

Onde électromagnétique dans un métal

Les conducteurs sont caractérisés par des porteurs de charges, responsables de l'établissement d'un courant dans un circuit électrique. Dans un conducteur métallique, ce sont les électrons libres, dit électrons de conduction qui peuvent se déplacer tandis que dans une pile électrique ou dans une solution aqueuse (conducteurs ioniques) , il peut y avoir des ions, porteurs de charges positifs (cations) ou négatifs (anions). Dans un milieu conducteur, une onde électromagnétique interagit avec les charges avec la force de Lorentz. Le comportement des conducteurs varie avec la fréquence des champs électromagnétiques auxquels ils sont soumis. Aux basses fréquences, nous retrouverons un comportement proche du conducteur idéal discuté au chapitre précédent et responsable de l'écrantage à l'origine de la perte de signal de radio ou télécommunication lorsque l'on passe dans un tunnel ou dans les parkings souterrains, édifices fortement armés de structures métalliques.

Le comportement aux fréquences plus élevées peut être notablement différent et sera étudié dans les chapitres ?? (Propagation dans un plasma) et ?? (Plasmonique ou optique des métaux). Le comportement intermédiaire, présenté dans ce chapitre conduit à introduire la résistivité électrique des conducteurs réels, source de pertes énergétiques par effet Joule dans de nombreux



FIGURE 1.1 – Utilisation de l'effet Joule dans un grille pain. ©Eget Verk, .

cas (circuits électroniques, échauffement d'un chargeur, *etc.*) mais aussi d'intérêt pour de nombreuses applications (radiateurs électriques- convecteur ou à inertie, cuisson par induction, forge électrique permettant de localiser la fusion *etc.*).

I. Description d'un conducteur ohmique

1 - Modèle de Drude

Le modèle de Drude est une approche heuristique qui facilite la compréhension du comportement macroscopique des conducteurs à partir d'une description microscopique simplifiée du mouvement des porteurs de charges. Pour simplifier, nous considérons les électrons de conduction dans un métal mais on obtiendrait des résultats analogues pour tout type de conducteur. Dans une première approche, on peut considérer un métal comme un réseau d'ions positifs immobiles entourés des électrons de cœur. Les électrons de valence participent à la conduction et peuvent circuler dans le réseau métallique librement. Dans le modèle de Drude, les chocs des électrons sur les défauts du métal sont modélisés par une force de frottement fluide $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$ (cf. fig. 1.2). Il s'agit d'une représentation simple d'une interaction complexe entre les électrons de conduction et les modes de vibrations du réseau de cations métalliques¹.

En présence d'un champ électrique, les électrons sont également soumis à la force électrique² $\vec{F} = -e\vec{E}(t)$. L'application du principe fondamental de la dynamique conduit à :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}(t) - \alpha\vec{v}$$

Cette équation différentielle peut être mise sous la forme canonique suivante, permettant de faire apparaître un temps caractéristique d'évolution de la vitesse

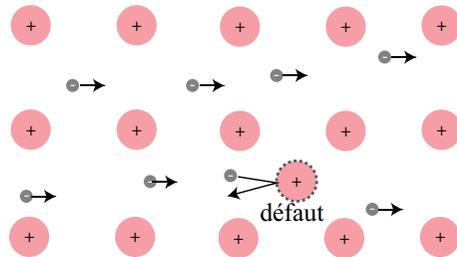


FIGURE 1.2 – Electrons libres de ce déplacer dans la matrice des cations métalliques dans le modèle de Drude.

1. Une discussion sur l'origine de la force de frottement est proposée annexe 1 -.

2. L'action d'un champ magnétique est souvent négligeable devant celle du champ électrique. Une discussion plus approfondie est proposée annexe 2 -.

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \underbrace{\frac{\alpha}{m}}_{1/\tau} \vec{v} = -\frac{e}{m} \vec{E}(t)$$

Avec $\tau = m/\alpha$, la solution de cette équation différentielle s'écrit comme une somme $\vec{v}(t) = \vec{v}_h(t) + \vec{v}_p(t)$ de la solution homogène \vec{v}_h et d'une solution particulière v_p ³. La solution homogène (de l'équation sans second membre) est de la forme $v_h(t) = Ae^{-t/\tau}$ s'atténue rapidement au bout de quelques τ . Il s'établit alors un régime permanent où $\vec{v}(t) \approx v_p(t)$. Une solution particulière est généralement de la même forme que le second membre. Pour un champ sinusoïdal $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t)$, donc la vitesse moyenne des charges suit

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

Exemple 1 On considère un métal plongé dans un champ électrique uniforme $\vec{E}(t) = E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$. Un électron initialement à l'origine du repère, est soumis de la part des défauts du métal à une force de frottement de la forme $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$.

- 1 - Déterminer l'équation différentielle vérifiée par les électrons.
- 2 - En utilisant la notation complexe, montrer que la vitesse de l'électron peut se mettre sous la forme :

$$\vec{v} = \frac{-e/\alpha}{1 + i\omega\tau} \vec{E}$$

On explicitera la valeur de τ en fonction de m et α .

- 3 - a) Dans quelle gamme de pulsations la vitesse est-elle en phase avec le champ électrique ?
- b) Exprimer alors la densité de courant et montrer qu'elle est proportionnelle au champ électrique.

Pour s'entraîner : exercice 1

- 1 - Un électron est soumis à la force de frottement et la composante électrique de la force de Lorentz, la deuxième loi de Newton s'écrit :

3. Voir BARTHES J., COLAS des FRANCS, G. Mécanique Licence CPGE, Ellipses, Paris 2023, Annexe A.5 pour les résolutions d'équations différentielles.

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\alpha\vec{v} - e\vec{E}$$

2 - En représentations complexes $\vec{E} = E_0 e^{i\omega t} \vec{e}_z$ et $\vec{v} = v_0 e^{i(\omega t + \varphi)} \vec{e}_z$, et

$$im\omega\vec{v} = -\alpha\vec{v} - e\vec{E} \quad \text{soit} \quad \vec{v} = \frac{-e\vec{E}}{\alpha + im\omega} = \frac{-e/\alpha}{1 + i\omega\tau} \vec{E}$$

avec $\tau = m/\alpha$.

3 - La vitesse est en phase avec le champ électrique aux basses fréquences. En effet

$$\vec{v} \underset{\omega\tau \ll 1}{\sim} \frac{-e}{\alpha} \vec{E}$$

et alors les grandeurs physiques réelles vérifient $\vec{v}(t) \sim \frac{-eE_0}{\alpha} \cos(\omega t) \vec{e}_z$

En utilisant la définition de la densité de courant volumique, on obtient la loi d'Ohm locale traduisant la proportionnalité entre le courant et le champ électrique

$$\vec{j} = -n^* e \vec{v} \underset{\omega\tau \ll 1}{\sim} \frac{n^* e^2}{\alpha} \vec{E} = \sigma_0 \vec{E}$$

Définition :

Dans un milieu conducteur, la loi d'Ohm locale s'écrit :

$$\vec{j} = \sigma_0 \vec{E}$$

où σ_0 est la conductivité électrique s'exprimant en $S.m^{-1}$ (l'unité siemens S est l'inverse de l'Ohm : $S = \Omega^{-1}$).

Dans l'exemple précédent, nous avons fait apparaître un temps caractéristique d'évolution de la vitesse des charges $\tau = m\sigma_0/ne^2$. Pour du cuivre, le nombre d'atomes par unité de volume vaut $n^* \approx 8.10^{28} \text{ at.m}^{-3}$, la conductivité est $\sigma_0 \approx 6.10^7 \text{ S.m}^{-1}$, ce temps caractéristique vaut ⁴

$$\tau = \frac{m}{\alpha} = \frac{m\sigma_0}{n^*e^2} = 2.10^{-14} \text{ s} \quad \text{soit} \quad f \sim 1/\tau = 5.10^{13} \text{ Hz}$$

4. On observe que le régime transitoire est très court, justifiant l'approximation de réponse quasi instantanée pour des conducteurs parfaits.

Cette fréquence correspond à une longueur d'onde de l'infra-rouge. Ainsi, pour un large domaine du spectre électromagnétique, allant des ondes radios au domaine des micro-ondes (cf. fig. 1.3), le modèle de la loi d'Ohm locale est valide ⁵ pour une conductivité réelle pour tous les métaux présentés dans le tableau 1.1.

métal	$\sigma_0 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$
Argent	63
Cuivre	59,6
Or	45,2
Aluminium	37,7

TABLE 1.1 – Conductivité électrique de différents métaux.

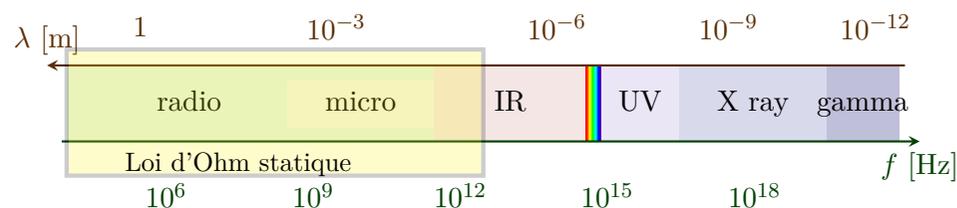


FIGURE 1.3 – Domaine d'approximation de la loi d'Ohm locale statique (encadré).

5. Plus précisément, σ_0 est la conductivité statique. Il est possible d'étendre le domaine de validité pour les ondes IR et visibles avec une conductivité dépendante de la fréquence selon $\vec{j} = -n^* e \vec{v} = \frac{-n^* e^2 / \alpha}{1 + i\omega\tau} \vec{E} = \sigma \vec{E}$ avec $\sigma = \frac{\sigma_0}{1 + i\omega\tau}$.

2 - Conductivité et résistance électrique

A l'échelle macroscopique, on retrouve la loi d'Ohm $U = R \times I$ pour un fil conducteur soumis à une différence de potentiel U et parcouru par un courant I .

