^2}{im\omega}\underline{\vec{\text{E}}}} + i\omega\mu_0\varepsilon_0\,\underbrace{\vec{\text{rot}}\,\underline{\vec{\text{E}}}}_{-i\omega\underline{\vec{\text{B}}}} = -\Delta\underline{\vec{\text{B}}}$$

Avec $\mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$, on obtient

$$\frac{\mu_0 n^\star e^2}{im\omega}\underbrace{\vec{\text{rot}}\,\underline{\vec{\text{E}}}}_{-i\omega\underline{\vec{\text{B}}}} - \frac{\omega^2}{c^2}\underline{\vec{\text{B}}} = -\Delta\underline{\vec{\text{B}}}$$

En utilisant l'expression de la pulsation plasma $\omega_p^2 = n^\star e^2/m\varepsilon_0 = \mu_0 c^2 n^\star e^2/m$, on obtient le résultat voulu :

$$\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}\underline{\vec{\text{B}}} = \Delta\underline{\vec{\text{B}}}$$

2 - Ondes progressives

a) Relation de dispersion

On s'intéresse à la propagation d'une OPPM dans le plasma. Pour une onde polarisée rectilignement selon $\vec{e}_y$, on peut écrire le champ électrique sous la forme : $\underline{\vec{\text{E}}} = \text{E}_0 e^{i(\omega t - kx)}\,\vec{e}_y$. En notation complexe l'équation de propagation devient :

$$\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}\underline{\vec{\text{E}}} = \underbrace{\Delta\underline{\vec{\text{E}}}}_{-k^2\underline{\vec{\text{E}}}}$$

On obtient, après simplification, la relation de dispersion dans un plasma dilué :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

Pour un plasma très dilué, $n^\star \to 0$, donc $\omega_p \to 0$, on retrouve l'équation de dispersion du vide $k^2 = \omega^2/c^2$.

b) Condition de propagation

Pour $\omega < \omega_p$, la relation de dispersion impose $k^2 < 0$. La seule solution pour le vecteur d'onde consiste donc à l'écrire de façon imaginaire :

$$k = \pm i\frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c} = \pm i\kappa$$

L'écriture du champ électrique de l'onde initialement sous la forme $\underline{\vec{\text{E}}} = \text{E}_0 e^{i(\omega t - kx)}\,\vec{e}_y$ devient, avec $k = -i\kappa$

$$\underline{\vec{\mathrm{E}}}(x,t) = \mathrm{E}_0 e^{i(\omega t - i\kappa x)}\,\vec{e}_y = \mathrm{E}_0 e^{i\omega t} e^{-\kappa x}\,\vec{e}_y$$

En notation réelle, on obtient $\vec{\mathrm{E}}(x,t) = \vec{\mathrm{E}}_0 \cos(\omega t) e^{-\kappa x}\,\vec{e}_y$. L'onde n'est plus progressive, elle est stationnaire. L'amplitude étant exponentiellement décroissante sur une distance caractéristique $1/\kappa$, on parle d'ondes stationnaires **évanescentes**[7]. Pour des pulsations supérieures à la pulsation plasma ($\omega > \omega_p$), le vecteur d'onde est réel et s'écrit

$$k = \pm \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$$

La solution est donc une onde transverse propagative, pouvant s'écrire pour une propagation selon $+\mathrm{O}x$ polarisée selon $\vec{e}_y$:

$$\underline{\vec{\mathrm{E}}} = \mathrm{E}_0 e^{i(\omega t - kx)}\,\vec{e}_y$$

Propriété :

Pour des ondes transverses à une pulsation supérieure à ω_p, le plasma est dit **transparent** des ondes monochromatiques peuvent se propager. Le cas échéant ($\omega < \omega_p$), le plasma est dit **réactif**, les ondes sont évanescentes.

3 - Vitesse de phase

Pour une onde plane progressive monochromatique se propageant dans un milieu quelconque, on définit la vitesse de phase par (cf. chap. **??**)

$$v_\phi = \omega / k$$

Dans le cas d'une onde se déplaçant dans un plasma, la relation de dispersion $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ donne la vitesse de phase suivante pour $\omega > \omega_p$

$$v_\phi = c\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}$$

7. Pour un plasma occupant l'espace $x > 0$, on ne retient pas la forme $k = +i\kappa$ qui conduirait à un champ divergent pour $x \to \infty$ $\vec{\mathrm{E}}(x,t) = \vec{\mathrm{E}}_0 \cos(\omega t) e^{+\kappa x}$.

Bien que cette vitesse soit supérieure à c puisque $\omega > \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$, il n'y pas de contradiction avec la théorie de la relativité. En effet, il s'agit de la vitesse d'une onde sinusoïdale qui ne peut transporter de l'information. Cette onde sera en avance de phase par rapport à un déplacement dans le vide.

Exemple 3 La ionosphère est constituée d'une couche de plasma ionisé de densité moyenne $n^\star = 10^{12}\,\mathrm{m}^{-3}$ située entre 100 et 600 km d'altitude. La communication avec un satellite GPS au delà de cette couche s'effectue à la fréquence $f = 1{,}6\,\mathrm{GHz}$ (bande L1).
1 - Calculer la fréquence plasma correspondante. Le plasma est-il transparent pour la fréquence utilisée ?
2 - Sachant que $k^2 = (\omega^2 - \omega_p^2)/c^2$, justifier que la vitesse de phase puisse être approchée par : $v_\phi \approx c/(1 - \omega_p^2/2\omega^2)$.
3 - Exprimer puis calculer la différence de temps de parcours entre une onde dans le vide et une onde dans une couche $\mathrm{L} = 500\,\mathrm{km}$ de plasma.
3 - En fonction de la journée, la densité du plasma fluctue, quelle est l'erreur maximale commise en distance si l'on ne tient pas compte de ces fluctuations.
Données : $\omega_p^2 = n^\star e^2 / m\varepsilon_0$, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$, $\varepsilon_0 = 8{,}87 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{SI}$, $m = 9{,}1 \cdot 10^{31}\,\mathrm{kg}$

Pour s'entraîner : exercices 2, 3

1 - Avec les données : $f_p = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{n^\star e^2}{m\varepsilon_0}} = 9{,}0\,\mathrm{MHz}$. On obtient une fréquence très inférieure à celle utilisée par les satellites. $f > f_p$ et le plasma est transparent.
2 - Avec la relation de dispersion, la vitesse de phase vaut :

$$v_\phi = \omega / k = c\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} = c\frac{1}{\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}}$$

Pour $\omega \gg \omega_p$, un équivalent quand $u \to 0$ de $\sqrt{1+u} \sim 1 + u/2$ permet d'obtenir une valeur simplifiée de la vitesse de phase :

$$v_\phi = c\frac{1}{\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}} \sim c\frac{1}{1 - \omega_p^2/2\omega^2}$$

3 - Pour une propagation dans une épaisseur de $\mathrm{L} = 500\,\mathrm{km}$ de plasma, on obtient un écart de durée donné par :

$$\Delta t = \frac{\mathrm{L}}{v_\phi} - \frac{\mathrm{L}}{c} = \frac{\mathrm{L}}{c}\left(1 - \omega_p^2/2\omega^2 - 1\right) = -\frac{\mathrm{L}}{c}\frac{\omega_p^2}{2\omega^2} = -\frac{\mathrm{L}}{c}\frac{f_p^2}{2f^2} = -26\,\mathrm{ns}$$

4 - La variation de temps induit une variation de position de l'ordre de $\Delta x = c\Delta t = 7{,}9\,\mathrm{m}$ qui est importante.

