

Réflexion sur un métal parfait

En l'absence de pertes, les métaux se comportent comme des miroirs parfaits. La réflexion des ondes électromagnétiques sur une paroi permet de guider des ondes électromagnétiques (guide d'onde dans les radars ou les fours micro-onde par exemple), mais aussi de créer des ondes stationnaires, c'est à dire des zones de l'espace où le champ peut être soit nul soit maximal. Cette concentration de l'onde permet entre autres choses de favoriser les interactions entre le champ électromagnétique et la matière.

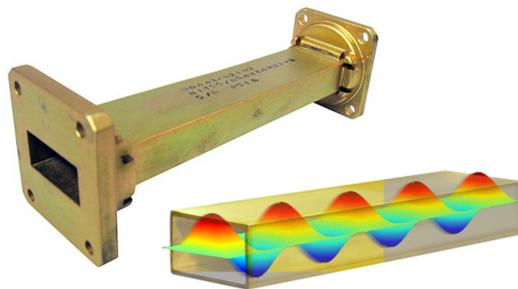


FIGURE 1.1 – Guide d'onde rectangulaire et forme du champ électrique qui s'y propage. Tiré de <https://www.radartutorial.eu/> (CC BY-NC-SA).

Au-delà des applications, l'étude du comportement d'une onde électromagnétique se réfléchissant sur un métal parfait constitue une situation idéalisée de plusieurs phénomènes que nous retrouverons lors de l'étude de milieux conducteurs (chap. ??) ou de guides d'ondes diélectriques (chap. ??).

I. Réflexion sur un métal parfait

1 - Modélisation

a) Champ incident

On considère la réflexion sous incidence normale d'une onde plane, progressive et monochromatique polarisée rectilignement sur un plan conducteur parfait en $x = 0$ (cf. fig. 1.2). La propagation s'effectuant selon $+Ox$, on définit le vecteur d'onde selon $\vec{k}_i = k \vec{e}_x$ et on choisit un champ électrique polarisé rectilignement selon \vec{e}_y de sorte qu'une écriture possible du champ électrique incident est :

$$\vec{E}_i(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

Comme il s'agit d'une OPPM se propageant dans un milieu assimilé au vide, la relation de structure permet d'obtenir le champ magnétique sous la forme :

$$\vec{B}_i(x,t) = \frac{\vec{e}_x \wedge \vec{E}_i}{c} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z$$

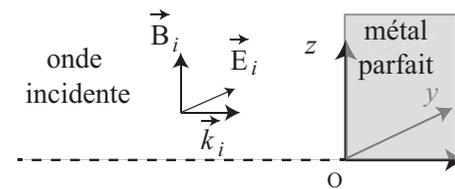


FIGURE 1.2 – Réflexion d'une OPPM sur un métal parfait.

Sous l'action du champ électromagnétique, les électrons du métal, soumis à la force de Lorentz $\vec{F} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ vont se déplacer créer un nouveau champ électromagnétique.

b) Modèle du métal parfait

Un métal parfait est un cas idéalisé où les électrons libres du métal (électrons de conduction) se déplacent dans le matériau sans résistance et quasi instantanément. On peut déduire ses principales propriétés à partir du modèle du jellium (cf. fig. 1.3a).

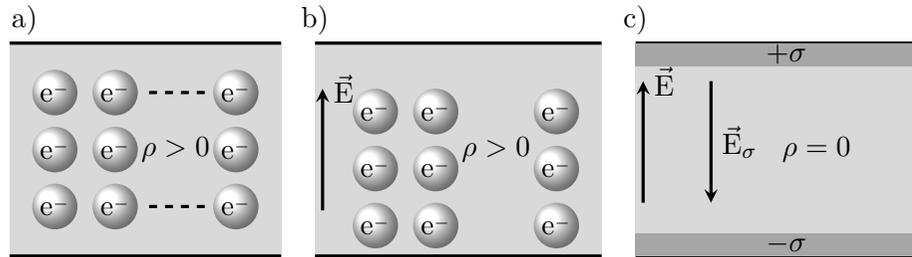


FIGURE 1.3 – a) Modèle du jellium pour un film métallique. b) Effet d'un champ électrique. c) Modèle équivalent.

Le métal parfait est assimilé à un gaz d'électrons libres et indépendants baignant dans un milieu homogène chargé positivement (densité volumique de charge ρ positive). En présence d'un champ électrique \vec{E} , les électrons sont soumis à une force de Lorentz ($\vec{F} = -e\vec{E}$) et se déplacent dans le sens opposé au champ. Le déplacement des électrons génère un excès de charges négatives à l'interface du bas et un défaut de charge négative à l'interface du haut (cf. fig.1.3b). On peut lui associer des densités de charges surfaciques $\pm\sigma$ (cf. fig.1.3b) qui génèrent un champ électrique qui annule le champ initial (tant que champ total n'est pas nul, les électrons se déplacent dans le sens opposé au champ total et produisent un champ opposé le diminuant). Cela se produisant quasi-instantanément, on en déduit les propriétés suivantes.

Propriété :

Dans un métal **parfaitement conducteur**

- les champs $\vec{E}(\vec{r},t)$ et $\vec{B}(\vec{r},t)$ sont nuls
- la densité volumique de charge ρ est nulle ;
- la densité volumique de courant \vec{j} est nulle.
- Il peut exister une charge surfacique σ ainsi qu'une densité de courant surfacique \vec{j}_s .

c) Relation de passage

Les relations de passage explicitent le comportement des champs électromagnétique à l'interface métal parfait/vide. Nous avons établi que, en régime statique, la densité surfacique de charge σ génère un champ $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x$ perpendiculaire à l'interface (cf. chap.?? et fig. 1.2 pour le repère). On admet que cela reste valable dans l'ARQS. Ainsi, la composante du champ électrique perpendiculaire à l'interface est discontinue (nul dans le métal et σ/ϵ_0 à l'extérieur, alors que la composante parallèle est continue.

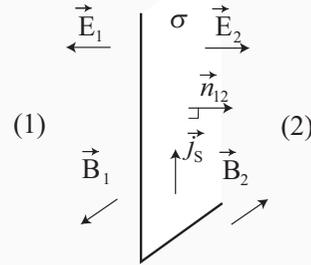
De manière analogue, le théorème d'Ampère (chap.??) permet d'établir que la nappe de courants surfacique $\vec{j}_s = j_s \vec{e}_y$ génère un champ magnétostatique $\vec{B} = -\frac{\mu_0}{2} j_s \vec{e}_z$ parallèle à l'interface. On admet que cela reste valable dans l'ARQS et la composante parallèle du champ magnétique est discontinue alors que la composante perpendiculaire est continue.

On retrouvera des propriétés similaires quelque soit le type de matériau. Ainsi, lorsque le champ électromagnétique traverse une interface séparant deux milieux ;

- la composante normale du champ magnétique se conserve $B_{\perp,1} = B_{\perp,2}$
- les composantes tangentielles du champ électrique se conservent $E_{//,1} = E_{//,2}$

Propriété :

Pour un métal parfait, les charges et les courants se concentrent à la surface du matériau. En utilisant les distributions surfaciques de charge (notée σ) et de courant (notée \vec{j}_S). Les relations de passage pour un métal parfait s'écrivent sous la forme ^a :



$$\begin{cases} \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12} \\ \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{12} \end{cases}$$

On note (1) et (2) les deux milieux différents (par exemple métal/air), \vec{n}_{12} , le vecteur normal à l'interface dirigé du milieu (1) vers le milieu (2).

^a. Attention à l'ordre des indices. Ainsi la différence de champ $\vec{E}_2 - \vec{E}_1$ est écrite en fonction du vecteur \vec{n}_{12} dirigé de 1 vers 2. Même remarque pour le champ magnétique.

2 - Résolution

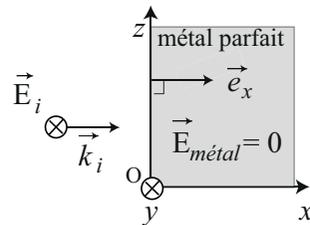
a) Nécessité d'une onde réfléchie

La relation de passage pour le champ électrique sur l'interface $x = 0$ s'écrit :

$$\vec{E}(x \rightarrow 0^+) - \vec{E}(x \rightarrow 0^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x$$

Le champ électrique est nul dans le métal parfait (cf. fig. ci-contre) donc $\vec{E}(x \rightarrow 0^+) = \vec{0}$. Si on ne considère que le champ incident, $\vec{E}(x \rightarrow 0^-) = \vec{E}_i(x = 0, t)$. Notons \vec{e}_x le vecteur normal à l'interface, la relation de passage s'écrit alors :

$$E_0 \cos \omega t \vec{e}_y = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x$$



La seule solution possible de cette équation vectorielle, est donc $E_0 = 0$ et $\sigma = 0$, en contradiction avec l'existence du champ incident.

b) Onde réfléchie

Les électrons à la surface du métal sont mis en mouvement par le champ électrique incident via la composante électrique ¹ de la force de Lorentz. Les courants ainsi créés sont parallèles au champ électrique incident (cf. fig. 1.4).

Les électrons sont à leur tour une source du champ électromagnétique donnant naissance au champ réfléchi. La force mettant en mouvement les électrons est sinusoïdale :

$$\vec{F} = -e\vec{E}_i(x = 0, t) = -eE_0 \cos \omega t \vec{e}_y$$

On en déduit que le champ réfléchi induit par le mouvement des électrons l'est également. Nous noterons ω la pulsation du champ $\vec{E}_r(x, t)$.