En effet, si on note ℓ la longueur du fil, la différence de potentielle s'exprime $U = \int_0^\ell \vec{E} \cdot dz \vec{e}_z = E\ell$, pour un champ électrique uniforme. Si on note S l'aire de la section du fil, la loi d'Ohm locale, conduit à

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_S \sigma_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sigma_0 E S$$

et donc $U = \sigma_0 E S = \sigma_0 \frac{S}{\ell} I = RI$ en posant $R = \sigma_0 \frac{S}{\ell}$.

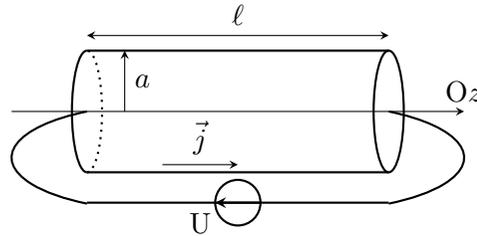


FIGURE 1.4 - Conducteur cylindrique soumis à une différence de potentiel.

Propriété :

La résistance électrique d'un cylindre de conductivité ^a σ_0 , de section S et de longueur ℓ par

$$R = \frac{1}{\sigma_0} \frac{\ell}{S}$$

^a. On la trouve aussi sous la forme $R = \rho \frac{\ell}{S}$ avec $\rho = 1/\sigma_0$ la résistivité du matériau (en $\Omega \cdot m^{-1}$).

Exemple 2

On considère un fil de cuivre utilisé en séance de travaux pratiques, d'une longueur de 1 m, d'une section de $S = 0,75 \text{ mm}^2$ parcouru par une intensité de 1,0 A.

1 - Déterminer la résistance d'un tel fil. Commenter cette valeur au regard de son utilisation en travaux



pratiques.

2 - En supposant qu'un atome de cuivre fournit un électron de conduction, estimer le nombre d'électrons par unité de volume dans le métal.

3 - Estimer la vitesse moyenne des électrons lors de son utilisation.

Données :

- cuivre : masse volumique $m_v = 8,9 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$; masse atomique $m_a = 63,44 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$; conductivité $\sigma_0 = 6 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$
- nombre d'Avogadro $\mathcal{N}_A = 8,4 \cdot 10^{23}$; charge élémentaire $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Pour s'entraîner : exercice 2

1 - Calculons la résistance d'un fil de cuivre $R = \sigma_0 \frac{S}{\ell}$

$$R = \frac{1}{6 \cdot 10^7 \times 0,75 \times 10^{-6}} \approx 0,02 \Omega$$

Cette valeur est souvent négligeable devant les autres résistances des dipôles mis en jeu ($R_{TP} > 1 \Omega$).

2 - La densité électronique (nombre d'électrons par unité de volume) est donnée par $n^* = \mathcal{N}_A \frac{m_v}{m_a} = 8,4 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$

3 - Relions la vitesse au courant :

$$I = j \times S = n^* e v S \quad \text{soit} \quad v = \frac{I}{n^* e S} = 0,1 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$$

Cette vitesse est évidemment très faible, il s'agit d'une vitesse de déplacement moyen de l'ensemble des électrons (appelée vitesse de dérive), très inférieure à la vitesse individuelle d'un seul électron, toutes deux différentes de la vitesse de propagation du signal électrique.

3 - Charge dans un métal

L'équation de conservation de la charge $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}) = 0$, associée à la loi d'Ohm locale permet d'écrire :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\sigma_0 \vec{E}) = 0$$

En utilisant l'équation de Maxwell-Gauss $\text{div } \vec{E} = \rho/\epsilon_0$, on en déduit que :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \rho = 0$$

Ainsi, la densité volumique de charge suit une équation différentielle du premier ordre et de solution

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_0(\vec{r})e^{-t/\tau}$$

avec $\tau = \epsilon_0/\sigma_0$ le temps caractéristique de décroissance de la charge volumique⁶. Pour du cuivre, on obtient : $\tau \sim 2.10^{-19}$ s. On en déduit que si une charge apparaît localement à l'intérieur du métal, elle disparaît très rapidement... Il faut que le champ varie très rapidement (dans le domaine des rayons X) pour que des effets dus à la charge apparaissent.

Il existe néanmoins des charges surfaciques sur le pourtour d'un conducteur parcouru par un courant. Leur présence permet de garantir le flux d'électrons à l'intérieur du conducteur. Elles sont également responsables d'un champ électrique à l'extérieur du conducteur.

Remarque 1 :

Le champ électromagnétique est nul dans un fil conducteur parfait. Les charges de surface génèrent un champ électrique à l'extérieur, perpendiculaire au fil (radial) et leur déplacement un champ magnétique orthoradial. Le flux d'énergie (vecteur de Poynting) suit donc le fil, à son extérieur. Dans un conducteur réel avec des pertes (une résistance), des charges se déplacent aussi à l'intérieur d'où une composante longitudinale du champ électrique ($\vec{E}_{int} = \vec{j}/\sigma_0$) qui contribue à un flux d'énergie entrant (ce flux conduit à la puissance dissipée dans la résistance $P = UI$). De manière analogue, au niveau du générateur, on observe un flux sortant (cf. fig. 1.5). Finalement, le transfert d'énergie depuis le générateur vers le récepteur se fait i) le long des fils et ii) directement via l'espace libre (contribution généralement faible).

6. Un conducteur parfait présente une conductivité $\sigma_0 \rightarrow \infty$. Le temps de relaxation est alors nul, justifiant l'approximation de réponse quasi-instantanée pour des conducteurs parfaits (voir chap. ??).

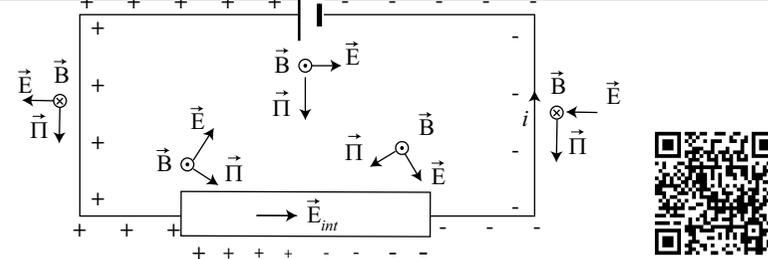


FIGURE 1.5 – Equivalence entre les approches composants et électromagnétisme dans un circuit électrique. Inspiré de Davis, Kaplan, *Poynting vector flow in a circular circuit*, Am. J. Phys. **79**, 1155 (2011). QR code, *Que se passe-t-il (vraiment) dans les fils électriques ?* D. Louapre.

4 - Effet Hall

La forte mobilité des porteurs de charge dans un conducteur les rend très sensible à la force de Lorentz en présence d'un champ magnétique. Sans perte de généralité, considérons un conducteur métallique rectiligne d'axe Ox parcouru par un courant i de sorte que la vitesse des électrons soit selon $+Ox$ (cf. fig. 1.6). En présence d'un champ magnétique extérieur statique $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$, les électrons de conduction sont soumis à la composante magnétique de la force de Lorentz $\vec{F}_{Lorentz} = -e\vec{v} \wedge \vec{B} = evB_0 \vec{e}_y$ qui polarise le conducteur selon l'axe Oy (apparition de densités surfaciques de charge positive et négative dû au déplacement des électrons). Il en résulte un champ électrique \vec{E}_H appelé champ de Hall dirigé selon \vec{e}_y (de la surface positive vers la surface négative) qui exerce à son tour une force $\vec{F} = q\vec{E}_H = -eE_H \vec{e}_y$ opposée à celle du champ magnétique de sorte qu'en régime permanent, la force de Lorentz est nulle :

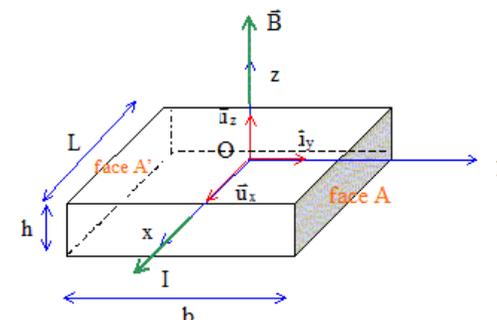


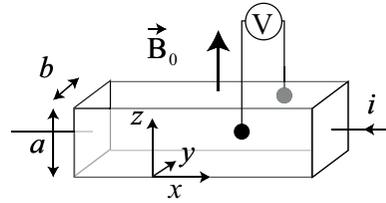
FIGURE 1.6 – Principe de l'effet Hall, vue 3D et de dessus.

$$\vec{F}_{Lorentz} = -e(\vec{E}_H + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \vec{0} \quad \text{soit} \quad \vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Le champ de Hall est mis à profit pour effectuer la mesure du champ magnétique à partir d'une différence de potentielle.

Exemple 3

Afin de réaliser une sonde de champ magnétique, on mesure la tension entre deux faces d'un ruban conducteur contenant n^* porteurs de charge par unité de volume. On note $I = 5\text{mA}$ le courant traversant le matériau de section $a \times b$, avec $a = 0,1\text{ mm}$ et $b = 1,0\text{ mm}$.



- 1 - Exprimer la vitesse des électrons en fonction de I , a , b , n^* et e .
- 2 - En déduire le champ électrique de Hall lorsque le matériau est plongé dans un champ magnétique constant $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$.
- 3 - Montrer que la mesure de la différence de potentiel est proportionnel au champ magnétique : $U_H = \alpha B_0$. On exprimera la constante α en fonction des variables citées.
- 4 - Pour du cuivre et du germanium^a, calculer la valeur de α sachant que le nombre porteur de charge est de l'ordre de $n_{\text{Cu}}^* = 8 \cdot 10^{28}\text{ m}^{-3}$ et $n_{\text{Ge}}^* = 2 \cdot 10^{21}\text{ m}^{-3}$. Quel matériau choisir pour mesurer un champ magnétique de l'ordre de $B_0 = 1\text{ mT}$?

Données : $e = 1,6 \cdot 10^{-19}\text{ C}$

^a. Dans les semi-conducteurs, le courant est transporté par les électrons et des « trous », c'est-à-dire des zones vide d'électrons qui se comportent comme une charge positive $+e$. On supposera ici que le modèle reste valide.