Remarque 1 :
Les pays aux voisinages des tropiques comme le Brésil sont beaucoup plus sensibles aux fluctuations de la ionosphère que l'Europe (cf. fig. 1.5). La connaissance de la structure de la ionosphère en temps réel est un enjeu important pour le bon fonctionnement des communications avec les satellites.

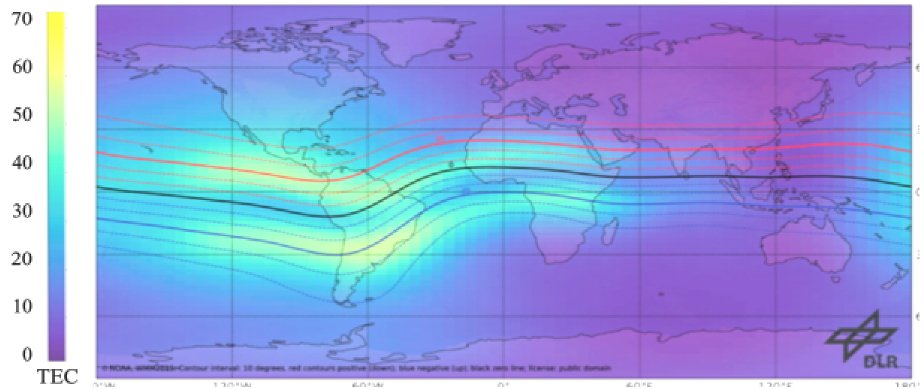


FIGURE 1.5 – Effet cumulé de la concentration des électrons du plasma sur la propagation des ondes électromagnétiques (TEC). D'après Vasylyev *et al*, *Modeling of ionospheric scintillation*, J. Space Weather Space Clim. **12**, 22 (2022), ⓒⓘ.

4 - Évolution d'un paquet d'ondes

a) Somme de deux ondes

En principe, un paquet d'onde est une onde localisée dans le temps (et dans l'espace), c'est-à-dire une impulsion plus ou moins brève. Il ne s'agit pas d'une onde périodique. On peut construire un paquet d'onde par superposition d'ondes planes, on s'intéresse dans un premier temps à la somme de deux ondes planes.

Exemple 4 On considère la superposition de deux OPPMs polarisées selon $\vec{e}_z$ et se propageant selon (Ox). Soient $k_1 = k(\omega_1)$ et $k_2 = k(\omega_2)$, les vecteurs d'onde réels de deux OPPM de pulsations ω_1 et ω_2 et de même amplitude A. On notera les valeurs moyennes $\omega_0 = (\omega_1+\omega_2)/2$ et $k_0 = (k_1+k_2)/2$, les écarts de pulsation et fréquences seront notées $\delta\omega = \omega_1 - \omega_2$, $\delta k = k_1 - k_2$. On supposera que $\delta\omega \ll \omega_0$ et $\delta k \ll k_0$.
1 - Proposer une forme pour le champ $\vec{\mathrm{E}}(x,t)$ de l'onde résultante.
2 - Montrer que l'amplitude de l'onde résultante est le produit de deux fonctions progressives dont on identifiera les vitesses et les périodes spatiales.
3 - Représenter l'allure de l'amplitude en fonction de x pour un instant donné.
Données : $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

Pour s'entraîner : exercices 4 ,5

1 - L'onde résultante de leur superposition s'écrit :

$$\vec{\mathrm{E}}(x,t) = \mathrm{A}\cos(\omega_1 t - k_1 x)\,\vec{e}_x + \mathrm{A}\cos(\omega_2 t - k_2 x)\,\vec{e}_x = \mathrm{E}(x,t)\,\vec{e}_x$$

2 - En utilisant les notations proposées, la somme de cosinus devient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(x,t) &= 2\mathrm{A}\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t - \frac{k_1+k_2}{2}x\right)\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t - \frac{k_1-k_2}{2}x\right)\\
&= 2\mathrm{A}\cos(\omega_0 t - k_0 x)\cos\left(-\frac{\delta\omega}{2}t + \frac{\delta k}{2}x\right)\\
&= 2\mathrm{A}\cos(\omega_0 t - k_0 x)\cos\left(\frac{\delta\omega}{2}t - \frac{\delta k}{2}x\right)
\end{aligned}$$

L'amplitude obtenue comporte deux fonctions progressives de vitesse différentes. L'obtention de ces dernières s'effectue en identifiant la vitesse pour une fonction de la forme $f(x - vt)$:

$$2\mathrm{A}\cos\underbrace{(\omega_0 t - k_0 x))}_{-k_0(x-\frac{\omega_0}{k_0})t}\cos\underbrace{(\frac{\delta\omega}{2}t - \frac{\delta k}{2}x))}_{-\frac{\delta k}{2}(x-\frac{\delta\omega}{\delta k}t)}$$

Ainsi, le premier terme possède une période spatiale $2\pi/k_0$ et une vitesse ω_0/k_0 tandis que le second oscille beaucoup plus lentement [8], de période $4\pi/\delta k$ et de vitesse $v_g = \delta\omega/\delta k$.

3 - On peut représenter des battements : une onde rapide de vecteur d'onde k_0 est enveloppée par une d'oscillation plus lente δk (cf. fig. 1.6).

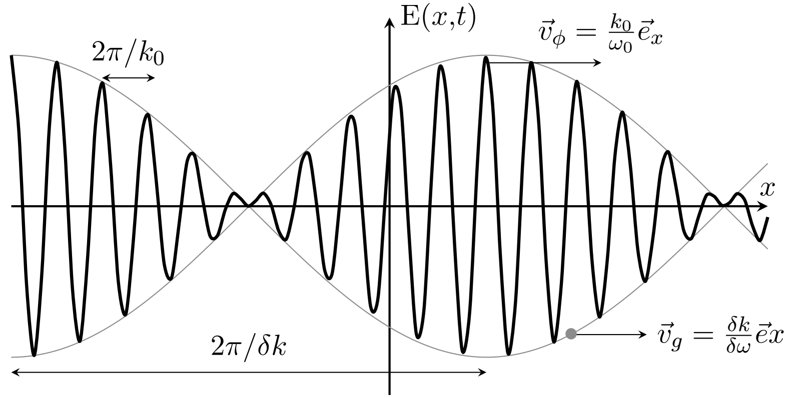


Figure 1.6 – Superposition de deux OPPMs de vecteurs d'onde proches, l'enveloppe se déplace à $\vec{v}_g$ tandis que l'intérieur se déplace à $\vec{v}_\phi$.

b) Notion de dispersion

Dans l'exemple proposé, l'onde progresse selon les x croissants, l'enveloppe à la vitesse v_g et son contenu à la vitesse v_ϕ. Ces vitesses sont en général différentes et découlent de la relation de dispersion [9].