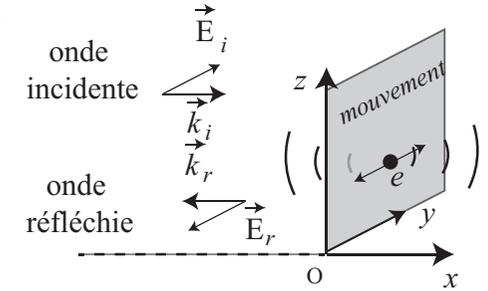


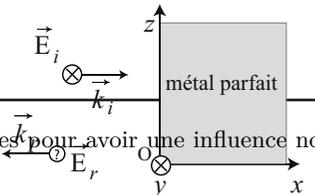
FIGURE 1.4 – Mouvement des électrons à la surface du métal.

Remarque 1 :

Le champ engendré par les courants existe aussi bien dans la partie $x < 0$ (en dehors du métal) que dans la partie $x > 0$ (dans le métal). En effet, par symétrie, les courants engendrent exactement le même champ électrique dans la partie $x > 0$, sauf qu'il se propage dans le sens positif de l'axe (Ox). Nous montrerons dans l'exemple qui suit que ce champ est en opposition de phase avec le champ incident, le champ résultant est donc nul du côté du métal.

Exemple 1

Soit $\vec{E}_i(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$, le champ électrique d'une onde incidente. On considère



1. La composante magnétique nécessite des vitesses élevées pour avoir une influence non-négligeable sur les électrons.

une onde réfléchi en $x = 0$ comme une onde plane^a de même pulsation ω , et de vecteur d'onde opposé au vecteur d'onde incident : $\vec{k}_r = -k \vec{e}_x$.

1 - Justifier que le champ réfléchi ne peut avoir de composante selon \vec{e}_x .

2 - En utilisant les relations de passage, montrer que le champ est de la forme : $\vec{E}_r(x,t) = -E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y$.

3 - En déduire l'expression du champ magnétique réfléchi $\vec{B}_r(x,t)$.

a. L'invariance par translation selon y et z permet d'assurer la planéité de l'onde.

Pour s'entraîner : exercices 1, 2 et 7

1 - L'onde étant transversale et se propageant selon $-\vec{e}_x$, le vecteur \vec{E}_r est porté dans un plan orthogonal à Ox . Une écriture possible du champ électrique réfléchi est donc :

$$\vec{E}_r(x,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{0ry} \cos(\omega t + kx + \phi_y) \\ E_{0rz} \cos(\omega t + kx + \phi_z) \end{pmatrix}$$

2 - Les relations de passage s'écrivent pour le champ électrique :

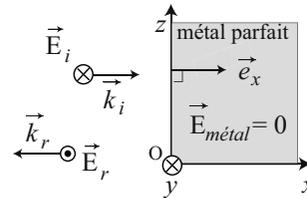
$$\vec{E}(x \rightarrow 0^+) - \vec{E}(x \rightarrow 0^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_x$$

Le champ défini dans le demi-espace $x < 0$ est obtenu par superposition du champ incident et du champ réfléchi :

$$\vec{E}(x < 0, t) = \vec{E}_i(x, t) + \vec{E}_r(x, t)$$

Le champ défini dans le demi-espace $x > 0$ correspondant au métal parfait, on en déduit que $\vec{E}(x \rightarrow 0^+) = \vec{0}$. La relation de passage peut se réécrire sous la forme :

$$0 - [\vec{E}_i(x \rightarrow 0^-, t) + \vec{E}_r(x \rightarrow 0^-, t)] = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_x$$



Il s'agit d'une équation vectorielle, la projection selon \vec{e}_y et \vec{e}_z permet d'obtenir :

$$\begin{cases} E_0 \cos \omega t + E_{0ry} \cos(\omega t + \phi_y) = 0 \\ E_{0rz} \cos(\omega t + \phi_z) = 0 \end{cases}$$

On en déduit

$$E_{0ry} = E_0 \text{ et } \phi_y = \pi \quad \text{ou} \quad E_{0ry} = -E_0 \text{ et } \phi_y = 0$$

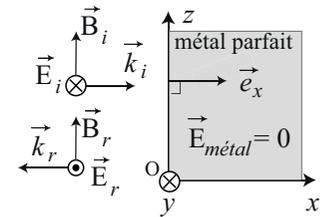
On obtient alors : $\vec{E}_r(x,t) = -E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y$

3 - L'onde réfléchi se propage également dans le vide, le champ magnétique s'obtient en utilisant les relations des OPPMs (pour une onde réfléchi se propageant selon $-\vec{e}_x$) :

$$\vec{B}_r = \frac{-\vec{e}_x \wedge \vec{E}_r}{c}$$

d'où $\vec{B}_r(x,t) = B_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_z$

Ainsi, $\begin{cases} \vec{E}_r(x,t) = -E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y \\ \vec{B}_r(x,t) = B_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_z \end{cases}$



Remarque 2 :

Lors de la réflexion sur un métal, le champ électrique est déphasé de π par rapport au champ incident.

3 - Onde stationnaire

a) Description

Sommons les deux contributions incidente et réfléchi pour obtenir l'onde résultante, il vient

$$\begin{cases} \vec{E}(x,t) = \vec{E}_i + \vec{E}_r = E_0 (\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx)) \vec{e}_y \\ \vec{B}(x,t) = \vec{B}_i + \vec{B}_r = \frac{E_0}{c} (\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx)) \vec{e}_z \end{cases}$$

En utilisant les formules de trigonométrie, on obtient

$$vec{E}(x,t) = 2E_0 \sin \omega t \sin kx \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \vec{B}(x,t) = \frac{2E_0}{c} \cos \omega t \cos kx \vec{e}_z$$

On observe sur l'expression du champ un découplage entre le temps et l'espace puisqu'elle peuvent se mettre sous la forme d'un produit de fonction temporelle et spatiale dont une représentation est proposée fig. 1.5. Ce type d'onde est qualifiée de stationnaire au contraire des fonctions de type $f(x \pm ct)$ dite propagative. On obtient généralement une onde stationnaire par superposition de deux ondes contra-propagatives.

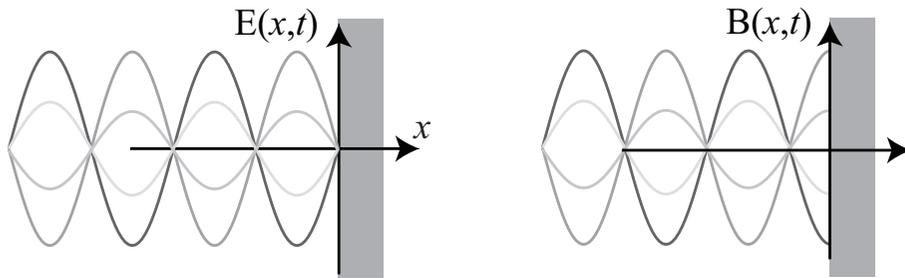


FIGURE 1.5 – Représentation des ondes stationnaires relatives aux champs électriques et magnétiques pour différents temps.

◆ Définition :

Une onde est dite **stationnaire** lorsque son amplitude peut se mettre sous la forme :

$$f(x) \times g(t)$$

Dans le cas présenté, les champ \vec{E}_r et \vec{B}_r restent orthogonaux mais sont en quadrature spatiale et temporelle (déphasage de $\pm\pi/2$). Le type de solution obtenue pour le champ total $\vec{E}_i + \vec{E}_r$ est appelé onde plane stationnaire et est très différent d'une onde plane progressive :

- les dépendances spatiale et temporelle interviennent séparément ;
- la dépendance spatiale intervient dans l'amplitude de l'oscillation temporelle et non plus dans la phase, de telle sorte que les champs vibrent en chaque point, en phase (cf. fig. 1.5).

En certains lieux de l'espace (appelés nœuds de vibrations), le champ est toujours nul. En d'autres points (appelés ventres de vibrations), l'amplitude de la vibration est maximale (cf. fig.1.6). La position des noeuds sont obtenus pour

$$2E_0 \sin \omega t \sin kx = 0$$

Soit : $kx_n = n\pi, n \in \mathbb{Z}$. Le métal étant défini dans la partie $x > 0$, seules les positions négatives ont un sens. Avec $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ on obtient la position des différents noeuds (cf. fig. 1.6)

$$x_n = -n\frac{\lambda}{2}, n \in \mathbb{N}$$

De manière analogue, les ventres sont obtenus pour

$$\sin kx = \pm 1 \quad \text{soit} \quad kx = -\frac{\pi}{2} - p\pi, p \in \mathbb{N}$$

On obtient alors la position des différents ventres : $x_p = -\frac{\lambda}{4} - p\frac{\lambda}{2}$.

Ces derniers sont donc simplement décalés de $\lambda/4$ par rapport aux noeuds.

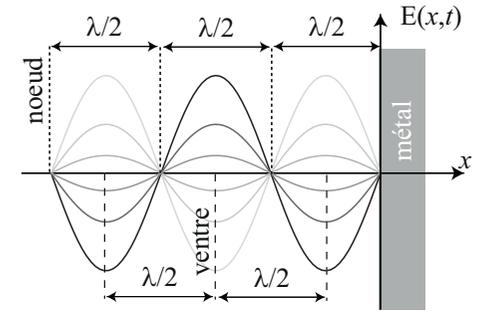


FIGURE 1.6 – Position des noeuds et ventres pour le champ électrique.