Pour s'entraîner : exercice 7

- 1 - Par définition, le courant est défini par $I = j \times ab$, avec une densité de courant uniforme. Le courant étant orienté selon $-\vec{e}_x$, la densité de courant s'écrit $\vec{j} = -n^*ev\vec{e}_x$ où v est la vitesse des électrons. Les électrons se déplacent sur $+\vec{e}_x$, on obtient : $\vec{v} = \frac{i}{n^*eab}\vec{e}_x$.
- 2 - En régime stationnaire, la force de Lorentz est nulle, on en déduit le champ de Hall : $\vec{F}_{\text{Lorentz}} = -e(\vec{E}_H + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \vec{0}$ soit $\vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B}_0$. En remplaçant l'expression de la vitesse, il vient : $\vec{E}_H = -\frac{iB_0}{n^*eab}\vec{e}_y$

- 3 - La différence de potentiel entre la face avant et arrière est donnée par :

$$U_H = - \int_0^b \vec{E}_H \cdot d\vec{l} = \int_0^b \frac{iB_0}{n^*eab} dy = \frac{I}{n^*ea} B_0 \quad \text{soit} \quad \alpha = \frac{I}{n^*ea}$$

- 4 - Pour le cuivre et le Germanium, on a : $\alpha_{\text{Cu}} = 4 \cdot 10^{-9}\text{ V} \cdot \text{T}^{-1}$ et $\alpha_{\text{Ge}} = 0,2\text{ V} \cdot \text{T}^{-1}$.

Pour un champ de 1 mT , la tension de Hall serait très difficile à mesurer sur du cuivre puisqu'il apparaîtrait une tension de l'ordre de $1 \cdot 10^{-12}\text{ V}$. En revanche, sur le germanium, la tension serait de l'ordre $0,2\text{ mV}$ et donc mesurable. La tension de Hall dans un semi-conducteur est beaucoup plus importante.



Peu onéreux et peu encombrants (cf. fig. 1.7), on retrouve les capteurs à effet Hall dans de nombreux objets du quotidien comme les détecteurs de fermeture de couvercle d'ordinateurs et de téléphones portables ainsi que dans les moteurs électriques sans balai (trottinettes, vélo...), pour détecter la position du rotor et alimenter les bobines stator en conséquence.

FIGURE 1.7 – Sonde commerciale à effet Hall. Le boîtier contient également un amplificateur et un filtre.

Remarque 2 :

La résistance de Hall est définie par $R_H = U_H/I = B_0/n^*ea$. En bloquant des porteurs de charge dans un espace à deux dimensions, Von Klitzing observa à basse température des valeurs de R_H discrètes (cf. fig. 1.8), phénomène connu aujourd'hui sous la dénomination d'Effet Hall Quantique. Il reçut le prix Nobel de physique en 1985 pour sa découverte qui continue de susciter beaucoup d'intérêt de la part des théoriciens et des expérimentateurs. La reproductibilité de la hauteur des plateaux de Hall est telle qu'on s'en sert comme standard du ohm.

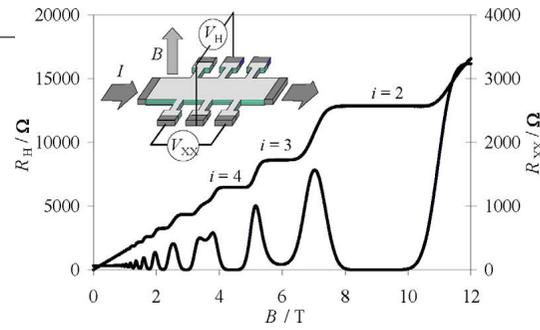


FIGURE 1.8 – Effet quantique sur le résistance de Hall. Tiré de Piquemal *et al*, Comptes Rendus de l'Académie **5**, 857 (2004).

II. Propagation dans un conducteur

1 - Equations de Maxwell dans l'ARQS

Considérons un milieu métallique sans propriété magnétique. Nous avons vu que la loi d'Ohm locale « statique » était valable pour des champs électromagnétique dont la période était supérieure, dans le cas du cuivre, à $\tau = \varepsilon_0/\sigma_0 = 2 \cdot 10^{-14}$ s. Dans ces conditions, la charge volumique peut être considérée comme nulle (cf. 3 -). L'équation de Maxwell-Gauss se résume donc à $\text{div } \vec{E} \approx 0$.

Par ailleurs, comparons dans l'équation de Maxwell-Ampère, le courant de conduction et celui de déplacement. Grâce à la loi d'Ohm locale et la notation complexe on obtient :

$$\vec{j} = \sigma_0 \vec{E} \quad \text{et} \quad \vec{j}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega \varepsilon_0 \vec{E}$$

On en déduit que

$$\frac{\|\vec{j}\|}{\|\vec{j}_D\|} = \frac{\sigma_0}{\omega \varepsilon_0} = \frac{1}{\omega \tau}$$

Dans le cadre de l'ARQS $\omega \ll 1/\tau$, le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction \vec{j} . l'équation de Maxwell-Ampère dans le cuivre se résume à $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$.

Propriété :

Pour un conducteur ohmique sans propriété magnétique, les équations de Maxwell deviennent :

- Maxwell-Gauss : $\text{div } \vec{E} = 0$
- Maxwell-Faraday : $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
- Maxwell-Thomson : $\text{div } \vec{B} = 0$
- Maxwell-Ampère : $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \sigma_0 \vec{E}$

2 - Diffusion du champ EM

Par application du double rotationnel, on obtient l'équation de propagation pour le champ électrique :

$$\text{rot } \underbrace{\text{rot } \vec{E}}_{=-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} = \text{grad } \underbrace{\text{div } \vec{E}}_{=0} - \Delta \vec{E}$$

Or, en permutant opérateur rotationnel et dérivée temporelle, on en déduit que :

$$\text{rot } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \sigma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

On obtient alors une équation de diffusion pour le champ électrique :

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \sigma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Remarque 3 :

L'équation de diffusion^a diffère de l'équation de propagation de d'Alembert car elle n'est pas invariante par retournement temporel ($t' = -t$) :

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) = \mu_0 \sigma_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

mais

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, -t) = -\mu_0 \sigma_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, -t)}{\partial t} \neq \mu_0 \sigma_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, -t)}{\partial t}$$

Cela caractérise un phénomène irréversible (contrairement à une équation d'onde, invariante par retournement temporel, qui accepte des solutions propagatives *et* contra-propagatives)^b.

a. Il s'agit d'une équation similaire à celle de diffusion thermique avec un coefficient de diffusion $D = 1/\mu_0 \sigma_0$.

b. Le caractère irréversible est associé à la conductivité finie en présence de pertes ($\sigma_0 = ne^2/\alpha$ dans le modèle de Drude avec α coefficient de frottements).

Exemple 4

Déterminer l'équation de propagation pour le champ magnétique dans un conducteur ohmique sans propriété magnétique.

Données : $\text{rot rot } \vec{X} = \text{grad div } \vec{X} - \Delta \vec{X}$;

Appliquons la formule du double rotationnel

$$\text{rot } \underbrace{\text{rot } \vec{B}}_{=\mu_0 \sigma_0 \vec{E}} = \text{grad } \underbrace{\text{div } \vec{B}}_{=0} - \Delta \vec{B}$$

Or, par linéarité de l'opérateur rotationnel, on en déduit que :

$$\text{rot } \mu_0 \sigma_0 \vec{E} = \mu_0 \sigma_0 \text{rot } \vec{E} = -\mu_0 \sigma_0 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

On obtient alors une équation de diffusion pour le champ électrique :

$$\mu_0 \sigma_0 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \Delta \vec{B}$$

3 - Effet de peau

On s'intéresse à la propagation d'une onde électromagnétique dans un conducteur. Considérons un métal occupant la partie $x > 0$, le domaine $x < 0$ étant assimilé au vide. On suppose la présence d'un champ magnétique extérieur de la forme

$$\vec{B}_{ext}(x < 0, t) = B_0 \cos \omega t \vec{e}_y,$$

, source d'un champ électromagnétique dans le métal. Dans le conducteur, les fluctuations temporelles du champ magnétique vont mettre les charges de conduction (électrons) mouvement, on s'intéresse alors à la propagation du champ électromagnétique dans le métal qui suit l'équation de diffusion $\Delta \vec{B} = \mu_0 \sigma_0 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. L'invariance de la situation selon y et z impose $\vec{B}(x, y, z, t) = \vec{B}(x, t)$. De plus, par continuité $B_{\perp} = 0$ dans le métal puisque le champ extérieur n'a pas de composante orthogonale à l'interface métal/vide. Finalement, $\vec{B} = B(x, t) \vec{e}_y$ et l'équation de diffusion se simplifie selon

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \mu_0 \sigma_0 \frac{\partial B}{\partial t}$$

On cherche donc une solution sous la forme d'une onde plane

$$\vec{B}(x, t) = B_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_y$$

De plus, la continuité⁷ \vec{B} impose $\vec{B}(x = 0, t) = B_0 \cos \omega t \vec{e}_y$.

En injectant cette solution dans l'équation de diffusion précédente, on obtient la relation de dispersion

$$(-ik)^2 = i\mu_0 \sigma_0 \omega \quad \text{soit} \quad \underline{k}^2 = -i\mu_0 \sigma_0$$

k est donc complexe, et noté \underline{k} . Pour le déterminer, il suffit de remarquer que :

$$-i = e^{-i\pi/2} \quad \text{et} \quad (e^{-i\pi/2})^{1/2} = e^{-i\pi/4} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

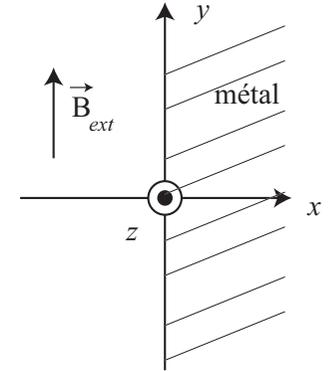


FIGURE 1.9 – Champ magnétique variable à la surface d'un métal.

7. Valable pour une description volumique du conducteur. Par contre, en présence de courant surfacique, $B_{//}$ est discontinue, nous reviendrons sur ce point plus loin.

On obtient alors le vecteur d'onde sous la forme :

$$\underline{k}_{\pm} = \pm \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\mu_0 \sigma_0 \omega} = \pm \frac{1-i}{\delta}$$

avec $\delta = \sqrt{2/\mu_0 \sigma_0 \omega}$ une longueur caractéristique de la propagation du champ dans le milieu.