Pour un plasma, $\omega^2 - \omega_p^2 = k^2c^2$, la vitesse de phase est donnée par

$$v_\phi = \frac{\omega_0}{k_0} = \frac{c}{\sqrt{1-\omega_p^2/\omega_0^2}}$$

8. Comme $\delta k \ll k_0$, alors $4\pi/\delta k \gg 2\pi/k_0$.
9. Pour une OPPM, la relation de dispersion est linéaire, $k = \omega/c$ alors $v_\phi = v_g = c$.

Les pulsations étant proches, écrivons la relation de dispersion à l'ordre 1 pour la pulsations $\omega_1 = \omega_0 + \delta\omega_0/2$:

$$\underbrace{(\omega_0 + \delta\omega/2)^2}_{\sim\omega_0^2+\omega_0\delta\omega} - \omega_p^2 = \underbrace{(k_0 + \delta k/2)^2}_{\sim k_0^2 + k_0\delta k} c^2$$

En utilisant $\omega_0^2 - \omega_p^2 = k_0^2c^2$, il vient

$$\frac{\delta\omega}{\delta k} \approx \frac{k_0c^2}{\omega_0^2} = c\sqrt{1-\omega_p^2/\omega_0^2} < c$$

La vitesse de l'enveloppe $v_g = \delta\omega/\delta k$ est donc plus lente que la vitesse du contenue $v_\phi > c$. On observe de plus que $v_\phi v_g = c^2$.

c) Somme continue d'ondes

Nous avons montré que la somme de deux ondes permet de limiter l'existence de l'onde en faisant apparaître des zones de champ nul (noeuds). Un paquet d'onde, ou train d'onde est constitué d'une somme infinie d'OPPMs permettant de restreindre l'onde dans l'espace et dans le temps. Le modèle le plus utilisé pour ses propriétés mathématiques est le paquet d'onde gaussien dont la représentation est une enveloppe en forme de cloche contenant les variations de l'onde. Une écriture de l'amplitude d'un champ électrique progressif selon $+\mathrm{O}x$, dont les vecteurs d'onde sont compris principalement entre $k_0 - \Delta k$ et $k_0 + \Delta k$ serait alors de la forme :

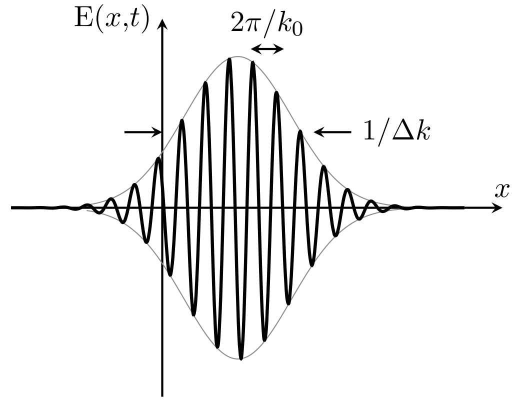


Figure 1.7 – Paquet d'onde gaussien.

$$\mathrm{E}(x,t) = \frac{\mathrm{E}_0}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\Delta k}e^{-\frac{(k-k_0)^2}{2\Delta k^2}}e^{i(\omega t - kx)}\mathrm{d}k$$

La largeur spatiale d'une onde est alors directement reliée à l'étendue des vecteurs d'onde quelle contient par la relation : $\Delta x \sim 1/\Delta k$. À l'intérieur de l'enveloppe du paquet d'onde, on observe une oscillation de périodicité spatiale $\lambda = \frac{2\pi}{k_0}$ (cf. fig 1.7).

Lorsque la somme sur les vecteurs d'onde n'est pas trop étendue ($\Delta k \ll k_0$), il est possible d'étudier le comportement de l'enveloppe en définissant sa vitesse.

Définition :

Pour un paquet d'ondes centré sur k_0 et d'étalement $\Delta k \ll k_0$, on définit la vitesse de groupe correspondant à la vitesse de l'enveloppe du paquet d'ondes :

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}(k = k_0)$$

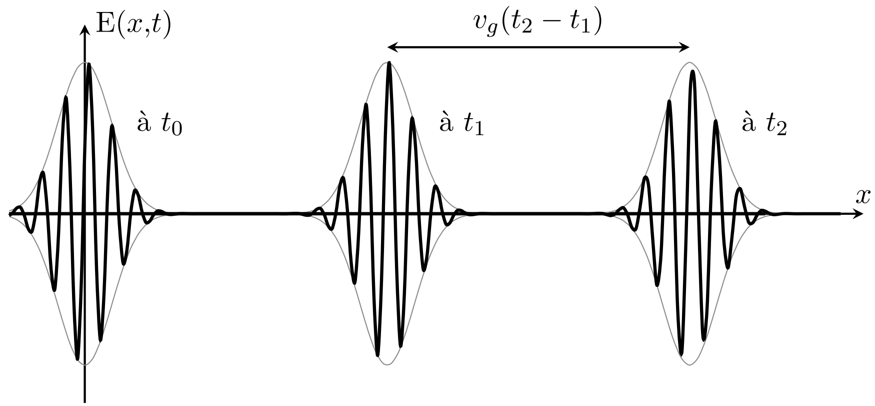


FIGURE 1.8 – Propagation sans déformation d'un paquet d'onde lors de sa propagation dans un milieu **non**-dispersif.

Dans le vide, la relation de dispersion est $\omega = kc$. On obtient donc une vitesse de groupe $v_g = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}(k = k_0) = c$, identique à la vitesse de phase $v_\phi = \frac{\omega}{k} = c$.

Propriété :

Lorsque la relation de dispersion est linéaire ($k \propto \omega$) alors le milieu est dit **non-dispersif**. Toutes les ondes se propagent à la même vitesse $v_\phi = k/\omega$.

Pour un milieu est non-dispersif, toutes les OPPMs constituant le paquet d'onde se déplacent à la même vitesse. Le paquet se déplace donc sans déformation (cf. fig. 1.8).

Dans un plasma, la vitesse de groupe d'un paquet d'ondes centré sur ω_0, k_0 vérifie :

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}}$$

Un paquet d'onde peut constituer une information. Ainsi, le principe de relativité impose que la vitesse de groupe est inférieure à la vitesse de la lumière dans le vide : $v_g < c$.

Sur la figure 1.9, sont représentées la vitesse de phase ainsi que la vitesse de groupe pour différentes valeurs de la pulsation. Lorsque la pulsation est élevée ($\omega \gg \omega_p$), les deux vitesses sont quasiment identiques à c, le plasma se comporte comme le vide. Les oscillations du champ électromagnétique sont trop rapides pour permettre un mouvement conséquent des charges en raison de leur inertie. En revanche, pour ω proche de ω_p, l'interaction de l'onde avec la matière diminue la vitesse de groupe tandis que la vitesse de phase augmente. Ce phénomène est lié à la non-linéarité de la relation de dispersion.