◆ Définition :

- un **nœud** est une zone de l'espace où la vibration est toujours nulle
- un **ventre** est une zone de l'espace où l'amplitude de la vibration est maximale

🍃 Exemple 2

On considère une onde stationnaire dans le domaine $x < 0$ décrite par le

champ électromagnétique

$$\begin{cases} \vec{E}(x,t) = 2E_0 \sin \omega t \sin kx \vec{e}_y \\ \vec{B}(x,t) = \frac{2E_0}{c} \cos \omega t \cos kx \vec{e}_z \end{cases}$$

- 1 - Déterminer les positions x_n des noeuds de champ magnétique en fonction λ .
- 2 - Déterminer de même les positions x_p des ventres de champ magnétique.
- 3 - Comparer aux valeurs x_n et x_p à ceux du champ électrique.

Pour s'entraîner : exercice 4

La position des noeuds sont obtenus pour

$$\frac{2E_0}{c} \cos \omega t \cos kx = 0$$

Soit : $kx_n = \pi/2 + n\pi, n \in \mathbb{Z}$. Le métal étant défini dans la partie $x > 0$, seules les positions négatives ont un sens. Avec $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ on obtient la position des différents noeuds (cf. fig. 1.7)

$$x_n = -\frac{\lambda}{4} - n\frac{\lambda}{2}, n \in \mathbb{N}$$

2 - De manière analogue, les ventres sont obtenus pour

$$\cos kx = \pm 1 \quad \text{soit} \quad kx_p = -p\pi, p \in \mathbb{N}$$

On obtient alors la position des différents ventres : $x_p = -p\frac{\lambda}{2}$.

3 - Les ventres et les noeuds sont simplement décalés de $\lambda/4$ par rapport aux noeuds. La distance entre deux noeuds consécutifs est de $\lambda/2$, les noeuds de E sont les ventres de B et vice-versa.

b) Vecteur de Poynting

On rappelle que le vecteur de Poynting est donné par

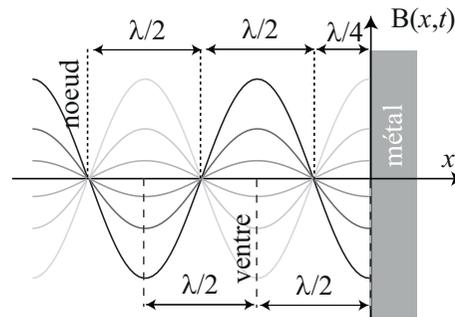


FIGURE 1.7 – Position des noeuds et ventres pour le champ magnétique.

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

En utilisant les expressions du champ électromagnétique de l'onde stationnaire utilisée jusqu'à présent :

$$\begin{cases} \vec{E} = 2E_0 \sin \omega t \sin kx \vec{e}_y \\ \vec{B} = \frac{2E_0}{c} \cos \omega t \cos kx \vec{e}_z \end{cases}$$

On en déduit que

$$\vec{\Pi} = \frac{4E_0^2}{\mu_0 c} \sin \omega t \sin kx \cos \omega t \cos kx \vec{e}_x = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \sin 2\omega t \sin 2kx \vec{e}_x$$

Comme $\langle \sin 2\omega t \rangle = 0$, on obtient une puissance moyenne rayonnée nulle. On pouvait s'attendre à un tel résultat étant donné que l'onde réfléchie véhicule la même énergie que l'onde incidente mais dans un sens opposé. La dénomination **stationnaire** prend alors tout son sens puisqu'il n'y a pas de **propagation** d'énergie.

Propriété :

Une onde stationnaire ne véhicule aucune énergie.

c) Courant surfacique et pression de radiation

Pour une interface en $x = 0$, la relation de passage avec le champ magnétique s'écrit : $\vec{B}(x \rightarrow 0^+) - \vec{B}(x \rightarrow 0^-) = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{e}_x$.

Le champ étant nul dans le métal, $\vec{B}(x \rightarrow 0^+) = \vec{0}$. Dans la zone $x < 0$, le champ stationnaire de l'exemple précédent vérifie donc :

$$\vec{0} - \frac{2E_0}{c} \cos \omega t = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{e}_x$$

On en déduit qu'un courant surfacique possible est de la forme :

$$\vec{j}_S = \frac{2E_0}{\mu_0 c} \cos \omega t \vec{e}_y$$

Le courant est donc orienté dans le même sens que le champ électrique incident et traduit le mouvement des électrons évoqués en figure 1.4.

L'application de la relation de passage pour le champ électrique $\vec{E}(x,t) = 2E_0 \sin \omega t \sin kx \vec{e}_y$ conduit à une charge surfacique nulle :

$$\underbrace{\vec{E}(x \rightarrow 0^+)}_{=\vec{0}} - \underbrace{\vec{E}(x \rightarrow 0^-)}_{2E_0 \sin \omega t \sin kx \vec{e}_y} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x$$

Pour obtenir une densité surfacique de charge non nulle, il faut que le champ électrique présente une composante normale à l'interface. On peut par exemple considérer une onde parvenant avec un angle θ par rapport à la normal au métal et un champ magnétique selon Oy .

Remarque 3 :

Les charges à la surface du métal ne sont nulles qu'en incidence normale. Si l'onde présente une inclinaison par rapport au métal, des charges surfaciques apparaissent.

La présence d'un courant surfacique non-nulle en présence d'un champ magnétique est source d'une force appelée pression de radiation qui correspond du point de vue classique² à la force de Laplace. Sur un élément $dydz$, situé en $x = 0$, cette dernière a pour expression :

$$d\vec{F}_{lap} = \vec{j}_s \wedge \vec{B}(x=0,t) dydz = \frac{2E_0}{\mu_0 c} \cos \omega t \vec{e}_y \wedge \frac{2E_0}{c} \cos \omega t \vec{e}_z dydz$$

On obtient en valeur moyenne une force par unité de surface, soit une pression, orientée de l'onde vers le métal :

$$\left\langle \frac{d\vec{F}_{lap}}{dydz} \right\rangle = \frac{2E_0^2}{\mu_0 c^2} \vec{e}_x = 2\epsilon_0 E_0^2 \vec{e}_x$$

2. Une interprétation quantique en terme de conservation de quantité de mouvement des électrons conduit à un résultat similaire.

II. Cavités et guides électromagnétiques

1 - Cavite optique

a) Modes d'une onde stationnaire

Une cavité électromagnétique piège une onde électromagnétique entre deux miroirs dont la concavité change la forme de la cavité (cf. fig. 1.8). Ces cavités sont utilisées pour améliorer l'interaction onde électromagnétiques-matière que ce soit dans les four micro-ondes ou pour la manipulation d'émetteurs quantiques pour les technologies quantiques. La lumière réfléchi plusieurs fois par les miroirs peut interférer avec elle-même. La superposition cohérente de ces ondes est nulle sauf pour des longueurs d'ondes particulières appelées **modes**. Dans la suite de ce chapitre, nous nous intéresserons aux modes transverses d'une cavité 1D plane³. On considérera que les miroirs sont parfaitement réfléchissants, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de perte d'énergie lors d'une réflexion de l'onde électromagnétique.

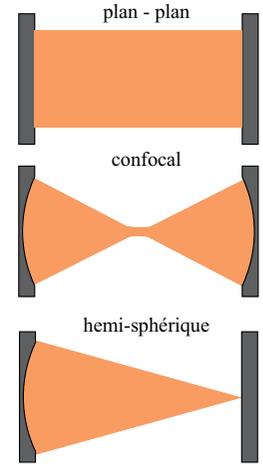


FIGURE 1.8 – Différentes cavités optiques.

Définition :

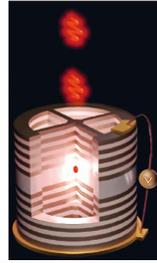
Un **mode** d'une cavité correspond à l'existence d'une onde électromagnétique d'une longueur d'onde dépendante de la forme et de la taille de la cavité.

3. Il existe également, en fonction de la forme de la cavité, des modes longitudinaux.

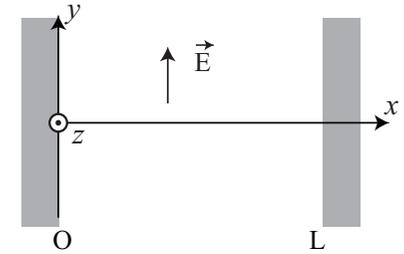
Remarque 4 :

La startup française Quandela commercialise des sources de photons uniques constituées de nanocristaux de semiconducteurs (boîte quantique) dans une micro-cavité optique. La possibilité de pouvoir manipuler des photons unique permet de sécuriser le transfert de clé de cryptage. Image tirée de Senellart, Photoniques **107**, 40 (2021)

© ⓘ.


Exemple 3

On considère une cavité électromagnétique constituée de deux surfaces métalliques parallèles disposées en $x = 0$ et $x = L$. On s'intéresse à l'écriture du champ électrique sous la forme d'une onde stationnaire :



$$\vec{E}(x,t) = E_0 \cos \omega t \times f(x) \vec{e}_y$$

- 1 - Quelle est l'équation vérifiée par $f(x)$?
- 2 - En déduire la solution générale pour la fonction $f(x)$.
- 3 - En utilisant les relations de passage pour le champ électrique en $x = 0$ et $x = L$ et montrer que seules des ondes dont le vecteur d'onde est de la forme $k_n = n\pi/L$ peuvent exister dans la cavité (avec $n \in \mathbb{N}^*$). Représenter l'allure de l'amplitude $f(x)$ pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.
- 4 - Dans un laser He-Ne possédant une cavité laser de $L = 15,0$ cm, calculer l'espacement fréquentiel entre les modes.