L'amplitude du champ est donc une combinaison linéaire de deux types de fonctions

$$e^{i(\omega t - \underline{k}_{+} x)} = e^{i[\omega t - (1-i)x/\delta]} = e^{-x/\delta} e^{i(\omega t - x/\delta)} \quad \text{et} \quad e^{i(\omega t - \underline{k}_{-} x)} = e^{x/\delta} e^{i(\omega t + x/\delta)}$$

Le vecteur \vec{k}_{+} correspond à une onde dont l'amplitude décroît de façon exponentielle tandis que \vec{k}_{-} à une croissance exponentielle. Pour notre exemple, le métal remplissant l'espace $x > 0$, seule la fonction d'amplitude décroissante possède un sens physique. L'écriture du champ magnétique en notation réelle s'écrit alors

$$\vec{B}(x,t) = B_0 e^{-x/\delta} \cos(\omega t - x/\delta) \vec{e}_y$$

Il s'agit d'une onde dont l'enveloppe donnée par $e^{-x/\delta}$ est exponentiellement décroissante. La distance caractéristique d'atténuation δ étant également celle d'oscillations, nous n'observons pas d'oscillation (cf. fig. 1.10). La pseudo-période spatiale des oscillations vaut $\Delta x = 2\pi\delta$ tandis que l'atténuation sur une période est $e^{-\Delta x/\delta} = e^{-2\pi} = 0,002$, l'amplitude diminue donc aussi vite que le temps d'une oscillation.

▲ Définition :

Dans un milieu ohmique le champ se propage en étant atténué d'un facteur $e^{-x/\delta}$, où δ est appelée **épaisseur de peau**. Cette grandeur correspond à la distance caractéristique de pénétration de l'onde dans le métal, elle dépend à la fois de la conductivité du matériau et de la fréquence de l'onde électromagnétique :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma_0 \omega}}$$

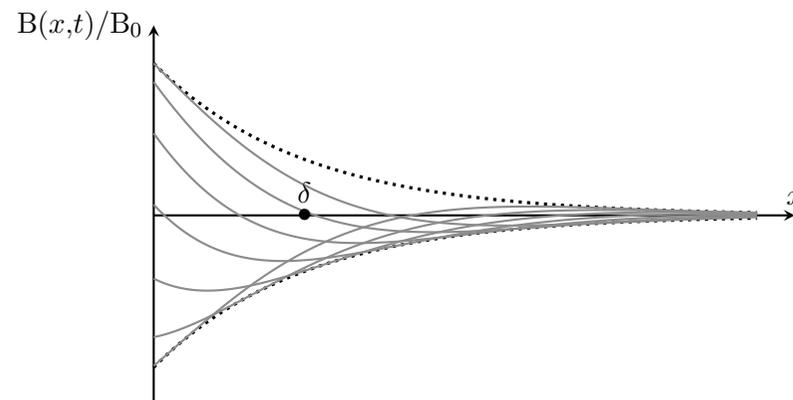


FIGURE 1.10 – Atténuation d'une onde électromagnétique dans un métal : effet de peau.

Cet effet est mis en oeuvre dans les cages de Faraday qui permet de protéger d'un environnement électromagnétique (effet de la foudre sur une voiture métallique par exemple). On peut réaliser une cage de Faraday avec un grillage métallique dont les dimensions dépendent de la fréquence. C'est utilisé dans les portes de four micro-onde (le reste du four étant métallisé aussi) pour éviter toute fuite du rayonnement électromagnétique.



FIGURE 1.11 – Cage de Faraday (palais de la découverte, ©A. Tavenaux, ). Les ondes électromagnétiques ne peuvent pénétrer à l'intérieur d'une cage métallique.

L'épaisseur de peau est d'autant plus faible que la conductivité de matériau et la fréquence de l'onde sont élevées. Dans un métal, l'onde est dissipée par effet Joule au sein du conducteur, sur une épaisseur de l'ordre de quelques δ .

Fréquence	50 Hz	60 Hz	10 kHz	100 kHz	1 MHz	10 MHz
δ	9,38 mm	8,57 mm	0,66 mm	0,21 mm	66 μm	21 μm

TABLE 1.2 – Épaisseur de peau dans le cuivre à différentes fréquences.

Remarque 4 :

La profondeur de pénétration dépend du matériau par la conductivité et de la fréquence $\delta = 1/\sqrt{\mu_0\sigma_0\pi f}$. Une équipe de chercheurs ont détourné une sonde de microscope à force atomique en antenne d'onde électromagnétique. En utilisant la dépendance de l'épaisseur de peau avec la fréquence, leur dispositif est capable de sonder la matière à différentes profondeurs et ainsi de détecter la position de défauts dans le matériau (cf. fig. 1.12).

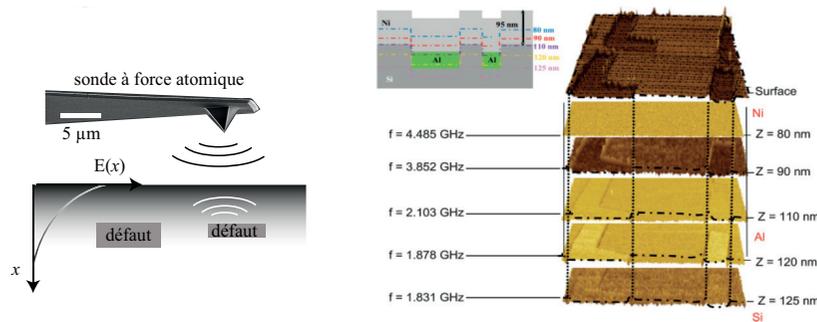


FIGURE 1.12 – Sonde à force atomique pour l'étude d'un matériau selon la profondeur. D'après Plassard *et al*, Phys. Rev. B **83**, 121409(R) (2011). ©(2024) aps.

Exemple 5 Dans la configuration de l'exemple précédent, le champ magnétique dans le métal est de la forme

$$\vec{B}(x,t) = B_0 e^{-x/\delta} \cos(\omega t - x/\delta) \vec{e}_y$$

1 - Déterminer le vecteur densité de courant $\vec{j}(x,t)$ et en déduire le champ électrique $\vec{E}(x,t)$.

2 - Sachant que $\delta = \sqrt{2}/\mu_0\sigma_0\omega$, que devient le courant volumique dans la limite du conducteur parfait $\sigma_0 \rightarrow \infty$.

Données :

$$\vec{rot}U = \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

$$\sin a - \cos a = \sqrt{2} \cos(a + 3\pi/4)$$

1 - Utilisons l'équation de Maxwell-Ampère pour les conducteurs : $\vec{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$. Sachant que le champ magnétique est porté \vec{e}_y et ne dépend que de x , on en déduit que la densité de courant est selon z et vérifie

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(B_0 e^{-x/\delta} \cos(\omega t - x/\delta) \right) = \mu_0 j_z(x,t)$$

On obtient après calcul :

$$\begin{aligned} j_z(x,t) &= \frac{B_0}{\mu_0 \delta} e^{-x/\delta} \left[-\cos(\omega t - x/\delta) + \sin(\omega t - x/\delta) \right] \\ &= \frac{\sqrt{2} B_0}{\mu_0 \delta} e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \frac{3\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

D'après la loi d'Ohm locale, le champ électrique vaut donc :

$$\vec{E}(x,t) = \frac{\vec{j}}{\sigma_0} = \frac{\sqrt{2} B_0}{\mu_0 \delta \sigma_0} e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \frac{3\pi}{4}\right) \vec{e}_z$$

2 - Explicitons la densité de courant en faisant apparaître la conductivité :

$$\begin{aligned} j_z(x,t) &= \frac{\sqrt{2} B_0}{\mu_0 \times \sqrt{2}/\mu_0 \sigma_0 \omega} e^{-x\sqrt{\mu_0 \sigma_0 \omega}/2} \cos\left(\omega t - x\sqrt{\frac{\mu_0 \sigma_0 \omega}{2}} + \frac{3\pi}{4}\right) \\ &= \frac{\sqrt{\omega} B_0}{\sqrt{\mu_0}} \underbrace{\sqrt{\sigma_0} e^{-\sqrt{\sigma_0} x \sqrt{\mu_0 \omega}/2}}_{\substack{\rightarrow 0 \\ \sigma_0 \rightarrow \infty}} \underbrace{\cos\left(\omega t - x\sqrt{\frac{\mu_0 \sigma_0 \omega}{2}} + \frac{3\pi}{4}\right)}_{\in [-1,1]} \end{aligned}$$

On en déduit que pour un conducteur parfait ($\sigma_0 \rightarrow \infty$), la densité volumique de courant est nulle, tout comme le champ électrique. Dans ce cas, on peut définir un courant surfacique comme limite de la densité de courant sur l'épaisseur de peau, comme proposé en annexe ???. On retrouve alors le comportement du conducteur parfait décrit au chapitre ???, notamment la discontinuité de la composante tangentielle $B_{//}$.

III. Puissance cédée aux porteurs de charge

1 - Transfert d'énergie

Dans le modèle de Drude, les charges sont soumises de la part du réseau de cations métalliques à une force de frottement fluide. Une interprétation classique consiste à considérer qu'il s'agit de choc avec les défauts de métal. La mise en vibration des cations métalliques par les électrons constitue un échauffement de la matière connu sous le nom d'effet Joule.

Remarque 5 :

La puissance cédée aux charges dans un fil conducteur peut s'écrire (en notant $\rho = n^*e$ la densité volumique de charge

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \iiint d\vec{F}_{\text{Lorentz}} \cdot \vec{v} = \iiint dq (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = \iiint dq \vec{E} \cdot \vec{v} \\ &= \iiint n^* e \vec{E} \cdot \vec{v} dV = \iiint \vec{j} \cdot \vec{E} dV \end{aligned}$$

qui généralise l'expression de l'effet Joule.