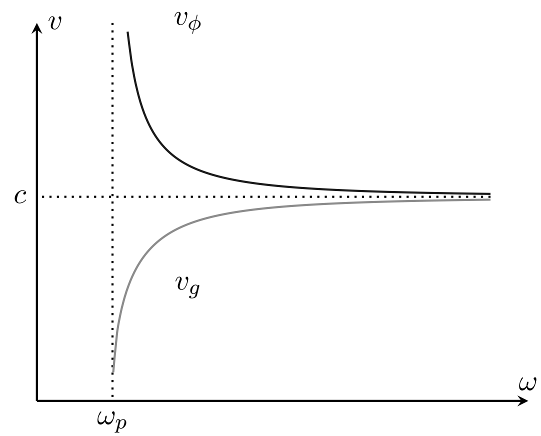


FIGURE 1.9 – Évolution de v_ϕ et v_g en fonction de la pulsation dans un plasma.

d) Étalement d'un paquet d'onde

Propriété :

Lorsque la relation de dispersion n'est pas linéaire, alors le milieu est **dispersif**. On observe un étalement du paquet d'ondes.

Lorsque la vitesse de groupe est différente de la vitesse de phase, l'enveloppe d'un paquet d'ondes ne se déplace par à la même vitesse que son contenu. Il apparaît alors une diminution de l'amplitude de l'enveloppe au profit de son étendue spatiale (cf. fig. 1.10).

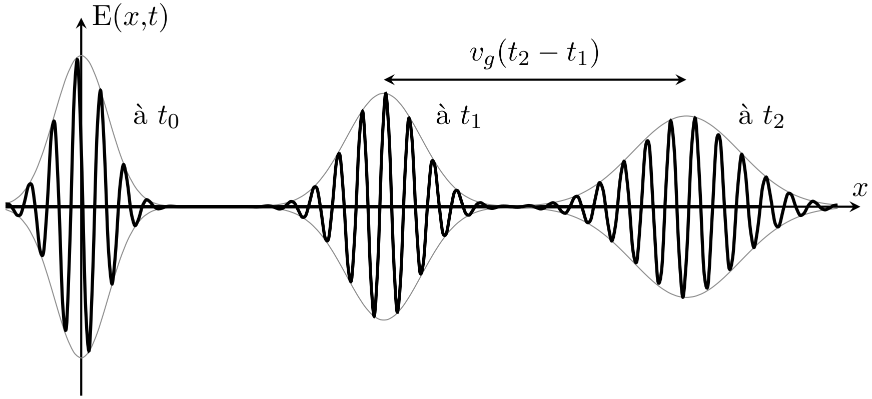


FIGURE 1.10 – Étalement d'un paquet d'onde lors de sa propagation dans un milieu dispersif.

Exemple 5 On considère un pulse de durée τ et de fréquence centrale f_0 traversant la ionosphère terrestre assimilée à un plasma de fréquence $f_p = 9{,}00\,\mathrm{MHz}$.
1 - Déterminer la densité n_e du plasma sachant que $f_p = 89.9\sqrt{n_e/10^{20}}\,\mathrm{GH}z$, où n_e s'exprime en m^{-3}.
2 - Déterminer la valeur de la fréquence centrale f_0 telle que le pulse traverse le plasma avec une vitesse $c/2$ où $c = 3{,}00 \cdot 10^8\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.
3 - Soit f_{min} et f_{max} les composantes spectrales minimale et maximale du pulse. On admet que la durée du pulse vérifie $f_{max} - f_{min} = 1/\tau$. Déterminer les fréquences hautes et basses du spectre d'un pulse de $\tau = 5\,\mu$s.
4 - Quelle sera la durée τ' de ce pulse après une traversée de 100 km des couches F de la ionosphère ?
Données : relation de dispersion du plasma : $\omega^2 = \omega_p^2 + k^2c^2$.

Pour s'entraîner : exercices 4 ,5

1 - En inversant la relation, on obtient :

$$n_e = 10^{20}\frac{f_p^2}{89{,}9^2} = 1\cdot 10^{12}\,\mathrm{m}^{-3}$$

2 - Un pulse étant un ensemble de fréquence, son centre se déplace à la vitesse de groupe. En utilisant la relation de dispersion du plasma, on obtient la vitesse de groupe :

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = c\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}} = c\sqrt{1-\frac{f_p^2}{f^2}}$$

Pour $v_g(f_0) = c/2$, on en déduit la la fréquence centrale :

$$\frac{c}{2} = c\sqrt{1-\frac{f_p^2}{f_0^2}} \quad \text{soit} \quad f_0 = \sqrt{\frac{4}{3}}f_p = 10{,}4\,\mathrm{MHz}$$

3 - Pour un pulse de $5\,\mu$s, l'écart de fréquence vérifie

$$f_{max} - f_{min} = 1/\tau = 200\,\mathrm{kHz}$$

On en déduit les valeurs des fréquences demandées :

$$f_{max} = f_0 + \frac{\Delta f}{2} = 10{,}5\,\mathrm{MHz} \quad \text{et} \quad f_{min} = f_0 - \frac{\Delta f}{2} = 10{,}3\,\mathrm{MHz}$$

4 - Chaque composante spectrale est une OPPM se propageant à la vitesse de phase définie par :

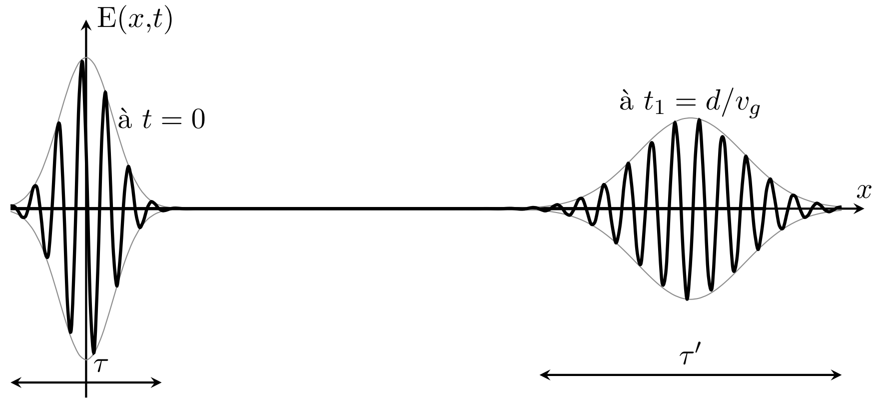
$$v_\phi = \omega/k = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{f_p^2}{f_0^2}}}$$