Pour s'entraîner : exercice 6

- 1 - Entre les armatures, le champ suit l'équation de D'Alembert,

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

En injectant la forme proposée, on obtient :

$$f''(x) \cos \omega t - \frac{1}{c^2} f(x) (-\omega^2) \cos \omega t = 0 \quad \text{soit} \quad f''(x) + \frac{\omega^2}{c^2} f(x) = 0$$

- 2 - La solution générale de cette équation différentielle est :

$$f(x) = A \cos kx + B \sin kx \quad \text{avec} \quad k = \omega/c$$

- 3 - Le champ électrique est parallèle au métal, il est nul dans le métal parfait. En appliquant les relations de passage en $x = L$ et $x = 0$, correspondant à la continuité du champ électrique, on obtient :

$$E(x = 0, t) = 0 \quad \text{et} \quad E(x = L, t) = 0$$

La solution générale de $f(x)$, impose $A = 0$ et $B \sin kL = 0$.

On obtient alors : $kL = 0[\pi] = n\pi$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Seules les ondes de vecteur d'onde de la forme : $k_n = n\pi/L$ sont possibles au sein de la cavité⁴.

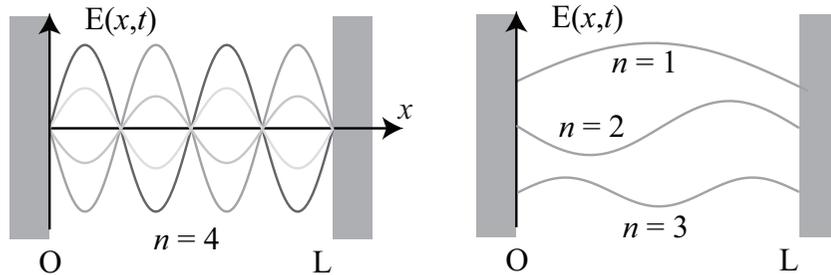


FIGURE 1.9 – a) Allure des premiers modes du champ électrique. b) Représentation du champ $E(x,t)$ à différents instants pour $n = 3$.

4 - L'intérieur de la cavité étant assimilé au vide, la relation de dispersion impose également les fréquences possibles :

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L} \quad \text{soit} \quad \Delta f = \frac{\omega_{n+1} - \omega_n}{2\pi} = \frac{c}{2L} = 1,00 \text{ GHz}$$

b) Interaction avec la matière

Les ventres de champ électrique correspondent également à des zones de forte densité d'énergie électromagnétique. L'interaction avec la matière y est donc favorisée. Dans un four micro-onde, la création d'une onde stationnaire impose un chauffage localisés sur les ventres de champ électrique. Le plateau tournant permet de déplacer l'aliment pour éviter que les mêmes parties soient soumises aux zones de champ fort et aboutisse à un chauffage non uniforme.

La géométrie influe beaucoup sur la forme des ondes stationnaires. Dans un four à micro-onde, les parois forment les surfaces réfléchissantes et une onde stationnaire à 3 dimension s'installe (Fig. 1.10). On propose parfois de mesurer la longueur d'onde en faisant fondre (sans le plateau tournant) du chocolat ou du fromage (en plaçant proche du haut du four ou la forme des ondes stationnaires est proche d'une cavité 1D). Cette manipulation permet souvent le bon ordre de grandeur mais l'interprétation de la forme des ventres de l'onde stationnaire est délicate.

4. Les modes d'une cavité électromagnétique s'apparentent aux modes de vibration d'une corde de Melde.

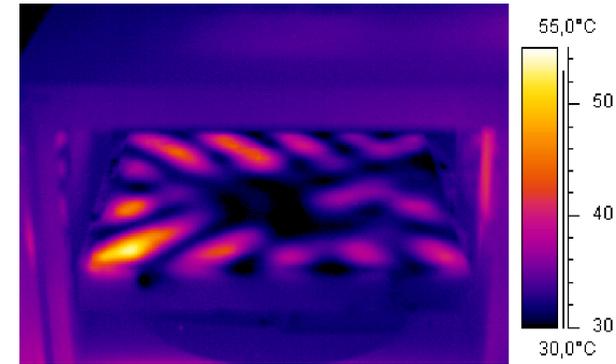


FIGURE 1.10 – Assiette d'eau vue à la caméra infrarouge dans un microonde sans plateau tournant. Les zones chauffées correspondent aux ventres des modes de la cavité du four et sont espacées d'environ $\lambda/2 \approx 6 \text{ cm}$, en bon accord avec $f = c/\lambda = 2,4 \text{ GHz}$. D'après Vollmer, *Physics of the microwave oven*, Phys. Ed. **39**, 74 (2004).

On trouve également des cavités optiques dans les lasers. Le premier laser à gaz inventé est constitué d'une cavité composée de deux miroirs (dont un n'est que partiellement réfléchissant afin d'extraire le faisceau laser utile) contenant un mélange de gaz Hélium-Néon. Ce dernier joue le rôle du milieu amplificateur de lumière. La cavité optique, en piégeant la lumière, permet une meilleure interaction entre les atomes du gaz et l'onde électromagnétique.

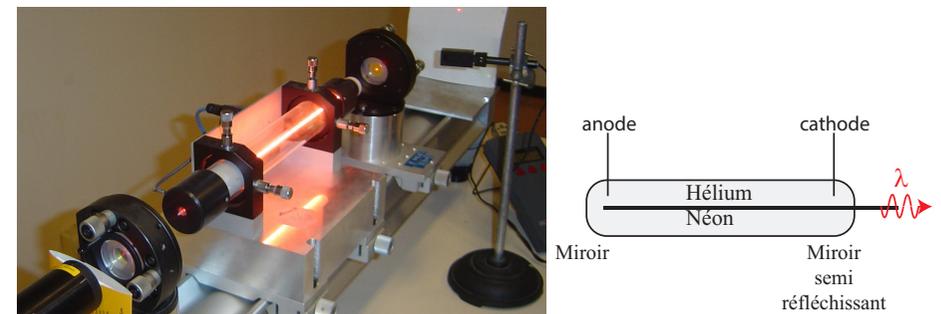
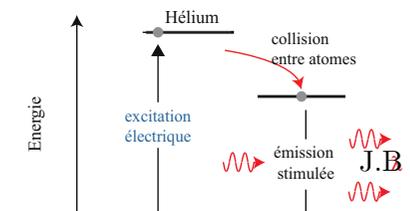


FIGURE 1.11 – Cavité laser de démonstration, laboratoire Kastler-Brossel, (© D. Monniaux), et schéma de principe.

Une alimentation électrique permet, grâce à des décharges électriques d'augmenter l'énergie des atomes d'Hélium. Ces derniers donnent leur

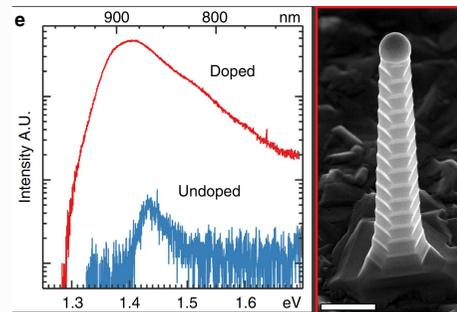


énergie par collisions aux atomes de Néon qui se retrouvent dans un état excités légèrement plus stables. Ce processus appelé « inversion de population » conduit à une accumulation du nombre d'atomes de Néon dans leur état excité.

En présence d'un photon dont l'énergie est accordée à la transition électronique des atomes de Néon, ces derniers se désexcitent par émission stimulée en émettant un photon en phase avec celui responsable de sa désexcitation. Il apparaît ainsi une augmentation de l'énergie lumineuse de façon cohérente pour la longueur d'onde $\lambda = 633 \text{ nm}$.

Remarque 5 :

Il est possible de réaliser des nanocavités laser dans le but de réaliser des circuits intégrés photoniques. Dans la figure ci-contre, les chercheurs ont synthétisé une nano-cavité pouvant contenir un atome fluorescent. D'après Burges *et al*, *Doping-enhanced radiative efficiency enables lasing in unpassivated GaAs nanowires*, Nature Com 7, 11927 (2016), ©.



2 - Guide d'onde

a) Présentation

Un guide d'onde permet de contrôler la direction de propagation des ondes électromagnétiques qui se propagent selon une direction. Une configuration courante est le guide d'onde planaire constitué de parois réfléchissantes parallèles (cf. fig. ci-contre). La direction de l'onde

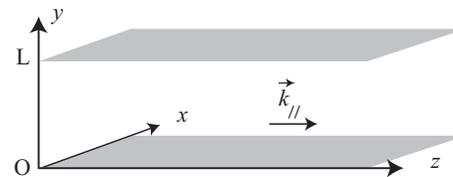


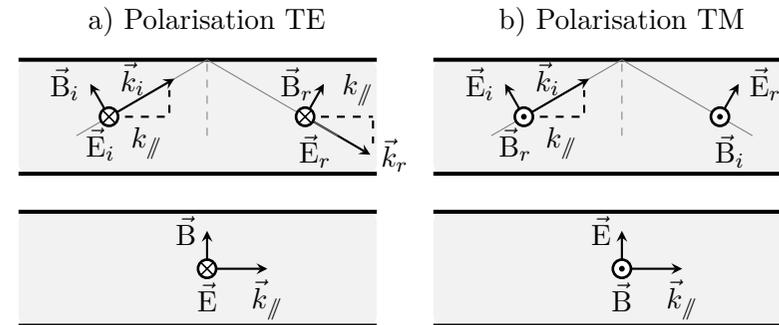
FIGURE 1.12 – Guide d'onde 1-D.

