

Propagation des ondes dans le vide

La communication des objets connectés, nombreux autour de nous, s'effectue par propagation d'ondes électromagnétiques. Ce phénomène fondamental intervient dans la quasi totalité des communications sans fil que ce soit la radio, la télévision, les satellites Ces ondes, constituées d'un champ électrique et d'un champ magnétique oscillant perpendiculairement l'un à l'autre et à leur direction de propagation, transportent de l'énergie à travers l'espace, même en l'absence de milieu matériel. Elles résultent des lois de l'électromagnétisme décrites par les équations de Maxwell, qui établissent le lien entre les variations des champs électriques et magnétiques. La vitesse de propagation de ces ondes dépend du milieu traversé, atteignant une valeur maximale dans le vide ($c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$). La compréhension de la propagation de ces ondes dans le vide permet ensuite de déduire des propriétés des milieux traversés lorsque le signal reçu est perturbé.

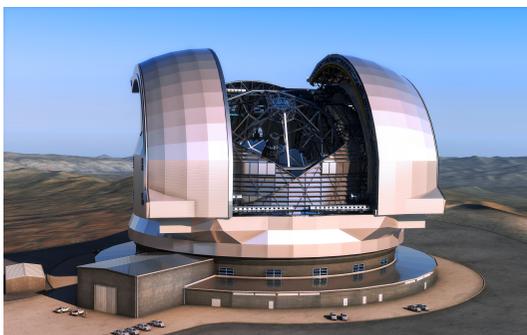


FIGURE 1.1 – Le Télescope Géant Européen (E-ELT) consistera en un télescope de 39 mètres de diamètre opérant dans les domaines optique et infrarouge. Il constituera l'oeil le plus puissant jamais pointé en direction du ciel. Crédit : ESO/L. Calçada, ESO/José Francisco (josefrancisco.org)

I. Équation de d'Alembert

1 - Équation de propagation

a) Équations de Maxwell dans le vide

Dans un milieu vide de charge et de courant, $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$ les équations de Maxwell se simplifient et on observe un couplage symétrique entre le champ magnétique et le champ électrique (cf. Tableau 1.1).

Maxwell-Gauss	$\text{div } \vec{E} = 0$
Maxwell-Flux	$\text{div } \vec{B} = 0$
Maxwell-Faraday	$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Maxwell-Ampère	$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

TABLE 1.1 – Equation de Maxwell dans le vide.

Il est possible de traduire l'équation de Maxwell-Faraday comme un lien

entre la variation temporelle de champ \vec{B} et la création d'un champ \vec{E} variant dans l'espace. De la même manière, un champ électrique variant dans le temps est relié à la création d'un champ magnétique d'après l'équation de Maxwell-Ampère. Ainsi, dans le vide, les champs \vec{E} et \vec{B} s'auto-entretiennent, on parle d'une onde **électromagnétique**.

b) Équation de propagation pour \vec{E}

Mathématiquement, l'équation de propagation d'une onde s'obtient en insérant l'équation de Maxwell-Faraday dans celle de Maxwell-Ampère (ou réciproquement). Il faut alors utiliser une propriété d'analyse vectorielle concernant le double rotationnel.

Propriété :

Formule d'analyse vectorielle :

$$\text{rot rot } \vec{X} = \text{grad}(\text{div } \vec{X}) - \Delta \vec{X}$$

où Δ . est l'opérateur Laplacien.

Appliquons la formule du double rotationnel sur le champ électrique. L'équation suivante se simplifie à l'aide des équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Gauss :

$$\text{rot } \underbrace{\text{rot } \vec{E}}_{=-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} = \text{grad } \underbrace{\text{div } \vec{E}}_{=0} - \Delta \vec{E} \quad \text{soit} \quad \text{rot} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\Delta \vec{E}$$

La possibilité d'invertir la dérivée spatiale et la dérivée temporelle¹ permet d'écrire une équation exclusivement avec le champ électrique :

$$-\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\text{rot } \vec{B}}_{\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} = -\Delta \vec{E} \quad \text{soit} \quad \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \Delta \vec{E}$$

1. L'interversion des dérivées partielles est possible dès que la fonction est de classe C^2 d'après le théorème de Schwarz.