On peut donc calculer les temps de parcours pour f_{min} et f_{max} sur la distance $d = 100\,\mathrm{km}$:

$$t_{min} = \frac{d}{v_\phi(f_{min})} = \frac{d}{c}\sqrt{1-\frac{f_p^2}{f_{min}^2}} = 162\,\mu\text{s} \quad \text{et} \quad t_{max} = \frac{d}{v_\phi(f_{max})} = 172\,\mu\text{s}$$

La nouvelle durée du pulse est maintenant doublée :

$$\tau' = t_{max} - t_{min} = 10\,\mu\text{s}$$



III. Réflexion sur un plasma

Nous avons établi qu'une onde de pulsation $\omega < \omega_p$ ne peut se propager dans le plasma. Comme précédemment, considérons un champ polarisé selon $\vec{e}_y$, de vecteur d'onde $\vec{k} = -i\kappa$ où $\kappa = \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}/c$. Le champ électrique s'écrit en représentation complexe

$$\begin{aligned} \underline{\vec{\mathrm{E}}}(x,t) &= \mathrm{E}_0 e^{i(\omega t - kx)}\,\vec{e}_y \\ &= \mathrm{E}_0 e^{-\kappa x} e^{i\omega t}\,\vec{e}_y \end{aligned}$$

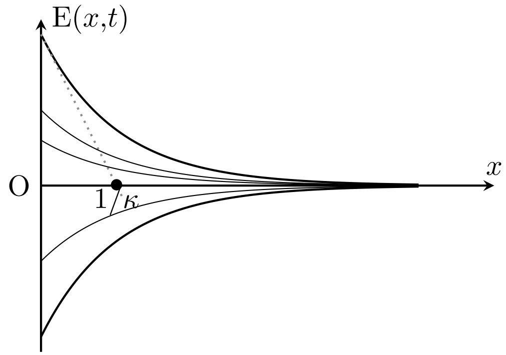


FIGURE 1.11 – Représentation d'une onde évanescente à différents instants dans un plasma occupant l'espace $x > 0$. La longueur caractéristique se lit graphiquement

Soit en notation réelle :

$$\vec{\mathrm{E}}(x,t) = \mathrm{E}_0 e^{-\kappa x}\cos\omega t\,\vec{e}_y$$

L'amplitude du champ électrique est représenté sur la figure ci-contre (cf. fig. 1.11).

Définition :

Une onde plane **évanescente** est une onde dont une composante du vecteur d'onde est **imaginaire pure** [a] $k = \pm i\kappa$ L'amplitude de l'onde diminue alors exponentiellement selon cette direction ($e^{-\kappa x}$) avec la distance caractéristique $1/\kappa$.

a. Le signe est choisi de sorte que l'onde ne diverge pas dans le milieu.

On obtient le champ magnétique par l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\underline{\vec{\mathrm{B}}}(x,t) = \frac{\vec{k}\wedge\underline{\vec{\mathrm{E}}}}{\omega} = \frac{-i\kappa\mathrm{E}_0}{\omega}e^{i(\omega t - kx)}\,\vec{e}_z$$

Soit en notation réelle :

$$\vec{\mathrm{B}}(x,t) = \mathrm{Re}\left[\frac{-i\kappa\mathrm{E}_0}{\omega}e^{i(\omega t - kx)}\,\vec{e}_z\right] = \frac{\sqrt{\omega_p^2-\omega^2}}{c}\sin(\omega t)e^{-\kappa x}\,\vec{e}_z$$

En utilisant la notation réelle, le vecteur de Poynting associé vaut alors :

$$\vec{\Pi}(x,t) = \frac{\vec{\mathrm{E}}\wedge\vec{\mathrm{B}}}{\mu_0} = \frac{\sqrt{\omega_p^2-\omega^2}}{\omega c}\frac{\mathrm{E}_0^2}{\mu_0}\cos\omega t\sin\omega t e^{-2k\kappa x}\,\vec{e}_x$$

Comme $\cos\omega t\sin\omega t = \frac{1}{2}\sin 2\omega t$, la valeur moyenne du vecteur de Poynting est nulle en moyenne.

$$<\vec{\Pi}>=\vec{0}$$

Propriété :

Une onde **évanescente** ne transporte aucune énergie.

Il est également simple de constater qu'aucune énergie n'est transmise au plasma en raison de la nature imaginaire de la conductivité du plasma :

$$< \mathcal{P}_{vol} > = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,(\underline{\vec{j}} \cdot \underline{\vec{\mathrm{E}}}^*) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,(\underbrace{\sigma}_{-in^\star e^2/m\omega} |\underline{\vec{\mathrm{E}}}|^2) = 0$$

On peut donc en conclure qu'une onde électromagnétique arrivant sur un plasma avec une pulsation inférieure à ω_p va être totalement réfléchie. Cependant, avant d'être réfléchie, l'onde pénètre dans le plasma sur une distance caractéristique $1/\kappa = c/\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}$ qui dépend de sa fréquence. La fréquence utilisée permet alors de sonder le plasma et de connaître ses caractéristiques, notamment la densité électronique. Cette méthode est utilisée par les sondeurs ionosphériques pour connaître l'évolution de la densité électronique et corriger les communications avec les satellites. La densité fluctue en fonction de l'activité solaire et donc en fonction du jour et de la nuit sur Terre, de la latitude et de l'altitude (cf. fig.1.12). Le même type de technique est utilisé dans les Tokamaks pour connaître l'évolution du plasma crée en vue de la fusion thermonucléaire.

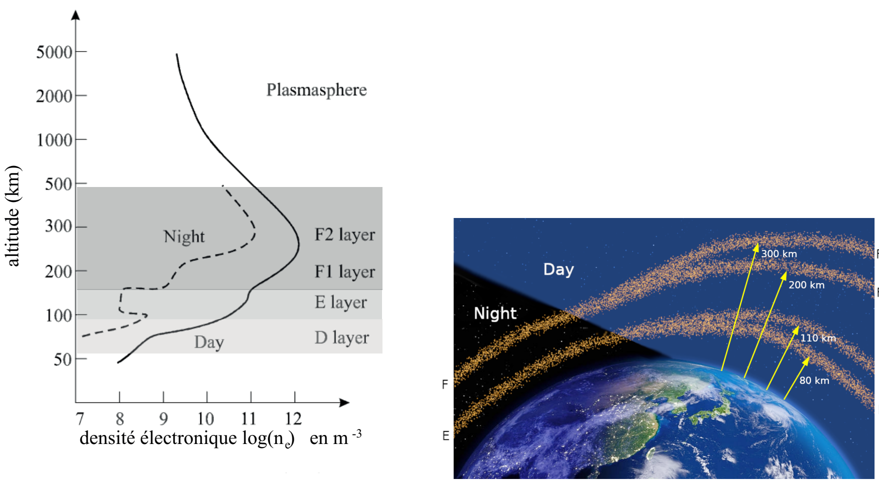


Figure 1.12 – Densité électronique dans la ionosphère, évolution en fonction du jour et de la nuit. (Image de Carlos Molina, 🅭🅯).