électromagnétique, caractérisée par la composante du vecteur d'onde parallèle aux parois notée $\vec{k}_{//}$. Ce vecteur est alors limitée au plan Oxz dans l'exemple proposé. Le guidage peut être assimilé à des réflexions d'une onde oblique sur les parois.

Définition :

La composante du vecteur d'onde **parallèle** au guide $k_{//}$, ou β , est appelée **constante de propagation**. Elle caractérise le mode guidé.

Dans les guides planaires, on distingue deux polarisations transverses (voir la figure, tous les champs sont orientés de sorte que le trièdre $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ soit direct).



Propriété :

- Mode transverse électrique (TE) : le champ électrique est perpendiculaire au plan d'incidence. Le mode guidé (qui résulte des réflexions sur les parois) présente un vecteur de propagation $\vec{k}_{//}$ parallèle aux interfaces, un champ électrique parallèle aux parois et un champ magnétique perpendiculaire aux parois du guide.
- Mode transverse magnétique (TM) : le champ magnétique est perpendiculaire au plan d'incidence. Le mode guidé présente un vecteur de propagation $\vec{k}_{//}$ parallèle aux interfaces, un champ électrique perpendiculaire aux parois et un champ magnétique parallèle aux parois du guide.

Exemple 4 On cherche un champ magnétique TE à l'intérieur du guide de largeur L (on note β la constante de propagation du mode guidé)

$$\vec{B}(x,z,t) = B_0(x)e^{i(\omega t - \beta z)} \vec{e}_x$$

1 - Établir l'équation vérifiée par B_0 à partir de l'équation de D'Alembert.

2 - On note $K^2 = \omega/c^2 - \beta^2$, résoudre l'équation différentielle pour $\beta < \omega/c$. Montrer que les relations de continuité imposent des valeurs de K discrètes.

3 - Tracer qualitativement $\omega = f(\beta)$ pour le premier mode. Établir l'existence d'une pulsation de coupure ω_c en dessous de laquelle aucun mode n'est supporté. Quelle est la longueur d'onde associée ? La comparer à la taille du guide et commenter. Calculer la fréquence de coupure pour $L = 1,0$ cm.

Données :
$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Pour s'entraîner : exercice 5

1 - L'équation de d'Alembert s'écrit : $\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$

Avec la représentation complexe proposée

$$\Delta \vec{B} = B_0''(x)e^{i(\omega t - \beta z)} \vec{e}_x - \beta^2 B_0(x)e^{i(\omega t - \beta z)} \vec{e}_x$$

et on obtient donc

$$B_0''(x)e^{i(\omega t - \beta z)} - \beta^2 B_0(x)e^{i(\omega t - \beta z)} + \frac{\omega^2}{c^2} B_0(x)e^{i(\omega t - \beta z)} = 0$$

Après simplification, il vient : $B_0''(x) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2\right) B_0(x) = 0$

2 - Pour $k < \omega/c$, les solutions sont de la forme : $B_0(x) = a \cos Kx + b \sin Kx$. En appliquant les relations de passage, on en déduit que $B_0(0) = 0 = B_0(L)$

d'où $a = 0$ et $\sin KL = 0$

Ainsi, les solutions sont de la forme : $B_0(x) = B_n \sin K_n x$ avec $K_n = n\pi/L$.

3 - Pour $k > \omega/c$, notons, κ la valeur vérifiant $\kappa^2 = \beta^2 - \frac{\omega^2}{c^2} > 0$ L'équation différentielle devient : $B_0''(x) - \kappa^2 B_0(x) = 0$ les solutions de l'équation différentielle sont de la forme : $B_0(x) = ae^{\kappa x} + be^{-\kappa x}$.

En appliquant les relations de passage, on en déduit que $B_0(0) = 0 = B_0(L)$.

d'où $a + b = 0$ et $ae^{\kappa L} + be^{-\kappa L} = 0$

On en déduit que $b = -a$ puis $a \sinh(\kappa) = 0$ donc $\kappa = 0$. Le système ne possède pas de solution non triviale. Il ne peut donc pas se propager des ondes vérifiant $\beta > \omega/c$.

3 - $\beta_n^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2 \pi^2}{L^2}$ n'admet des solutions que pour $\frac{\omega}{c} \leq \frac{n\pi}{L}$.

Le mode $n = 1$ existe pour $\omega \leq \omega_c = \frac{\pi c}{L}$ correspondant à la longueur d'onde $\lambda_c = \frac{2\pi c}{\omega_c} = 2L$ c'est-à-dire que le guide supporte à un mode à la longueur d'onde λ si $L \geq \frac{\lambda}{2}$ qui est de l'ordre de la limite de diffraction, en dessous de laquelle on ne peut pas contrôler la propagation de l'onde électromagnétique.

La fréquence de coupure vaut $f_c = \omega_c/(2\pi) = c/(2L) = 1,5 \cdot 10^{10}$ Hz = 15 GHz. Pour $L = \lambda/2$, les parois du guide sont sur des noeuds du mode, assurant $B_{\perp} = 0$ comme attendu par continuité avec le conducteur parfait.

Dans un guide d'onde, le champ électromagnétique est donc

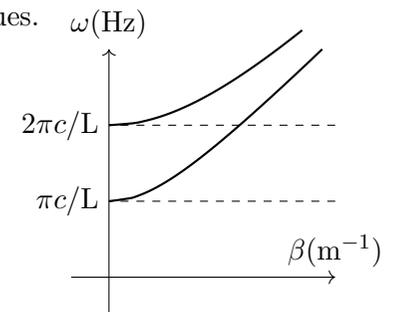
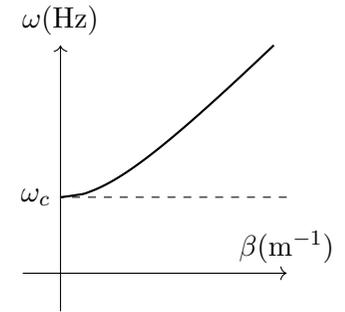
- progressif selon une direction parallèle aux plaques,
- stationnaire perpendiculairement aux plaques.

Dans le guide planaire, le vecteur d'onde peut se décomposer sous la forme : $\vec{k} = k_{\perp} \vec{e}_z + \beta \vec{e}_x$.

Le vecteur d'onde suit la relation de dispersion dans le vide $k^2 = \omega^2/c^2$ (c'est-à-dire $k = \omega/c$).

La composante longitudinale du vecteur d'onde, appelée constante de propagation suit une **relation de dispersion d'un mode guidé**.

Pour un mode TE, $\beta_n^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2 \pi^2}{L^2}$ avec $n \in \mathbb{N}$ que l'on peut tracer sous la forme $\omega = f(\beta)$.



Définition :

La composante longitudinale du vecteur d'onde β , appelée constante de propagation suit une **relation de dispersion d'un mode guidé** $\omega = f(\beta)$.

Cette relation de dispersion « modale » dépend du guide d'onde et non du matériau qui le constitue. Pour un matériau, la relation de dispersion « du milieu » est sur la norme du vecteur d'onde $\omega = f(k)$ (par exemple $\omega = ck$ dans le vide).

Dans un guide planaire, il existe une **pulsation de coupure** la grandeur $\omega_n = n\pi c/L$ en dessous de laquelle il n'y a pas de mode guidé puisque la constante de propagation obéit à $\beta^2 < 0$ sans solution réelle⁵.

5. L'absence de mode sous la coupure est due aux conditions de continuité avec les parois du métal parfait. Les relations de passage imposent $E_{//} = 0 = B_{\perp}$ donc aucun mode TE n'est supporté pour $L < \frac{\lambda}{2}$ - plus petite dimension permettant d'avoir les parois du guide sur des noeuds du mode. Par contre, E_{\perp} et de $B_{//}$ pouvant présenter une discontinuité, on n'observe pas de taille minimale pour des modes TM, qui ne présentent pas de fréquence de coupure.

L'essentiel

Relation de passage

A une interface séparant deux milieux (1) et (2), $B_{\perp,1} = B_{\perp,2}$ et $E_{//,1} = E_{//,2}$.

Pour un métal parfait, les charges et les courants se concentrent à la surface du matériau. En utilisant les distributions surfaciques de charge (notée σ) et de courant (notée \vec{j}_S). Les relations de passage pour un métal parfait s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12} \\ \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{12} \end{cases}$$

\vec{n}_{12} , le vecteur normal à l'interface dirigé du milieu (1) vers le milieu (2).

Ondes stationnaires

Une onde est dite **stationnaire** lorsque son amplitude peut se mettre sous la forme :

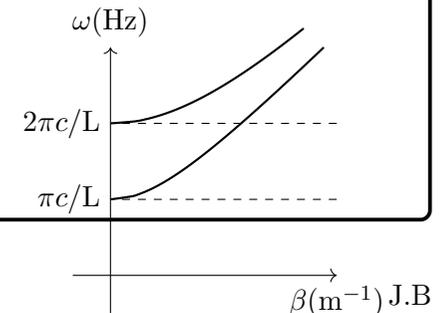
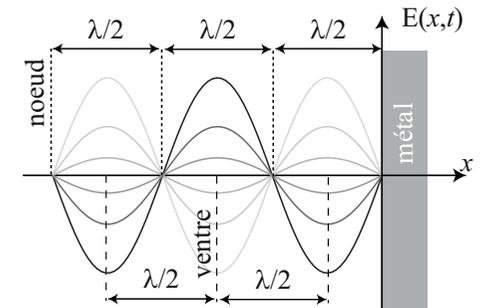
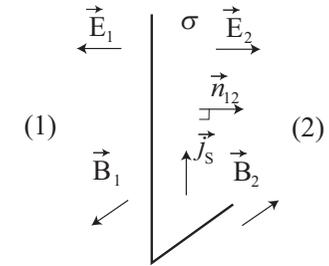
$$f(x) \times g(t)$$

Un **mode** d'une cavité correspond à l'existence d'une onde électromagnétique stationnaire de longueur d'onde dépendant de la forme et de la taille de la cavité.