Ainsi, pour un conducteur de section S et longueur ℓ , la loi d'Ohm locale conduit à

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \iiint \sigma_0 E^2 dV = \sigma_0 E^2 S \ell \\ &= \sigma_0 \frac{U^2}{\ell^2} S \ell = \frac{U^2}{R} = RI^2 \end{aligned}$$

effet Joule à l'origine de l'échauffement dans les circuits électriques, sources de pertes mais aussi utilisés pour chauffer (ci-contre, coupe d'un radiateur à inertie sèche).



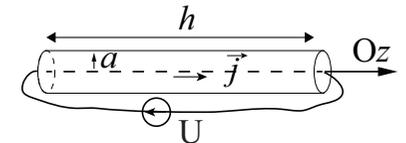
©Héliotronic, (cc) (i)



Exemple

6

Un barreau métallique cylindrique de rayon a et de longueur h est soumis à une différence de potentiel U . On note σ_0 la conductivité du métal et on supposera $h \gg a$.



1 - Déterminer le champ électrique dans le cylindre en fonction de U et h .

2 - Exprimer la puissance volumique cédée aux porteurs de charge en fonction de σ_0 et j puis en fonction de σ_0, U et h .

3 - Montrer que $\iiint_{\text{barreau}} \mathcal{P}_{\text{vol}} dV$ peut s'exprimer sous la forme d'une grandeur connue.

Définition :

Dans un milieu conducteur, la **puissance volumique cédée aux porteurs de charges** par l'onde électromagnétique est définie (cf. annexe. III) par :

$$\mathcal{P}_{\text{vol}} = \vec{j} \cdot \vec{E} \quad (\text{en } \text{W} \cdot \text{m}^{-3})$$

4 - Calculer le flux du vecteur de Poynting à travers la surface latérale du conducteur. Conclure

Pour s'entraîner : exercice 3

1 - En supposant le cylindre quasi infini, on peut supposer que le potentiel dans le cylindre ne dépend que de z . Dans un métal, la densité volumique de charge est nulle, on en déduit que

$$\Delta V = 0 \quad \text{soit} \quad V(z) = -U \times (z - a) + V(h)$$

Ainsi,
$$\vec{E} = -\text{grad} V = \frac{U}{h} \vec{e}_z$$

2 - Par définition, la puissance volumique cédée aux porteurs de charges vaut :

$$\mathcal{P}_{vol} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{j^2}{\sigma_0}$$

L'application de la loi d'Ohm locale permet de déterminer la valeur de la densité de courant :

$$\vec{j} = \sigma_0 \vec{E} = \sigma_0 \frac{U}{h} \vec{e}_z$$

On obtient :

$$\mathcal{P}_{vol} = \sigma_0 \frac{U^2}{h^2}$$

3 - La puissance volumique est uniforme sur le barreau, on en déduit que :

$$\iiint_{\text{barreau}} \mathcal{P}_{vol} d\mathcal{V} = \mathcal{P}_{vol} \times h\pi a^2 = \sigma_0 U^2 h^2 \times h\pi a^2 = U^2 \frac{\sigma_0 \pi a^2}{h}$$

d'où
$$\iiint_{\text{barreau}} \mathcal{P}_{vol} d\mathcal{V} = \frac{U^2}{R} \quad \text{avec} \quad R = \frac{h}{\sigma_0 \pi a^2}$$

4 - Par définition : $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$. Dans le conducteur, l'application de Maxwell-Ampère donne :

$$\vec{B}(r) = \mu_0 \frac{j r}{2} \vec{e}_\theta$$

En remplaçant dans l'expression précédente :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = -\frac{j^2 r}{2\sigma_0} \vec{e}_r$$

Le flux du vecteur de Poynting sur la surface latérale donne :

$$\iint_{S_{lat}} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \Pi(r = a) \times 2\pi a h = -\frac{j^2 \pi a^2 h}{\sigma_0} = -\iiint_{\text{barreau}} \mathcal{P}_{vol} d\mathcal{V}$$

On en conclut que

$$\iint_{S_{lat}} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} + \iiint_{\text{barreau}} \mathcal{P}_{vol} d\mathcal{V} = 0$$

Cette équation traduit le fait que la puissance transportée par l'onde électromagnétique est intégralement transmise dans le conducteur⁸.

2 - Chauffage par induction

Pour un conducteur soumis à un champ oscillant, nous avons vu que l'onde électromagnétique était confiné sur une épaisseur δ , le vecteur densité de courant valait alors :

$$j_z(x, t) = \frac{\sqrt{2} B_0}{\mu_0 \delta} e^{-x/\delta} \cos(\omega t - x/\delta + \frac{3\pi}{4})$$

La puissance volumique dissipée par effet Joule vaut alors :

$$\mathcal{P}_{vol} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{j^2}{\sigma_0} = \frac{2B_0^2}{\mu_0^2 \delta^2 \sigma_0} e^{-2x/\delta} \cos^2(\omega t - x/\delta + \frac{3\pi}{4})$$

En remplaçant l'épaisseur de peau, on obtient en valeur moyenne :

$$\langle \mathcal{P}_{vol} \rangle = \frac{\omega B_0^2}{2\mu_0} e^{-2x/\delta}$$

Le chauffage par induction de pièces métalliques est une méthode industrielle permettant de se passer d'un four traditionnel (cf. fig. 1.13). Le choix de la fréquence de chauffage est un paramètre important de ces installations. En effet, nous avons vu que l'efficacité de transfert d'énergie de l'onde à la matière est proportionnel à la fréquence : $\langle \mathcal{P}_{vol} \rangle \propto \omega$, en revanche le volume de chauffage effectif dépend de l'épaisseur de peau donc diminue avec la fréquence ($\delta \propto 1/\sqrt{\omega}$). Les plaques de cuisson usuelles utilisent des fréquences voisines de 20 kHz.

⁸ La démonstration de l'équation permettant de relier le vecteur de Poynting, la puissance cédée aux porteurs de charge et les énergies électriques et magnétique est détaillée annexe III.

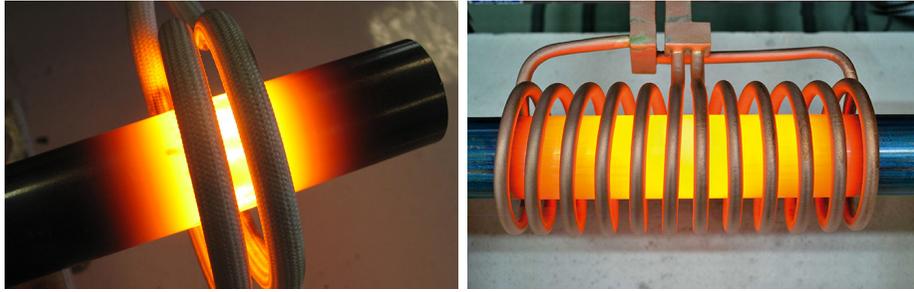


FIGURE 1.13 – Forge à induction de la société Polyplus ©.

Exemple 7

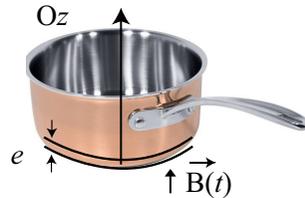
On place sur une plaque à induction, une casserole en cuivre de diamètre $d = 20$ cm et dont le fond possède un épaisseur $e = 2$ mm. Le champ magnétique imposé par la plaque est oscillant à la fréquence $f = 20$ kHz et d'amplitude $B_0 = 0,1 \mu\text{T}$.

- 1 - Évaluer l'épaisseur de peau dans le fond de la casserole.
- 2 - Représenter la puissance volumique de chauffage $\langle \mathcal{P}_{vol} \rangle = \frac{\omega B_0^2}{2\mu_0} e^{-2z/\delta}$.
- 3 - Justifier que la puissance de chauffage est définie par

$$\mathcal{P} \approx \pi d^2 / 4 \int_0^\infty \langle \mathcal{P}_{vol} \rangle dx$$

Calculer la puissance et conclure sur l'utilisation de telles casseroles sur une plaque à induction.

Données : conductivité du cuivre : $\sigma_0 = 6 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$; $\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6} \text{H} \cdot \text{m}^{-1}$.

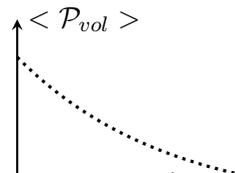


Pour s'entraîner : exercices 5, 8, 10

1 - Par définition : $\delta = \sqrt{2/\mu_0\sigma_0\omega} = 1/\sqrt{\pi\mu_0\sigma_0 f} = 0,5$ mm.

2 - Il s'agit d'une fonction décroissante de distance caractéristique $\delta/2$.

3 - La puissance volumique s'intègre sur tout



le fond de la casserole :

$$\mathcal{P} = \int_{z=0}^e \int_{r=0}^{d/2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \mathcal{P}_{vol} r dr d\theta dz$$

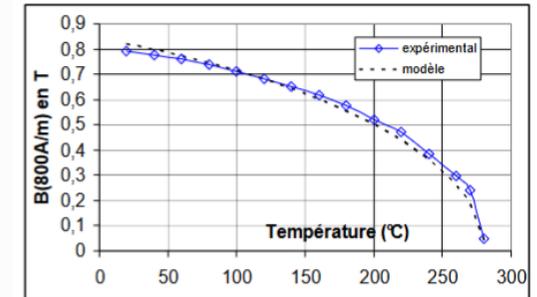
Comme $e \gg \delta$, l'intégrale selon z peut être approchée par une intégrale étendue jusqu'à l'infini. La valeur de \mathcal{P}_{vol} étant indépendante de r et θ , on obtient bien le résultat demandé. Ainsi :

$$\mathcal{P} \approx \frac{\pi d^2}{4} \int_{z=0}^\infty \frac{\omega B_0^2}{2\mu_0} e^{-2z/\delta} dz = \frac{\pi d^2 \omega B_0^2 \delta}{16\mu_0} = 3 \cdot 10^{-5} \text{ W}$$

Cette puissance est largement inférieure à la puissance requise (~ 3 kW). Le cuivre bien qu'excellent conducteur électrique ne possède pas de propriété magnétique permettant d'augmenter la puissance transmise par l'onde électromagnétique.