L'essentiel

Dans un plasma, ions et électrons sont libres de se déplacer sans frottement. On suppose l'absence d'interaction si le plasma est peu dense. Les ions, plus lourds que les électrons ne participent pas à la conduction. Si le plasma est « froid », les électrons sont non relativistes. On peut alors définir une fréquence plasma ω_p d'oscillation collective des électrons : $\omega_p^2 = \dfrac{n^\star e^2}{m\varepsilon_0}$,
la densité de courant s'exprime avec une conductivité imaginaire pure :

$$\underline{\vec{j}} = -n^\star e \underline{\vec{v}} = \underbrace{\frac{n^\star e^2}{im\omega}}_{\underline{\sigma}} \underline{\vec{\mathrm{E}}}$$

Pour des ondes monochromatiques, l'équation de propagation harmonique s'écrit :

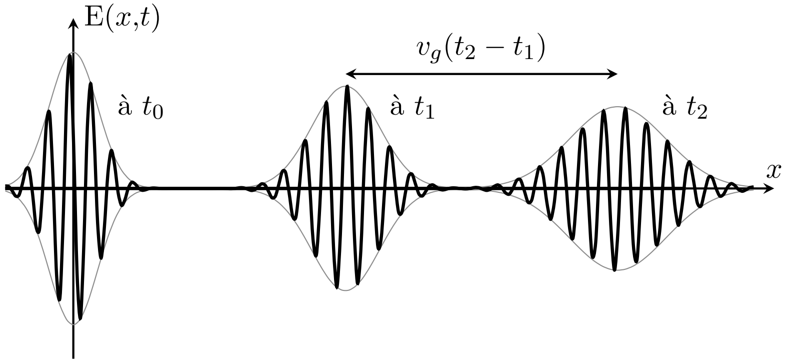
$$\Delta \underline{\vec{\mathrm{E}}} + \frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2} \underline{\vec{\mathrm{E}}} = \vec{0}$$

La relation de dispersion s'écrit

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

- Le plasma est **transparent** si $\omega > \omega_p$, les ondes sont progressives de vecteur d'onde $k = \dfrac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$ mais le milieu est dispersif :

$$v_\phi(\omega) = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}} \quad \text{et} \quad v_g(\omega) = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = c\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}$$



• Le plasma est **réactif** si $\omega < \omega_p$, les ondes sont **evanescentes** et ne se propagent pas :

$$k = i\frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c}$$

Exercices

Les classiques

Exercice 1

solution p.??

On modélise un plasma comme un milieu globalement neutre possédant une densité volumique d'électron n_e de masse m_e. On s'intéresse aux ondes dites « de Lanqmuir », dont le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx)\,\vec{u}_x$$

1 - Caractériser cette onde.
2 - Que vaut le champ magnétique ?
3 - Appliquer la relation fondamentale de la dynamique aux élecrons.
4 - En déduire une relation entre $\frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$ et $\vec{E}$.
5 - À l'aide des équations de Maxwell, trouver une relation entre $\vec{j}$ et $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.
6 - En déduire l'équation de propagation vérifiée par $\vec{E}$.
7 - On posera $\omega_P^2 = n_e e^2/m_e\varepsilon_0$, déterminer la relation de dispersion. Quelle est sa particularité ?
8 - Exprimer la vitesse de groupe, évaluer le vecteur de Poynting et la densité volumique d'énergie électromagnétique.
9 - Montrer que la somme de l'énergie cinétique volumique du plasma et de la densité volumique d'énergie électromagnétique est constante. Conclure sur le principe de propagation d'une telle onde.

Exercice 2

solution p.??

L'ionosphère, couche de l'atmosphère située à plus de 60 km d'altitude, peut être considérée comme un plasma : c'est un milieu ionisé, caractérisé par une densité volumique d'électrons libres de charge $-e$, de masse m_e, égale à $n_1 = 1{,}00\cdot 10^{11}$ m^{-3} et une densité volumique de cations de charge $+e$, de masse m_C , égale aussi à n_1, l'ensemble est donc globalement neutre. La valeur de n_1 est supposée constante. On se propose d'étudier dans ce milieu la propagation d'ondes du type

$$\vec{E}(M,t) = E_0 \exp i(\omega t - kx)\,\vec{e}_y$$

où E_0 est réel et k complexe : $k = k_1 + ik_2$ avec $k_1 > 0$. On négligera l'effet de la pesanteur et les interactions entre particules chargées, et on supposera que les particules sont non relativistes.
1 - En admettant que le rapport $\omega/|k|$ est de l'ordre de c, montrer que les effets de la partie magnétique de la force de Lorentz sont négligeables devant les effets de la partie électrique de la force de Lorentz.
2 - En régime établi, et en supposant que l'amplitude des déplacements des charges reste petite devant la longueur d'onde, déterminer l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}_e$ (dans le référentiel galiléen d'étude) d'un électron, positionné en M à l'instant t, en fonction de m_e, e, ω et $\vec{E}(M,t)$.
3 - Donner l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}_i$ d'un cation. En déduire l'expression de la conductivité complexe du plasma $\underline{\gamma}$. À la vue des valeurs numériques, montrer que $\underline{\gamma} = -i\frac{n_1 e^2}{m_e \omega}$.

4 - Calculer la puissance volumique moyenne fournie par le champ électromagnétique aux électrons libres. Commenter.
5 - Établir l'expression de $\underline{k}^2$ dans le plasma. Mettre en évidence une pulsation caractéristique dite pulsation plasma ω_p ; donner son expression et calculer sa valeur numérique pour l'ionosphère.
6 - Calculer la longueur d'onde dans le vide λ_P associée. À quel domaine du spectre électromagnétique appartient cette longueur d'onde ?
7 - On se place dans le cas $\omega < \omega_p$. Donner l'expression de k en fonction de ω_p, ω et c (on prendra k_2 négatif).
8 - Donner les expressions des champs réels $\vec{\mathrm{E}}(\mathrm{M}, t)$ et $\vec{\mathrm{B}}(\mathrm{M}, t)$. Caractériser l'onde obtenue.
9 - Donner l'expression de $< \vec{\Pi}(\mathrm{M}, t) >$ dans le plasma.
Données :

- masse de l'électron :$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg
- masse du proton :$m_i = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg
- $\varepsilon_0 = 8{,}9.10^{-12}$ F.m^{-1} et $e = 1{,}6.10^{-19}$ C

Exercice 3 *D'après Centrale 18*
solution p.??