Guide planaire

Dans le guide planaire, le vecteur d'onde s'écrit $\vec{k} = k_{\perp} \vec{e}_z + \beta \vec{e}_x$.

Le vecteur d'onde suit la relation de dispersion dans le vide $k^2 = \omega^2/c^2$.



La composante longitudinale du vecteur d'onde β , appelée constante de propagation suit une **relation de dispersion d'un mode guidé** $\omega = f(\beta)$.

Exercices

Les classiques

Exercice 1

*D'après solution p.??
CCP 07,14*

On se place dans l'espace rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Une onde plane progressive monochromatique à polarisation rectiligne de pulsation ω et de vecteur d'onde \vec{k} se propage dans le vide dans la direction (Ox) , dans le sens des x croissants :

$$\vec{E}_i(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

En $x = 0$, elle arrive sur la surface plane d'un miroir métallique parfaitement conducteur (on admet que dans un tel conducteur, les champs \vec{E} et \vec{B} sont nuls) et donne naissance à une onde réfléchie se propageant dans la direction (Ox) dans le sens des x décroissants :

$$\vec{E}_r(x,t) = \vec{E}_{0r} \cos(\omega t + kx)$$

- 1 - Écrire les conditions aux limites que doivent vérifier les champs \vec{E} et \vec{B} sur le plan d'équation $x = 0$ qui limite l'espace entre le vide et le miroir métallique en précisant bien la signification de tous les termes intervenant dans les équations.
- 2 - Montrer que le champ électrique réfléchi est lui aussi polarisé suivant l'axe Oy et établir l'expression du vecteur \vec{E}_{0r} en fonction de \vec{E}_0 et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.
- 3 - Déterminer les expressions en fonction du temps du champ magnétique incident \vec{B}_i et du champ magnétique réfléchi \vec{B}_r .

4 - En déduire les densités surfaciques de charges et de courant sur le métal.

5 - Déterminer le champ électrique \vec{E} et le champ magnétique \vec{B} du champ électromagnétique résultant de l'onde incidente et de l'onde réfléchie dans le demi-espace $x < 0$. Caractériser l'onde résultante.

6 - Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ de l'onde résultante ainsi que sa valeur moyenne $\langle \vec{\Pi} \rangle$ au cours d'une période $T = 2\pi/\omega$. Commenter.

Un deuxième plaque métallique est positionnée en $x = -L$.

7 - Quelle est la condition sur le champ électriques au niveau de cette plaque métallique ? En déduire que la pulsation ω_n est quantifiée à l'intérieur de la cavité. On l'exprimera sous la forme $\omega_n = n \times \omega_0$.

Données :

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}, \quad \cos a - \cos b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{b-a}{2}$$

Exercice 2

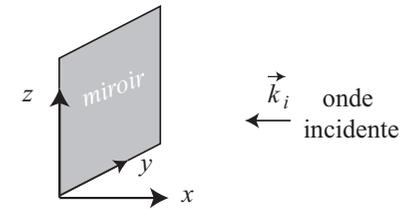
*D'après CCP 13
solution p.??*

Une onde plane progressive monochromatique se propage dans le vide dans la direction (Ox) et dans le sens des x décroissants.

On note E_0 l'amplitude du champ électrique incident \vec{E}_i polarisé selon \vec{z} .

En $x = 0$, elle arrive sur la surface plane d'un miroir métallique parfaitement conducteur.

- 1 - Écrire l'onde électrique et magnétique \vec{E}_i et \vec{B}_i .
- 2 - En appliquant les relations de continuité (également appelée relation de passage) justifier l'existence d'un champ réfléchi noté \vec{E}_r et \vec{B}_r .
- 3 - Justifier que la pulsation du champ réfléchi est identique à celle du champ incident.
- 4 - Déterminer les expressions des champs \vec{E}_r et \vec{B}_r .
- 5 - Déterminer le champ total résultant \vec{E}_{tot} et \vec{B}_{tot} et caractériser l'onde résultante.
- 6 - Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ de l'onde résultante ainsi que sa valeur moyenne $\langle \vec{\Pi} \rangle$ au cours d'une période $T = 2\pi/\omega$. Commenter.



Données :

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}, \quad \cos a - \cos b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{b-a}{2}$$

Exercice 3

D'après CCP 10
solution p.??

Deux plans métalliques d'équation $x = 0$ et $x = a$ sont disposés dans un espace vide de charge. Suivant le sens de propagation de l'onde, les deux plans métalliques jouent le rôle de « résonateur électromagnétique ».

1 - Démontrer que dans un conducteur parfait, en l'absence de champ statique, on a $\vec{E} = \vec{0}, \vec{B} = \vec{0}, \vec{j} = \vec{0}$ et $\rho = 0$

On considère une onde plane polarisée rectilignement selon Oy se propageant selon $-Ox$. On notera E_0 l'amplitude du champ électrique.

2 - Exprimer le champ électrique incident ainsi décrit noté en notation complexe \vec{E}_i et le champ magnétique associé \vec{B}_i .

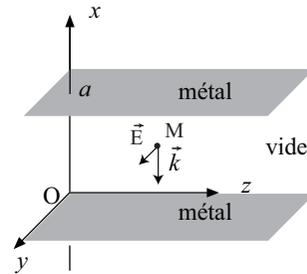
3 - En utilisant les relations de passage pour le champ électrique, déterminer le champ \vec{E}_r de l'onde réfléchi sur le plan d'équation $x = 0$.

4 - En déduire l'expression le champ magnétique réfléchi \vec{B}_r .

5 - Exprimer le champ électrique totale $\vec{E}(x,t)$ ainsi que le champ magnétique total $\vec{B}(x,t)$.

6 - En appliquant les relations de passage en $x = a$, montrer que le vecteur d'onde puis la fréquence de l'onde dans cette cavité ne peut prendre que des valeurs discrètes. On notera f_N où N est un entier la valeur des fréquences.

7 - Pour $N = 1$, déterminer le vecteur de Poynting $\vec{R}(x,t)$ de l'onde résultante et calculer sa valeur moyenne.



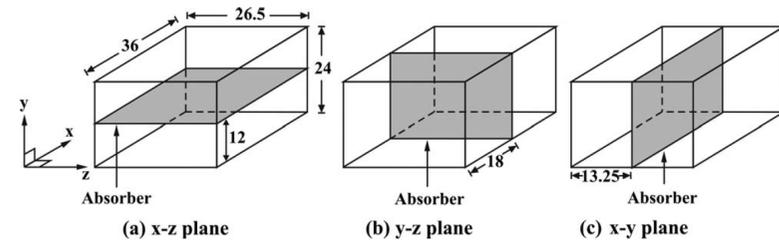
Problèmes ouverts

Exercice 4

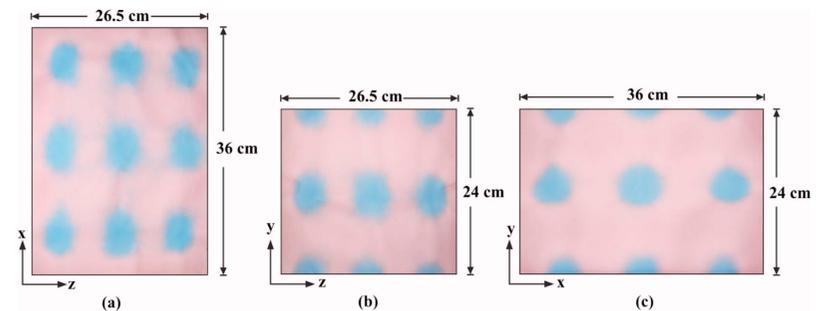
solution p.??

Dans un four microonde, générant une onde de fréquence $f = 2,45$ GHz, des chercheurs thaïlandais ont placé une feuille contenant du chlorure de Cobalt, indicateur coloré sensible à la température. La première feuille est placée à une hauteur $y = 12$ cm, la seconde à une position $x = 18$ cm

et la troisième à $z = 13,25$ cm comme indiqué sur la figure ci-dessous.



Après chauffage, les feuilles ont les aspects suivants :



Figures tirées de *Three-dimensional standing waves in a microwave oven*, *Am. J. Of Phys.*, 2010.

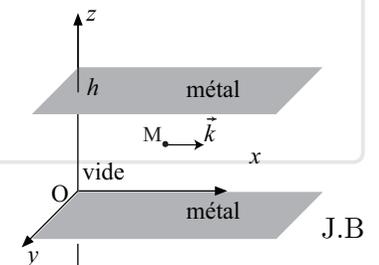
Montrer que les observations expérimentales sont compatibles avec la relation de dispersion du vide. On suppose que le champ électrique s'écrit $\vec{E}(x,y,z,t) = E_0 \cos k_x x \cos k_y y \cos k_z z \cos \omega t \vec{e}_y$.