Remarque 6 :

De nouveaux alliages sont à l'étude pour réaliser le fond des casseroles compatibles avec les plaques de cuisson par induction. Une grande efficacité de conversion de puissance électromagnétique peut conduire à une température trop importante voire une déformation du récipient. Les alliages FeNiCr Phytherm permettent une autorégulation du chauffage par perte des propriétés magnétiques au-delà de 260°C (cf. fig. ci-contre, Étude magnétothermique d'un alliage à bas point de Curie en cuisson par induction. Symposium de Genie Electrique, Juin 2016, Thierry Waeckerle).



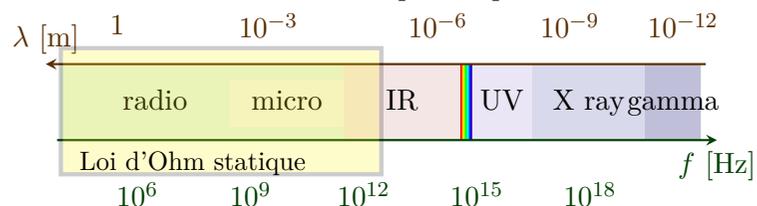
🔥 L'essentiel

Loi d'Ohm locale

Dans un milieu conducteur, la loi d'Ohm locale s'écrit aux basses fréquences (radiofréquence et microondes, cf Fig ci-dessous) :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

où σ est la conductivité électrique s'exprimant en $S.m^{-1}$.



Equation de diffusion

Dans le domaine basses fréquences ci-dessus, le courant de conduction est prépondérant devant le courant de déplacement, l'équation de Maxwell-Ampère devient : $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \sigma \vec{E}$

On obtient alors une équation de diffusion pour le champ électrique et magnétique :

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \Delta \vec{B} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

En régime harmonique, la relation de dispersion fait apparaître une longueur caractéristique de pénétration de l'onde appelée **épaisseur de peau** notée δ :

$$\underline{k}_{\pm} = \pm \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\mu_0 \sigma \omega} = \pm \frac{1-i}{\delta} \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{2/\mu_0 \sigma \omega}$$

• On retrouve les propriétés du conducteur parfait pour un conductivité infinie $\sigma \rightarrow \infty$.

Effet Joule

La conductivité finie conduit à l'effet Joule sous la forme générale

$$P = \iiint \vec{j} \cdot \vec{E} dV$$

qui conduit à $P = RI^2$ pour une résistance R parcourue par un courant d'intensité I .

L'effet Joule est néfaste dans les circuits électriques et microélectroniques. A contrario, il peut être utilisé pour chauffer facilement (résistance métallique dans les radiateur à inertie ou bouilloire par exemple) ou localement par induction des pièces de métallurgie.

Exercices

Les classiques

Exercice 1

solution p.14

On considère un milieu conducteur homogène de dimension supposée infinie. On note γ sa conductivité électrique en régime statique. On suppose qu'il y a n porteurs de charge libres par unité de volume, n est supposé indépendant du temps. Chaque porteur de charge libre est de masse m et possède une charge q .

1 - On soumet ce conducteur à un champ électrique permanent et uniforme \vec{E}_0 . On admet, suivant le modèle de Drude, que l'interaction des charges fixes sur un porteur de charge libre est assimilable à une force de frottement fluide $\vec{F} = -h\vec{v}$. Écrire l'équation différentielle du mouvement vérifiée par la vitesse d'un porteur de charge libre.

2 - Montrer que cette vitesse tend vers une vitesse limite \vec{v}_{lim} . On exprimera et définira un temps τ de relaxation du matériau.

3 - Exprimer la densité volumique de courant \vec{j} en fonction de v_{lim} , n et q . En déduire la relation entre γ, q, n et h .

4 - On suppose que le conducteur possède un électron libre par atome. La matériau considéré est de l'acier (alliage de fer avec du carbone en faible proportion). Préciser les ordres de grandeurs de n, h et τ .

Données : $\mu_{\text{acier}} = 8.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, $M_{\text{acier}} = 60 \text{ g.mol}^{-1}$, $\gamma_{\text{acier}} = 1.10^7 \text{ S.m}^{-1}$, $\mathcal{N} = 6.10^{23} \text{ mol}^{-1}$, $e = 1,6.10^{-19} \text{ C}$, $m_e = 9.10^{-31} \text{ kg}$.

Exercice 2

solution p.??

On modélise un éclair par un fil rectiligne parcouru par un courant $I(t)$.

1 - Représenter le courant dans une base adaptée. Sachant que les nuages sont chargés négativement, déterminer sur le schéma précédent le sens du courant.

2 - Justifier que le champ magnétique est de la forme : $\vec{B}(M,t) = B(r,t)\vec{e}_\theta$ en coordonnées cylindriques. Montrer que l'expression du champ magnétique peut se mettre

sous la forme $B(r,t) = K\frac{I(t)}{r}$ où K est une constante à déterminer. On justifiera soigneusement les hypothèses employées.

En cas d'orage, il est préconisé de ne pas s'abriter sous un arbre. On considère la situation suivante : une vache se situe près d'un arbre qui est traversé verticalement par l'éclair. On considère que la Terre possède une conductivité électrique γ et une densité volumique de courant $\vec{j}(r,t) = j(r,t)\vec{e}_r$ en coordonnées sphériques.

3 - Montrer que $j(r,t) = \frac{I(t)}{2\pi r^2}$.

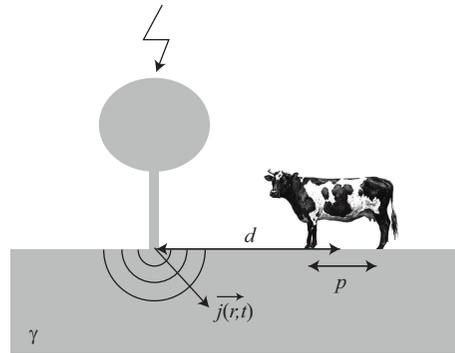
4 - Rappeler la loi d'Ohm locale et déterminer l'expression du champ électrique et en déduire une expression du potentiel sachant qu'il est nul à l'infini.

5 - On note U_p la tension entre les pattes avant et arrière de la vache.

En considérant que $d \gg p$, montrer que $U_p \sim \frac{I_p}{2\pi\gamma d^2}$

6 - On note d_{min} la distance pour laquelle il y a danger c'est à dire si un courant de 30 mA circule dans le corps dont la résistance est estimée à $R = 100\text{ k}\Omega$. Dans cette situation, on a $I = 15\text{ kA}$, $\gamma = 30\text{ mS/m}$ et $p = 2\text{ m}$. Déterminer l'expression de d_{min} et la calculer.

7 - Est il plus dangereux pour un homme ou une vache de s'abriter sous un arbre ?


Exercice 3

solution p.??

On considère deux plans infinis P et P' parallèles au plan Oxy et coupant l'axe Oz en $z = -a/2$ et $z = +a/2$. Ces deux plans définissent un conducteur de cuivre de conductivité γ .

On suppose que le métal est parcouru par une densité de courant $\vec{j} = j\vec{e}_y$.

1 - Définir l'orientation de $\vec{B}(M)$ en tout point M de l'espace.

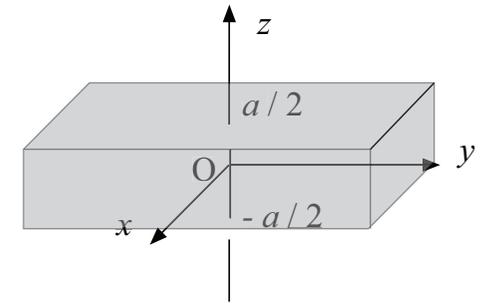
2 - Calculer $\vec{B}(M)$ à l'aide du théorème d'Ampère.

3 - Retrouver l'expression de $\vec{B}(M)$ à l'intérieur du conducteur grâce à l'équation de Maxwell-Ampère.

4 - Calculer la puissance volumique dissipée par effet Joule en fonction de γ , j et μ_0 .

5 - Évaluer le vecteur de Poynting.

6 - Effectuer un bilan d'énergie sur un cube de conducteur de côté a . Conclure.


Exercice 4

 D'après CCP 14
solution p.??

On impose un champ magnétique variable de la forme $\vec{B} = B_0 \cos \omega t \vec{e}_z$ dans le demi espace $x < 0$ avec $\omega = 3.10^2 \text{ rad.s}^{-1}$. Un métal non magnétique, de conductivité $\gamma = 5,3.10^7 \Omega^{-1}.\text{m}^{-1}$ occupe l'espace $x > 0$.

1 - En appliquant la loi d'Ohm locale, comparer les normes de la densité de courant volumique \vec{j} et du courant de déplacement $\epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$. On supposera que \vec{E} est de la forme $\vec{E} = E_0 \cos \omega t \vec{u}$ où \vec{u} est un vecteur unitaire.

2 - En évaluant $\text{rot rot } \vec{B}$, montrer que le champ magnétique suit une loi de diffusion de la forme : $\Delta \vec{B} = K \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

On exprimera K en fonction de μ_0 et γ . Dans quel autre domaine de la physique une telle équation apparaît ?

3 - Montrer qu'une solution de l'équation précédente dans le métal est de la forme : $\vec{B} = B_0 e^{-x/\delta} \cos(\omega t - x/\delta) \vec{e}_z$.

On exprimera alors δ en fonction de ω , μ_0 et γ .

4 - En utilisant l'équation de Maxwell-Ampère, déterminer le champ électrique dans le métal.

5 - En déduire l'expression du courant volumique et le représenter à $t = 0$.

6 - Calculer la valeur de δ . justifier que la distance caractéristique δ porte la dénomination d'épaisseur de peau.

Données : permittivité du vide : $\epsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$; $\text{rot rot } \vec{X} = \text{grad div } \vec{X} - \Delta \vec{X}$; $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$.

Problème ouvert

Exercice 5

solution p.??

On considère un conducteur de cuivre cylindrique de rayon $a = 1 \text{ mm}$, de longueur $L = 10 \text{ m}$ permettant le transport d'un signal électrique de fréquence $f = 100 \text{ kHz}$.



1 - Calculer l'épaisseur de peau à cette fréquence notée δ .

2 - En admettant qu'en régime variable, le courant est restreint à δ à la surface du conducteur, estimer la résistance du câble de rayon a .