Le Soleil émet un rayonnement radioélectrique sur un large spectre. Ce rayonnement résulte de processus thermiques et non thermiques. On s'intéresse au deuxième cas.
On considère un plasma d'hydrogène totalement ionisé, localement neutre et dont la densité volumique d'électrons est n_e. Un électron a une masse m_e et une charge $-e$. Dans ce plasma, on étudie une onde électromagnétique plane harmonique de pulsation ω.
1 - En nommant les hypothèses et les approximations adéquates, établir l'expression de la conductivité complexe du plasma en fonction de la pulsation :

$$\underline{\sigma}(\omega) = \frac{n_e e^2}{i m_e \omega}$$

2 - Écrire les équations de Maxwell dans le plasma considéré.
3 - Établir la relation de dispersion dans le plasma. On posera $\omega_p^2 = n_e e^2 / m_e \varepsilon_0$.
4 - À quelle condition une onde plane progressive harmonique peut-elle se propager dans ce milieu ? Quelle est la nature de l'onde dans le cas contraire ?
Le milieu n'est plus supposé localement neutre. On néglige le mouvement des protons, de densité volumique n_0. Les électrons, de densité volumique $n_e(x, t)$, ont une vitesse $\vec{v}_e(x, t) = v_e(x, t)\vec{u}_x$. Par ailleurs, le champ électrique a pour expression $\vec{\mathrm{E}}(x, t) = \mathrm{E}(x, t)\vec{u}_x$. On note $\rho(x, t)$ la densité volumique de charge et $\vec{\jmath}(x, t)$ le vecteur densité de courant.
5 - Donner l'expression de $\rho(x, t)$ en fonction de $n_e(x, t)$, n_0 et de la charge élémentaire e.
6 - En s'appuyant sur l'équation locale de conservation de la charge, montrer que $\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial (n_e v_e)}{\partial x} = 0$.
On supposera dans la suite que l'on peut retenir $\frac{\partial (n_e v_e)}{\partial x} \approx n_0 \frac{\partial v_e}{\partial x}$, d'où l'équation

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + n_0 \frac{\partial v_e}{\partial x} = 0$$

7 - Justifier l'équation $\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial x} = \dfrac{(n_0 - n_e(x, t))e}{\varepsilon_0}$.
8 - Écrire l'équation permettant de décrire le mouvement d'un électron sous l'effet du champ électrique. On admettra que, dans une approximation linéaire, on peut retenir

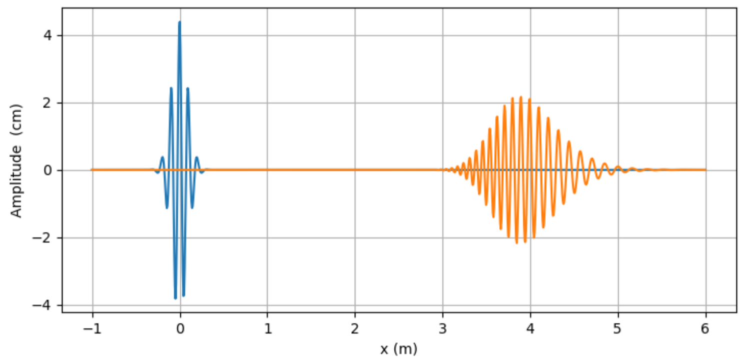
$$\frac{\mathrm{d}v_e}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v_e}{\partial t}$$

On cherche des solutions des équations précédentes sous la forme d'ondes planes progressives harmoniques. On adopte des notations complexes et on pose $\underline{n}_e(x, t) = n_0 + \mathrm{N}\exp(i(\omega t - kx))$, $\underline{v}_e(x, t) = \mathrm{V}\exp(i(\omega t - kx))$ et $\underline{\mathrm{E}}(x, t) = \mathrm{E}_0 \exp(i(\omega t - kx))$.
9 - Montrer que la pulsation est nécessairement égale à la pulsation plasma $\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m_e \varepsilon_0}}$.

Problème ouvert

Exercice 4 *solution p.??*

La théorie des ondes de gravité (houle) dans un fluide en eau profonde permet d'obtenir la relation de dispersion suivante entre la pulsation ω des ondes planes harmoniques progressives dans un fluide et la norme k du vecteur d'onde de ces ondes : $\omega^2 = gk$ avec $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. On représente l'évolution d'un paquet d'onde entre $t_0 = 0\,\mathrm{s}$ et $t_1 = 20\,\mathrm{s}$ pour une pulsation centrale $\omega_0 = 35\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$.



Vérifier la conformité avec la relation de dispersion.

Les difficiles

Exercice 5 *D'après Centrale 10* *solution p.??*

On désire étudier le comportement de l'ionosphère pour les "grandes ondes". Ainsi, on la modélise comme un plasma : c'est un milieu électriquement neutre, qui compte par unité de volume n électrons libres, de masse m et de charge $-e$, et n ions de charge $+e$ et de masse M. On supposera les ions immobiles car et les électrons comme non relativistes (c'est à dire que leurs vitesses restent très inférieures à la vitesse de la lumière). On considère une onde électromagnétique plane, monochromatique de pulsation ω, polarisée rectilignement suivant Oy qui se propage dans l'ionosphère suivant la direction dans le sens des z croissants.

$$\vec{\mathrm{E}} = \mathrm{E}_0 \exp\left(j(\omega t - kz)\right)\vec{e}_y$$

1 - Donner l'expression complexe du champ magnétique $\vec{\mathrm{B}}$ dans l'ionosphère en utilisant l'équation de Maxwell-Faraday.
2 - Appliquer le principe fondamental de la dynamique à un électron, on notera $\vec{v}_e$ sa vitesse.
3 - En comparant les normes des forces magnétiques et électriques, montrer que l'influence du champ magnétique est négligeable devant celle du champ électrique. Dans toute la suite, on suppose que l'électron n'est soumis qu'au seul champ électrique précédent.
4 - Calculer alors le vecteur densité de courant volumique $\vec{\mathrm{J}} = -ne\vec{v}_e$ et mettre sa notation complexe sous la forme $\vec{\mathrm{J}} = \sigma\vec{\mathrm{E}}$ où σ est la conductivité complexe. Montrer que :

$$\sigma = \frac{ne^2}{jm\omega}$$

5 - Calculer la puissance moyenne volumique cédée par le champ électromagnétique au plasma

$$\mathcal{P}\text{cédée} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\vec{\mathrm{J}}.\vec{\mathrm{E}}^*\right)$$

où Re (A) désigne la partie réelle de A et $\vec{\mathrm{E}}^*$le conjugué de $\vec{\mathrm{E}}$. Commenter.
6 - Écrire l'équation de Maxwell-Ampère en faisant bien apparaître le courant volumique et le courant de déplacement.
7 - En utilisant les quatre équations de Maxwell, montrer la relation suivante liant la norme du vecteur d'onde et la pulsation ω :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_\mathrm{P}^2}{c^2} \text{ où } \omega_\mathrm{P}^2 = \frac{ne^2}{m\varepsilon_0}$$

8 - Que se passe-t-il si $\omega < \omega_\mathrm{P}$? Montrer que k est alors imaginaire pur. Comment s'écrit le champ électrique ? Est-ce une onde progressive ? Conclure.
9 - Que se passe-t-il si $\omega > \omega_\mathrm{P}$? Montrer qu'une onde plane monochromatique peut effectivement se propager. Donner la représentation graphique du module du vecteur d'onde en fonction de la pulsation . Donner les expressions de la vitesse de phase et de la vitesse de groupe. Tracer schématiquement sur le même graphe ces deux vitesses en fonction de la

pulsation . Commenter le fait que la vitesse de phase soit supérieure à la vitesse de la lumière . Que signifie physiquement la vitesse de groupe ? Pourquoi est-elle nécessairement inférieure à c ?