Les difficiles

Exercice 5

D'après Centrale 11
solution p.??

On étudie une cavité constituée de deux plans parfaitement conducteur d'équation $z = 0$ et $z = h$. L'intérieur de la cavité est supposé vide de charges et de courants



On envisage la propagation, dans cette cavité, d'une onde électromagnétique plane, progressive et monochromatique. La longueur d'onde λ_n , la pulsation ω_n , la fréquence f_n et le module du vecteur d'onde k_n de cette onde sont indexés par l'entier n strictement positif. Le champ magnétique de cette onde se met sous la forme : $\vec{B}_n(x, z, t) = B_{0n}(z) \cos(\omega_n t - k_n x) \vec{e}_y$

1 - Définir chacun des termes : « onde électromagnétique », « plane », « progressive » et « monochromatique ».

2 - Écrire les équations de Maxwell vérifiées par \vec{B} à l'intérieur de la cavité et établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $B_{0n}(z)$. On ne cherchera pas à résoudre cette équation.

3 - Déterminer à partir de l'équation de Maxwell-Ampère, les composantes du champ électrique $\vec{E}(x, z, t)$ en fonction de k_n , ω_n , c , $B_0(z)$ et $B'_0(z)$.

4 - En appliquant les relations de passage pour le champ électrique, montrer que $B'_0(0) = B'_0(h) = 0$.

5 - On admet que la solution du champ magnétique se met sous la forme :

$$\vec{B}_n(x, z, t) = B_0 \cos(K_n z) \cos(\omega_n t - k_n x) \vec{e}_y$$

avec $K_n = \sqrt{\omega_n^2/c^2 - k_n^2} = n\pi/h$.

Rappeler les relations de passage pour le champ magnétique aux deux interfaces en $z = 0$ et en $z = h$. Établir les expressions des densités surfaciques de courant correspondantes $\vec{j}_{S1}(x, z = 0, t)$ et $\vec{j}_{S2}(x, z = h, t)$.

6 - Pour estimer les pertes dissipées par effet Joule, on suppose non infinie la conductivité du métal et on pose une densité volumique de courant \vec{j} circulant uniquement sur une épaisseur $\delta_n = \sqrt{2/(\mu_0 \gamma \omega_n)}$ appelée épaisseur de peau telle que

$$\vec{j}_n = \begin{cases} \vec{j}_{sn}/\delta_n & \text{si } 0 > x > -\delta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculer la puissance dissipée par effet Joule dans un morceau de conducteur de côté $L \times L$

Données $\Delta \vec{A} = \Delta A_x \vec{e}_x + \Delta A_y \vec{e}_y + \Delta A_z \vec{e}_z$ où $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$$\text{rot } \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

Exercice 6
*D'après CCP 17
solution p.??*

Depuis son invention, le four à micro-ondes a immédiatement envahi les cuisines des particuliers. On s'intéresse ici à un modèle simplifié de son fonctionnement et de la protection de sa paroi.

La fréquence des ondes utilisées dans un four à micro-ondes est généralement égale à 2,50 GHz.

1 - Justifier, à l'aide d'un calcul, pourquoi les ondes utilisées dans le four à micro-ondes sont qualifiées d'ondes centimétriques.

2 - Les fours à micro-ondes peuvent parfois perturber les liaisons Wi-Fi. Nommer le phénomène responsable de cette perturbation et déduire la fréquence des ondes Wi-Fi en justifiant la réponse.

Dans un modèle approché simplifié, on considérera le four à micro-ondes comme un parallélépipède rectangle d'arêtes parallèles aux axes Ox , Oy et Oz , Oz étant la verticale ascendante et de faces d'équations : $x = 0$ et $x = d$; $y = 0$ et $y = d'$; $z = 0$ et $z = d''$

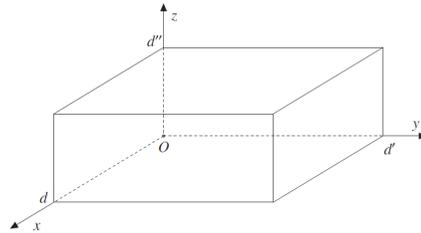
On mène une étude simplifiée de l'onde présente dans le four à micro-ondes. On admet que l'onde résultante à l'intérieur du four s'écrit sous la forme

$$\vec{E}(x, y, z, t) = E_0(x) \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y$$

où $E_0(x)$ n'est pas une constante mais dépend effectivement de x , ω est la pulsation de l'onde et k la norme du vecteur d'onde associé.

On suppose que le four est vide, c'est-à-dire sans aliment et donc rempli d'air, de caractéristiques assimilables avec une excellente approximation à celles du vide.

3 - Écrire les quatre équations de Maxwell dans le vide, sans charge ni courant.



4 - Montrer que l'équation de propagation relative au champ \vec{E} est :

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

5 - À partir de l'équation précédente, déterminer l'équation différentielle que doit nécessairement vérifier $E_0(x)$.

6 - À quelle condition sur ω , u/k et c , la solution de cette équation est-elle oscillante? On admet pour la suite que cette condition est satisfaite.

On rappelle la relation de passage du champ électrique \vec{E} à l'interface entre deux milieux différents indicés 1 et 2

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{12}$$

avec σ la densité surfacique de charge au niveau de l'interface entre les deux milieux et \vec{n}_{12} le vecteur unitaire directeur normal à la surface allant du milieu 1 au milieu 2.

On suppose que les parois du four à micro-ondes sont des parois épaisses constituées de conducteur parfait. On peut montrer que le champ électrique à l'intérieur d'un conducteur parfait est nul.

7.a - En déduire que le champ électrique total est nul au niveau des parois $x = 0$ et $x = d$.

7.b - Écrire les conditions aux limites que cela impose pour $E_0(x)$.

8 - Montrer que cela entraîne

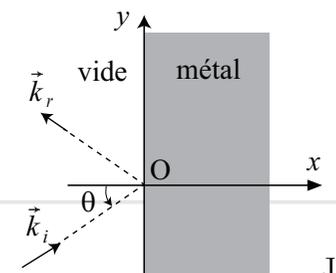
$$E_0(x) = A \sin\left(\frac{n\pi x}{d}\right)$$

avec A une constante qu'on ne déterminera pas et n un entier.

En déduire la relation de dispersion entre n , d , k et ω .

Exercice 7
*D'après Mines-Ponts 09, Oral Centrale 09
solution p.??*

On étudie la réflexion d'une onde électromagnétique monochromatique en incidence oblique sur un miroir métallique parfaitement conducteur. L'espace est rapporté au repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Le demi-espace $x < 0$ est le vide



et le demi espace $x > 0$ est rempli par un métal de conductivité électrique infinie. L'onde incidente est une onde plane progressive monochromatique de pulsation ω , de longueur d'onde λ , polarisée rectilignement dans la direction \vec{e}_z et se propageant dans la direction donnée par le vecteur d'onde $\vec{k}_i = k(\cos\theta \vec{e}_x + \sin\theta \vec{e}_y)$ où $k = 2\pi/\lambda$.

1 - Donner l'expression des champs électriques et magnétiques incidents notés \vec{E}_i et \vec{B}_i .

On note pour l'onde plane réfléchie, ω_r sa pulsation, k_r son vecteur d'onde, \vec{E}_r et \vec{B}_r les champs de l'onde réfléchie.

2 - Donner l'expression de \vec{E}_r et \vec{B}_r .

3 - Déterminer les expressions réelles du champ électrique \vec{E}_{tot} et \vec{B}_{tot} résultant de la superposition des ondes incidente et réfléchie dans le demi-espace $x < 0$.

4 - Donner l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ ainsi que sa valeur moyenne.

Exercice 8

solution p.??

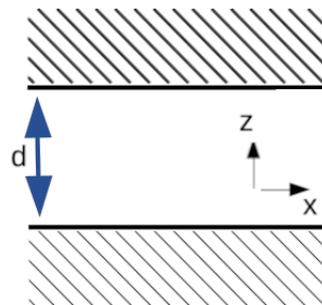
On considère un guide planaire entre 2 miroirs parfaits (conducteurs électriques parfaits). Voir la figure. On souhaite déterminer la relation de dispersion et le profil modal des modes guidés polarisés TE (transverse électrique). Le champ électrique s'écrit

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(x)e^{i(\beta y - \omega t)}\vec{e}_z$$

et suit l'équation de propagation

$$\Delta \vec{E} - \frac{\varepsilon_1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

avec le Laplacien



$$\Delta \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

1 - Montrer que l'équation d'onde conduit à

$$\frac{\partial^2 E(x)}{\partial x^2} = [\beta^2 - \varepsilon_1 \frac{\omega^2}{c^2}]E(x)$$

2 - En déduite la forme générale du champ électrique $E(x)$.

3 - Le champ électrique est nul dans les conducteurs parfaits $E(x=0) = 0 = E(x=d)$. En déduire

$$E(x) = D \sin(p\pi x/d), p = 1, 2, \dots$$

où D est une constante (ne pas chercher à l'exprimer).

2 - La constante de propagation du mode TE_p est telle que

$$\beta_p^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{p^2 \pi^2}{d^2}$$

En déduire que la cavité supporte un mode guidé TE_p pour des épaisseurs

$$d_p \geq p \frac{\lambda}{2}$$

Commenter

4 - En considérant une cavité $d = \lambda/(2)$. Tracer le profil du champ électrique $E_1(z)$.

5 - Pour une cavité de $d = \lambda/n_1$. Tracer le profil des champs électriques $E_1(z)$ et $E_2(z)$.