3 - Pour transporter de très forts courants à haute fréquence, on utilise un câble tressé appelé fil de Litz comme représenté sur la figure ci-contre composé de 400 brins de diamètre $d = 0,1 \text{ mm}$. Justifier par un calcul d'ordre de grandeur de résistance l'intérêt d'un tel dispositif.

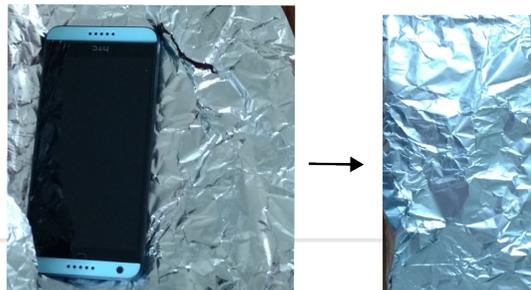
Données :

conductivité électrique du cuivre : $\sigma = 6 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$; perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ SI}$

Exercice 6

solution p.??

On emballe un smartphone dans une feuille d'aluminium d'épaisseur $e = 20 \mu\text{m}$. Le smartphone est conçu pour recevoir ou émettre des ondes de fréquence $f =$



2,4 GHz typiquement.

On estime qu'un signal de puissance suffisante vaut

$1 \mu\text{W}$ et correspond à « 5 barres » de réception. Une atténuation de 100 dB ne permet plus de réceptionner suffisamment le signal.

Déterminer un ordre de grandeur de la puissance de l'onde en sortie de la feuille d'aluminium.

Données :

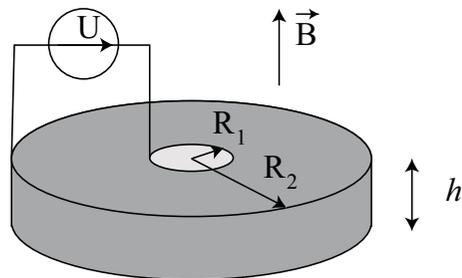
- conductivité de l'aluminium : $\sigma = 38 \cdot 10^6 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$
- échelle en décibel (dB) : $X_{dB} = 10 \log \frac{P}{P_0}$

Les difficiles

Exercice 7

solution p.??

On considère un anneau métallique cylindrique compris entre les rayons R_1 et R_2 et d'épaisseur h , on note σ sa conductivité. On applique une différence de potentiel entre la face interne et externe du dispositif. On supposera que les grandeurs utilisées sont indépendantes de z .



- 1 - Déterminer la résistance électrique de cet anneau.
- 2 - On plonge cet anneau dans un champ magnétique $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$ uniforme. On modélise les interactions du métal sur les électrons par une force de frottement fluide $\vec{f} = -m\vec{v}/\tau$. Déterminer l'équation reliant la densité volumique de courant \vec{j} , le champ électrique \vec{E} et le champ magnétique \vec{B} . On notera n le nombre d'électrons par unité de volume et e la charge élémentaire.
- 3 - On admet que le champ électrique reste radial dans l'anneau. En déduire que la résistance du disque est modifiée par effet **Corbino** et vaut alors :

$$R' = R(1 + C_H \sigma^2 B_0^2)$$

où $C_h = 1/ne$,

Exercice 8

solution p.??

Une onde électromagnétique plane, progressive et harmonique de pulsation ω , est transmise dans un conducteur et s'y propage parallèlement à l'axe Oz suivant les z croissants. Le champ électrique $\vec{E}_t(z,t)$ de l'onde transmise s'écrit, en notation complexe $\vec{E}_t(z,t) = E_{t0} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_x$, avec E_{t0} constante positive et $\vec{k} = (k_1 + ik_2) \vec{e}_z$, vecteur d'onde complexe pour lequel k_1 et k_2 sont réels.

- 1 - L'onde électromagnétique est-elle polarisée ? Si oui, de quelle polarisation s'agit-il ?
- 2 - En utilisant la loi d'Ohm locale et les équations de Maxwell établir l'équation de diffusion satisfaite par le champ électrique.
- 3 - Montrer que la relation de dispersion définissant le vecteur d'onde complexe \vec{k} s'écrit : $\vec{k}^2 = -i\omega\mu_0\sigma_0$.

- 4 - Pour une propagation selon les z croissants, déterminer le signe de k_1 et l'expression des composantes k_1 et k_2 en fonction des grandeurs ω , μ_0 et σ_0 .
- 5 - Déterminer l'expression du champ électrique réel $\vec{E}_t(z,t)$ en faisant apparaître une grandeur δ homogène à une longueur.
- 6 - Tracer la courbe représentative de l'amplitude du champ électrique en fonction de z .
- 7 - Déterminer l'expression du champ magnétique noté $\vec{B}_t(z,t)$.
- 8 - Montrer que la valeur moyenne du vecteur de Poynting s'écrit :

$$\langle \vec{\Pi}_t(z,t) \rangle = \frac{E_{t0}^2 e^{-2z/\delta}}{2\mu_0\omega\delta} e^{-2z/\delta} \vec{e}_z$$

- 9 - L'onde traverse une feuille d'aluminium sur une épaisseur $a = 1,0 \times 10^{-4}$ m. Calculer la valeur de δ , puis le coefficient d'atténuation défini par :

$$A = \frac{\| \langle \vec{\Pi}_t(z=a,t) \rangle \|}{\| \langle \vec{\Pi}_t(z=0,t) \rangle \|}$$

Données :

- conductivité électrique de l'aluminium $\sigma_0 = 3,8.10^7$ S.m⁻¹
- permittivité du vide : $\epsilon_0 = 8,9.10^{-12}$ F.m⁻¹
- perméabilité du vide : $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m⁻¹

Exercice 9

 D'après Centrale 06
solution p.??

On considère un milieu métallique occupant le demi-espace $z > 0$. Le métal est supposé ohmique et on note $\sigma = 7,6.10^7$ S.m⁻² sa conductivité électrique. On étudie les propriétés d'une onde électromagnétique dont le champ électrique, dans le métal, s'écrit en notation complexe

$$\vec{E} = E_0(z) \vec{e}_x e^{i(\omega t - kz)}$$

- 1 - Écrire la loi d'Ohm locale liant le vecteur densité de courant et le champ \vec{E} ainsi que la loi locale de conservation de la charge électrique.
- 2 - En utilisant une des équations de Maxwell et les expressions précédentes montrer que la densité volumique de charge ρ vérifie l'équation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{\tau} = 0$$

Calculer numériquement τ . Sachant qu'on utilise des signaux dont la fréquence est inférieure à 10^9 Hz, que peut-on en conclure pour la densité volumique de charge dans un métal ?

3 - On peut montrer, dans les mêmes conditions que précédemment, que l'équation de Maxwell-Ampère dans un métal s'écrit localement $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$. Établir que l'équation de propagation du champ électrique s'écrit

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

4 - Établir l'équation différentielle vérifiée par $E_0(z)$. On admet que les solutions de cette équation peuvent se mettre sous la forme

$$\vec{E} = \alpha E_0 \vec{e}_x e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - z/\delta)} + \beta E_0 \vec{e}_x e^{z/\delta} e^{i(\omega t + z/\delta)}$$

avec $\delta = \sqrt{2/\mu_0 \sigma \omega}$. Commenter ces expressions. Montrer qu'un des coefficients α ou β est nul.

5 - Donner l'expression de la densité de courant. Expliquer qualitativement comment se traduit le principe de conservation de l'énergie pour le phénomène étudié.

6 - Calculer numériquement δ pour $f = 50$ Hz; 50 kHz; 50 MHz. Montrer que le courant a tendance à se localiser à la surface du conducteur sur une épaisseur de l'ordre de quelques δ . Justifier la dénomination d'épaisseur de peau pour δ .

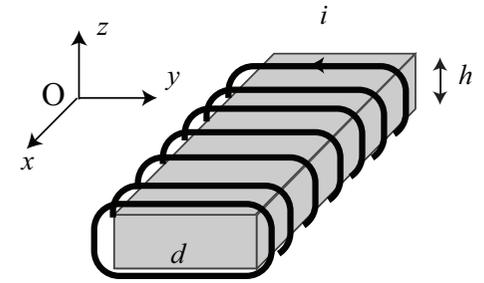
Exercice 10

D'après X.??
solution p.??

Certaines forges utilisent des spires alimentées par un courant alternatif permettant de chauffer les métaux par courants induits. L'objectif est de trouver les meilleurs paramètres de travail pour optimiser la puissance transmise à la pièce métallique. On considère une barre métallique infinie, de section $d \times h$ comme représentée sur le schéma ci-dessous. On admet que les équations de Maxwell dans un milieu possédant des propriétés magnétiques sont inchangées hormis μ_0 qui devient $\mu = \mu_0 \mu_r$.



1 - En adaptant les équations de Maxwell à la géométrie du problème, déterminer l'équation vérifiée par le champ $\vec{B}(x, y, z, t) = \underline{B}_x(x, y, z) e^{i\omega t} \vec{e}_x$ lorsque les bobines sont traversées par des courants sinusoïdaux à la pulsation ω avec $\delta = \sqrt{2/\mu\sigma\omega}$.



2 - Dans l'hypothèse d'une plaque mince ($h \ll d$), on peut négliger la dépendance suivant y , montrer que

$$\underline{B}(z) = B_s \frac{e^{(1-i)z/\delta} + e^{-(1-i)z/\delta}}{e^{(1-i)h/2\delta} + e^{-(1-i)h/2\delta}}$$

où B_s est l'amplitude du champ magnétique à la surface du métal.

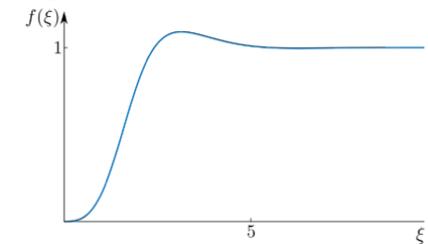
3 - Exprimer le vecteur densité de courant \vec{j} .

4 - Calculer la puissance moyenne dissipée par effet joule, par unité de surface dans le métal, sur une épaisseur h . Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme : $P_J = P_0 f(\xi)$ où $\xi = h/2\delta$ et :

$$f(\xi) = \frac{\sinh \xi - \sin \xi}{\cosh \xi + \cos \xi}$$

On utilisera le fait que $\langle \mathcal{P}_{vol} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{j} \cdot \vec{E}^*)$.