10 - Commenter l'expression suivante : le plasma se comporte comme un filtre passe-haut de fréquence de coupure : toute onde de fréquence inférieure à la fréquence de plasma ne peut se propager dans l'ionosphère.

Exercice 6 *D'après Centrale 18*

On considère le cas de nombreux électrons, de masse m et de charge $q = -e$, en densité volumique $n^\star$, en mouvement dans les champs croisés $\vec{E}_1 = E_1\vec{e}_x$ et $\vec{B}_0 = B_0\vec{e}_z$. On néglige toute interaction entre ces électrons et on suppose que leur mouvement se fait dans le plan perpendiculaire à $\vec{B}_0$; il est caractérisé par une densité volumique de courant $\vec{j} = -n^* e < \vec{v} >$. où $< \vec{v} >$ est une vitesse moyenne sur un volume suffisamment grand pour négliger les mouvements des électrons selon Ox.

On pose $\omega_p^2 = \frac{n^\star e^2}{m\varepsilon_0}$.

1 - On suppose que pour une échelle d'espace suffisamment grande, la vitesse moyenne des électrons est constante. Montrer qu'on peut écrire $\vec{j} \simeq \gamma\,\vec{e}_z \wedge \vec{E}_1$. Exprimer γ en fonction seulement de la permittivité du vide ε_0, de ω_p et de la pulsation $\Omega_c = eB_0/m$.

L'étude complète des mouvements des électrons du plasma ionosphérique exige la considération préalable de quelques ordres de grandeur. On s'intéresse dans la suite au cas où les ondes qui se propagent dans l'atmosphère sont du type VLF, de fréquence inférieure à 10 kHz.

2 - Les particules étudiées sont des électrons du plasma ionosphérique ($n^\star \sim 10^{10}$ m^{-3}) et on prendra $B_0 = 5.10^{-5}$ T. Calculer numériquement Ω_c, ω_p et ω_p^2/Ω_c et comparer aux pulsations ω associées aux ondes radio VLF. Conclure.

On étudie une onde électromagnétique plane et progressive, polarisée rectilignement, se propageant dans le vide, transportant la puissance moyenne par unité de surface (ou intensité) I_0.

3 - Exprimer les intensités maximales E_1 et B_1 des champs électrique et magnétique de l'onde en fonction de I_0 et de constantes fondamentales. À quelle condition, portant sur I_0, peut-on affirmer que $B_1 \ll B_0$, où $B_0 = 5.10^{-5}$ T ? Commenter.

Sous certaines hypothèses très restrictives que l'on supposera réalisées, la propagation d'une onde électromagnétique plane, progressive dans le plasma ionosphérique, avec un vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{e}_z$ colinéaire au champ magnétostatique terrestre $\vec{B}_0 = B_0\vec{e}_z$, est caractérisée par la loi exprimant la densité volumique de courant $\vec{j} = \varepsilon_0\frac{\omega_p^2}{\Omega_c}\vec{e}_z \wedge \vec{E}$.

Le champ électromagnétique de l'onde sera écrit $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_1 \exp(i(kz - \omega t))$, $\underline{\vec{B}} = \underline{\vec{B}}_1 \exp(i(kz - \omega t))$ en notation complexe.

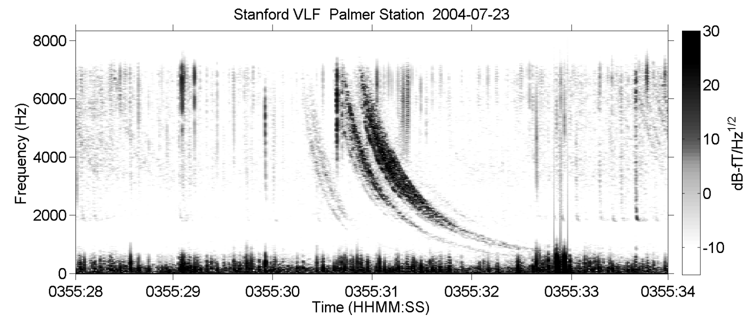
4 - Rappeler, en notation complexe, les équations de Maxwell. Montrer que le milieu est nécessairement électriquement neutre et que l'onde est nécessairement transverse électromagnétique.

5 - En isolant, par exemple, le champ électrique $\underline{\vec{E}}_1$, montrer que celui-ci n'est jamais polarisé rectilignement

6 - Pour les ondes VLF, établir la relation $c^2k^2 = \frac{\omega_p^2\omega}{\Omega_c}$ associée à cette onde. Le milieu est-il transparent ? Est-il dispersif ?

7 - Comparer les vitesses de propagation des composantes de haute et basse fréquence. Pourquoi une telle onde porte-t-elle le nom de *siffleur* ?

8 - Un enregistrement d'un tel signal est décrit ci-dessous. Estimer la distance parcourue dans l'ionosphère par une telle onde entre le point d'émission et celui de réception. Palmer Station est une station de recherche scientifique américaine située sur l'île Anvers, au nord du continent antarctique. L'enregistrement est réalisé le 23 juillet 2004 par le récepteur VLF de Palmer Station montre le spectrogramme d'un signal siffleur.



Spectrogramme VLF d'une onde siffleur

L'abscisse désigne l'instant de réception du signal, l'ordonnée la fréquence du signal reçu. L'intensité reçue pour chaque couple (instant, fréquence) est indiquée sur le diagramme en niveaux de gris (l'échelle figure à droite du diagramme, les intensités minimales sont en blanc et les intensités maximales en noir).

Corrigés

I. Oscillations plasma

Le plasma possède un mode dit électrostatique correspondant à un couplage entre le déplacement des charges et le champ électrique. Consdiérons l'équation de Maxwell-Gauss et l'équation constitutive du plasma :

$$\operatorname{div}\vec{\mathrm{E}} = \rho/\varepsilon_0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{-ne^2}{m}\vec{\mathrm{E}}$$

Il est possible de relier ces deux équations par la conservation de la charge, appliquons l'opérateur divergence à l'équation du plasma :

$$\operatorname{div}\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{-ne^2}{m}\operatorname{div}\vec{\mathrm{E}} \quad \text{soit} \quad \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\operatorname{div}\vec{j}}_{-\frac{\partial \rho}{\partial t}} = \frac{-ne^2}{m}\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

On obtient bien une équation de type oscillateur harmonique dont la pulsation est appelée pulsation plasma :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \underbrace{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}}_{\omega_p^2}\rho = 0$$

Dans un plasma, il est donc possible d'avoir une densité volumique de charge non nulle, oscillant à la pulsation ω_p. Ces ondes venues d'un couplage avec le champ électrique sont appelées « ondes de Langmuir »et sont abordées dans l'exercice 1.