Exercice 9

solution p.??

On modélise l'émission d'un émetteur fluorescent par un dipôle oscillant $\vec{p} = p_0 e^{-i\omega t} \vec{e}_z$. Dans le repère sphérique, le rayonnement dipolaire dans le vide se met sous la forme (cf chap. ?? ; $k_0 = 2\pi/\lambda = \omega/c$).

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0} e^{i(k_0 r - \omega t)} \begin{bmatrix} 2 \left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik_0}{r^2} \right) \cos \theta \vec{e}_r \\ \left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik_0}{r^2} - \frac{k_0^2}{r} \right) \sin \theta \vec{e}_\theta \\ 0 \vec{e}_\varphi \end{bmatrix}$$

La réflexion du rayonnement dipolaire sur le miroir parfait peut être modélisée par un dipôle image qui reproduit la condition de potentiel nul sur le miroir, comme présenté sur la figure.

1 - Exprimer le champ réfléchi (assimilé au champ du dipôle image) à la position du dipôle source (orienté parallèlement au miroir). Prendre soin de définir les coordonnées sphériques par rapport au dipôle image.

2 - Le taux d'émission de l'émetteur dipolaire s'exprime selon

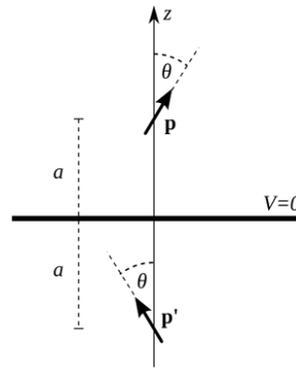
$$\frac{\Gamma}{\Gamma_0} = 1 + \frac{6\pi\epsilon_0}{k_0^3 p_0^2} \text{Im}[\vec{p}^* \cdot \vec{E}_r]$$

où \vec{E}_r est le champ réfléchi à la position du dipôle source. Montrer que

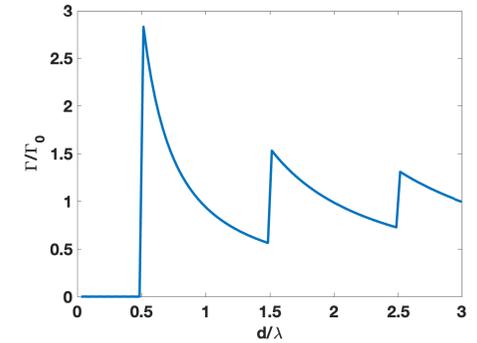
$$\frac{\Gamma}{\Gamma_0} = 1 + \frac{3}{2} \left(\frac{\sin(2k_0 h)}{(2k_0 h)^3} - \frac{\cos(2k_0 h)}{(2k_0 h)^2} - \frac{\sin(2k_0 h)}{(2k_0 h)} \right)$$

3 - Pour un dipôle dans une cavité, il faut tenir compte des dipôles images associée à chaque miroir (dipôles image du dipôle source mais aussi dipôles images par un miroir du dipôle image de l'autre miroir). En déduire qu'alors

$$\frac{\Gamma}{\Gamma_0} = 1 + \frac{3}{2} \sum_{p=1}^{\infty} 2(-1)^{p-1} \left(\frac{\sin(pk_0 d)}{(pk_0 d)^3} - \frac{\cos(pk_0 d)}{(pk_0 d)^2} - \frac{\sin(pk_0 d)}{(pk_0 d)} \right)$$



La figure représente l'émission dipolaire en fonction de la taille de la cavité. Commenter sachant que le taux d'émission est proportionnel aux nombres de modes guidés (l'émetteur ne peut émettre que si la lumière peut se propager dans le guide). Il faut aussi que l'émission puisse se coupler au mode guidé donc le taux est proportionnel au profil modal à la position de l'émetteur, dans un mode existant.



4 - Expliquer qualitativement l'absence d'émission pour $d < \lambda/2$, et la forte augmentation pour $d = \lambda/2$ et $d = 3\lambda/2$. On pourra s'aider de l'exercice précédent.

5 - Pourquoi aucune augmentation n'est observée pour $d = \lambda$? On peut s'appuyer sur les profils modaux TE_1 et TE_2 obtenus à l'exercice 8.

Corrigés

I. Relation de passage

1 - Composantes normales

Dans le cas idéal du conducteur parfait, les charges sont confinés à la surface de sorte que la description associée est une distribution surfacique σ . Il en va de même pour les courants surfaciques. Considérons une interface définie par

$z = 0$ séparant un milieu conducteur du vide. Appliquons le théorème de Gauss à une surface cylindrique de rayon a et de hauteur 2ε à cheval sur les deux milieux (cf. fig. 13).

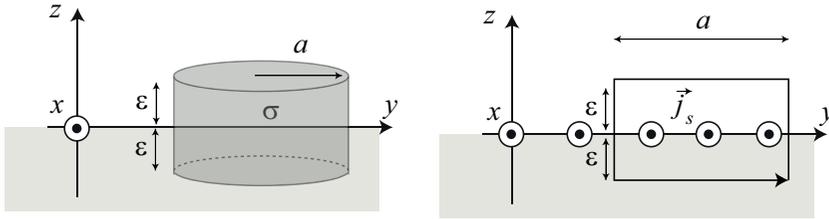


FIGURE 13 – Surface et contour utilisés pour les relations de continuité.

On peut écrire :

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma \pi a^2}{\varepsilon_0}$$

Dans le cas où $\varepsilon \ll a$, seules les contributions sur les surfaces supérieure et inférieure interviennent pour le calcul du flux :

$$E_z(z = +\varepsilon)\pi a^2 - E_z(z = -\varepsilon)\pi a^2 = \frac{\sigma \pi a^2}{\varepsilon_0}$$

On en déduit que la composante normale à l'interface est discontinue pour le champ électrique :

$$E_z(z = 0^+) - E_z(z = 0^-) = \sigma/\varepsilon_0$$

Un calcul analogue concernant le champ magnétique permet de conclure à la continuité de sa composante normale. Comme \vec{B} est à flux conservatif :

$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 = B_z(z = +\varepsilon)\pi a^2 - B_z(z = -\varepsilon)\pi a^2 \quad \text{soit} \quad B_z(z = 0^+) = B_z(z = 0^-)$$

2 - Composantes tangentielles

Afin de déterminer les relations associées aux composantes tangentielles, considérons une ligne fermée \mathcal{C} rectangulaire de côtés $a \times 2\varepsilon$ (cf. fig. 13). L'équation de Maxwell-Faraday sous sa forme intégrale donne :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\Phi(\vec{B})$$

Pour $\varepsilon \ll a$, les contributions à l'intégrale de contour sur les parties verticales sont négligeables :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E_y(z = -\varepsilon) \times a - E_y(z = +\varepsilon) \times a$$

Par définition, le calcul du flux dans le cas où la surface est très faible devant l'échelle de fluctuation du champ magnétique s'écrit :

$$\Phi(\vec{B}) = B_x \times a\varepsilon \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} 0$$

Par passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, on en déduit que la composante tangentielle du champ électrique est continue. Un raisonnement analogue sur un contour dans le plan Oxz donne la continuité de la composante selon Ox :

$$E_x(z = 0^-) = E_x(z = 0^+) \quad \text{et} \quad E_y(z = 0^-) = E_y(z = 0^+)$$

Concernant le champ magnétique, sans perte de généralité, orientons l'axe Ox dans le sens de la densité de courant surfacique. L'équation de Maxwell-Ampère sous forme intégrale s'écrit :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{enlace} + \mu_0 \varepsilon \frac{d}{dt}\Phi(\vec{E})$$

Pour $\varepsilon \ll a$, les contributions à l'intégrale de contour sur les parties verticales sont négligeables :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B_y(z = -\varepsilon) \times a - B_y(z = +\varepsilon) \times a$$

Le courant enlacé, défini à partir de la densité de courant vaut : $I_{enlace} = j_s \times a$. Le flux de champ électrique s'annule lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\Phi(\vec{E}) = E_x \times a\varepsilon \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} 0$$

Par passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, on en déduit que la composante tangentielle du champ magnétique est discontinue.

$$B_y(z = 0^-) - B_y(z = 0^+) = \mu_0 j_s$$

3 - Écriture vectorielle

Notons $\vec{n}_{12} = \vec{e}_z$ le vecteur normal à l'interface, orienté de 1 vers 2. Le produit scalaire entre ce vecteur et le champ électromagnétique donne la composante normale à l'interface tandis que le produit vectoriel fournit un vecteur composé des composantes tangentielle à l'interface. Les relations de continuité pour les composantes tangentielles du champ électrique et normale pour le champ magnétique peuvent s'écrire sous la forme :

$$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0} \quad \text{et} \quad (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n}_{12} = 0$$

où (E_2, B_2) correspondent aux champs sur la face supérieure (orientée par \vec{n}_{12}) de l'interface et (E_1, B_1) aux champs sur la face inférieure. D'une manière analogue, la discontinuité de la composante normale du champ électrique et tangentielles pour le champ magnétique s'écrit :

$$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{j}_s \quad \text{et} \quad (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{n}_{12} = \sigma / \varepsilon_0$$

Il est possible de compiler toutes ces relations sous une forme vectorielle. Pour le champ électrique, la relation de passage se résume à :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{12}$$

Le produit scalaire avec \vec{n} redonne la relation de discontinuité sur la composante normale et le produit vectoriel celle sur les composantes tangentielles. Pour le champ magnétique, la relation de passage se résume à :

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$$