5 - On donne l'allure de la fonction f sur la courbe ci-contre. En s'aidant de la figure, déterminer quelle est la meilleure fréquence de travail pour maximiser la puissance dissipée par effet Joule dans la plaque. Cette valeur vous paraît-elle raisonnable pour une plaque d'1 mm d'épaisseur faite d'acier (de perméabilité relative $\mu_r = 100$ et de conductivité électrique $\sigma = 10^7$ S.m $^{-1}$?



Corrigés

I. Modèle de Drude

1 - Modélisation des pertes

Avec le modèle de Drude, la vitesse suit l'équation suivante

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \underbrace{\frac{\alpha}{m}}_{1/\tau} \vec{v} = -\frac{e}{m} \vec{E}$$

Le temps caractéristique d'atténuation de la vitesse peut s'apparenter au temps caractéristique entre deux chocs. Pour le cuivre, la vitesse moyenne peut être estimée de façon quantique. En physique du solide, la théorie des bandes permet d'estimer l'énergie que possède les électrons participant à la conduction, appelée énergie de Fermi. À partir de cette énergie, on peut remonter à la vitesse quadratique moyenne des électrons, pour le cuivre, elle est voisine de $v_{Fermi} = 1,6 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. La distance parcourue entre deux chocs est donc donnée par :

$$\ell = v_{Fermi} \times \tau \sim 30 \text{ nm}$$

Cette distance est largement supérieure à la distance inter-atomique, valant pour le cuivre : $a \sim 0,3 \text{ nm}$. Ainsi la force de frottement ne peut s'expliquer directement par des chocs sur les atomes. On l'interprète plutôt comme une interaction entre les électrons et les vibrations du réseau des cations métalliques

appelées phonons. On décrit finalement ces pertes par une force de frottements fluides.

Dans un milieu dense, cette force de frottements est principalement associée aux chocs. Cependant, ce terme d'amortissement existe dans tous les cas, y compris dans les milieux dilués, puisque un dipôle oscillant rayonne une onde électromagnétique et perd donc de l'énergie.

2 - Influence du champ magnétique

En présence d'une onde électromagnétique, les électrons sont soumis à la force de Lorentz : $\vec{F} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$. Il est possible de valider l'hypothèse d'une composante magnétique négligeable *a posteriori*. Nous avons montré que la vitesse des électrons suivait l'évolution du champ électrique, la loi d'Ohm locale permet d'écrire que $\vec{v} = -\vec{j}/ne \approx -\sigma_0 \vec{E}/ne$ aux basses fréquences ($f \ll 10^{14} \text{ Hz}$ pour le cuivre). Dans le métal, le vecteur d'onde est complexe, de la forme : $k_{\pm} = \pm(1 - i)/\delta$ où $\delta = \sqrt{2/\mu_0 \sigma_0 \omega}$ est l'épaisseur de peau. L'utilisation de l'équation de Maxwell-Faraday en notation complexe permet de relier la norme du champ électrique à celle du champ magnétique :

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow ||\vec{k}|| \times ||\vec{E}|| = \omega ||\vec{B}||$$

Il est donc maintenant possible d'estimer les différentes contributions à la force de Lorentz :

$$\frac{||\vec{v} \wedge \vec{B}||}{||\vec{E}||} \sim \frac{\sigma_0 ||\vec{E}|| / ne \times k ||\vec{E}|| / \omega}{||\vec{E}||}$$

En utilisant le module du vecteur d'onde $|k| = |2/\delta|$ et de l'épaisseur de peau, il vient en ordre de grandeur :

$$\frac{||\vec{v} \wedge \vec{B}||}{||\vec{E}||} \sim \frac{2\sigma_0 ||\vec{E}||}{ne\omega\delta} \sim \frac{\sqrt{2\mu_0}\sigma_0^{3/2} ||\vec{E}||}{ne\sqrt{\omega}}$$

Pour le cuivre, $\frac{\sqrt{2\mu_0}\sigma_0^{3/2}}{ne} \sim 6 \cdot 10^{-2}$ de sorte que l'hypothèse ci-dessus est vérifiée dans la plupart des cas usuels. En revanche, en régime statique ($\omega \rightarrow 0$), la contribution du champ magnétique est non négligeable et permet d'expliquer l'effet Hall.

II. Limite du conducteur parfait

Un conducteur parfait correspond à une conductivité infinie pour le conducteur ohmique. Dans un conducteur réel soumis à un champ magnétique variable $\vec{B}_{ext}(x < 0, t) = B_0 \cos \omega t \vec{e}_y$, la densité volumique de courant vaut, avec $\delta = \sqrt{2/\mu_0 \sigma \omega}$:

$$\vec{j}(x, t) = \frac{B_0}{\mu_0 \delta} e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - x/\delta + \frac{3\pi}{4}\right) \vec{e}_z$$

Ce courant devient nul pour une conductivité infinie, tout comme la distance caractéristique δ sur lequel il intervient. On peut alors définir le courant surfacique par

$$\vec{j}_s(x, t) = \int_0^\infty \vec{j}(x, t) dx = \int_0^\infty \frac{B_0}{\mu_0 \delta} e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - x/\delta + \frac{3\pi}{4}\right) \vec{e}_z$$

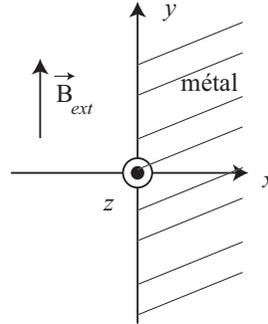
L'intégrale se calcule plus facilement comme partie réelle de la représentation complexe

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-(1+i)x/\delta} e^{i(\omega t + 3\pi/4)} dx &= e^{i(\omega t + 3\pi/4)} \left[-\frac{\delta e^{-(1+i)x/\delta}}{1+i} \right]_0^\infty = e^{i(\omega t + 3\pi/4)} \frac{\delta}{1+i} \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \text{ On obtient alors :} \\ &= e^{i(\omega t + 3\pi/4)} \frac{\delta(1-i)}{2} \\ &= \frac{\delta}{2} \left[\cos\left(\omega t + \frac{3\pi}{4}\right) + \sin\left(\omega t + \frac{3\pi}{4}\right) - i \cos\left(\omega t + \frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\omega t + \frac{3\pi}{4}\right) \right] \end{aligned}$$

En utilisant $\cos x - \sin x = \cos x + \cos(x + \frac{\pi}{2}) = 2 \cos(x + \frac{\pi}{4}) \cos(-\frac{\pi}{4}) = 2 \cos(x + \frac{\pi}{4})$, la partie réelle conduit à

$$\vec{j}_s = -\frac{B_0}{\mu_0} \cos \omega t \vec{e}_z$$

Cette valeur est bien indépendante de σ_0 et δ traduisant le fait que si la densité de courant devient nulle dans un espace qui se réduit, le débit de charge est non nul mais cantonné à la surface.



III. Théorème de Poynting et force de Laplace

L'onde électromagnétique interagit avec les porteurs de charge par la force de Lorentz :

$$\vec{F}_{Lorentz} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

La puissance de cette force ne dépend que du champ électrique orthogonalité de \vec{v} avec $\vec{v} \wedge \vec{B}$. On en déduit que la puissance reçue par un électron vaut :

$$\mathcal{P}(\vec{F}_{Lorentz}) = q\vec{E} \cdot \vec{v}$$

Soit n^* le nombre d'électrons par unité de volume, notons $\vec{j} = n^* q \vec{v}$ le vecteur densité de courant, on en déduit que la puissance donnée à un volume \mathcal{V} de matière est donné par :

$$\mathcal{P} = \iiint_{\mathcal{V}} n^* q \vec{E} \cdot \vec{v} dV = \iiint_{\mathcal{V}} \vec{j} \cdot \vec{E} dV$$

En utilisant l'équation de Maxwell-Ampère, nous pouvons remplacer $\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. On obtient alors :

$$\mathcal{P} = \iiint_{\mathcal{V}} \left[\frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{B} \cdot \vec{E} - \varepsilon_0 \underbrace{\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E}}_{\frac{\partial}{\partial t} (\frac{1}{2} \vec{E}^2)} \right] dV$$

L'identité d'analyse vectorielle $\text{div}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot \text{rot } \vec{a} - \vec{a} \cdot \text{rot } \vec{b}$ permet d'écrire que

$$\vec{E} \cdot \text{rot } \vec{B} = \vec{B} \cdot \text{rot } \vec{E} - \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B})$$

En injectant cette expression, et en utilisant la loi de Faraday, on a :

$$\mathcal{P} = \iiint_{\mathcal{V}} \left[\frac{1}{\mu_0} \underbrace{\text{rot } \vec{E}}_{-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \cdot \vec{B} - \frac{1}{\mu_0} \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} \right) \right] dV$$

En remarquant que $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{B}^2}{\partial t}$, on fait apparaître la dérivée d'une densité d'énergie volumique u_{em} :

$$\mathcal{P} = - \iiint_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left(\frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} + \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} \right)}_{u_{em}} + \operatorname{div} \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right] d\mathcal{V}$$

Nous avons une équation valable pour tout volume de matière. Avec $\mathcal{P} = \iiint_{\mathcal{V}} \vec{j} \cdot \vec{E} d\mathcal{V}$, l'équation précédente s'écrit localement comme une équation de conservation :

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{em} + \operatorname{div} \left(\underbrace{\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}}_{\vec{\Pi}} \right) = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

Le vecteur de Poynting apparaît alors naturellement dans l'opérateur divergence. L'équation de conservation traduit le fait qu'une densité d'énergie électromagnétique évolue dans le temps par un rayonnement via le vecteur de Poynting ou peut diminuer par cession aux porteurs de charges.

Remarque 7 :

Nous avons supposé ici que le milieu ne possédait ni de propriété magnétique ni de propriété électrique ($\mu_r = 1$ et $\varepsilon_r = 1$). Une démonstration similaire avec un comportement linéaire et sans perte conduirait à un résultat équivalent.