L'équation obtenue est une équation de propagation « de D'Alembert » écrite sous forme canonique :

$$\Delta \vec{E} - \underbrace{\mu_0 \varepsilon_0}_{1/c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

On remarque que $\varepsilon_0 \mu_0$ est homogène à l'inverse du carré d'une vitesse. Il s'agit de la célérité de la lumière dans le vide. Aujourd'hui, cette vitesse est fixée par convention à $c = 299\,792\,458 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. On retiendra que

$$\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$$

Remarque 1 :

L'équation de d'Alembert est un équation d'onde car elle relie une dérivée spatiale à une dérivée temporelle.

c) Équations de propagation pour \vec{B}

 **Exemple 1** En appliquant la formule du double rotationnel pour le champ magnétique, montrer que \vec{B} satisfait l'équation de propagation

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Données : $\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1$.

Pour s'entraîner : exercice 4

Appliquons la formule du double rotationnel pour le champ magnétique, on obtient l'équation suivante qui se simplifie à l'aides des équations de Maxwell :

$$\text{rot } \underbrace{\text{rot } \vec{B}}_{=\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} = \text{grad } \underbrace{\text{div } \vec{B}}_{=0} - \Delta \vec{B} \quad \text{soit} \quad \mu_0 \varepsilon_0 \text{rot} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\Delta \vec{B}$$

La possibilité d'invertir la dérivée spatiale et la dérivée temporelle fait apparaître l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\text{rot } \vec{E}}_{-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} = -\Delta \vec{B} \quad \text{soit} \quad \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \Delta \vec{B}$$

En remplaçant $\mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2$, on obtient l'équation de D'Alembert suivante :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \Delta \vec{B}$$

Remarque 2 :

Les champs électriques et magnétiques satisfont les mêmes équations. Ils sont indissociables l'un de l'autre puisqu'une variation temporelle de l'un est source de l'autre. On parle alors de champ *électromagnétique*.

Propriété :

Dans le vide, l'équation de propagation du champ électromagnétique est appelée equation de d'Alembert

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

où c est la vitesse de la lumière.

L'équation de d'Alembert est une équation générale de propagation des ondes. On retrouve cette équation pour la propagation de vibrations dans les solides ou les fluides.

2 - Solution en ondes progressives

a) Résolution 1-D

Pour simplifier, on suppose que le vecteur \vec{E} est porté par un seul axe et ne dépend que d'une seule coordonnée x , l'équation vectorielle de d'Alembert

devient l'équation scalaire sur l'amplitude $E(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

On démontre en mathématiques que les solutions de cette équation aux dérivées partielles prend une forme très simple (cf. annexe I) appelées fonctions progressives :

$$E(x,t) = f(x + ct) \quad \text{ou} \quad E(x,t) = f(x - ct)$$

Ainsi toutes les fonctions pouvant s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire de ces fonctions progressives sont solutions de l'équation de D'Alembert.

Exemple 2 Vérifier que le champ écrit sous la forme $E(x,t) = f(x - ct)$ est solution de l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

Pour s'entraîner : exercice 4

Dérivons l'expression du champ électrique en utilisant les lois de dérivation pour une fonction composée :

$$\frac{\partial E}{\partial x} = f'(x - ct) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = f''(x - ct)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -cf'(x - ct) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = (-c)^2 f''(x - ct)$$

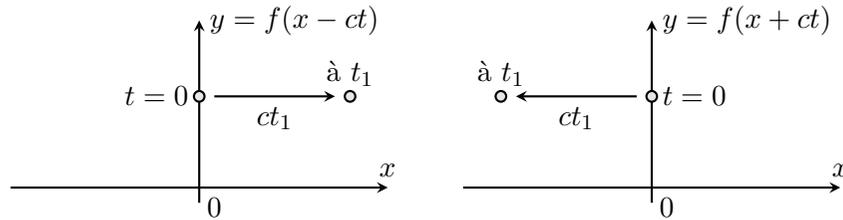
On vérifie bien l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = f''(x - ct) - \frac{1}{c^2} \times c^2 f''(x - ct) = 0$$

b) Signification

Considérons la fonction suivante, définie nulle sur tout l'espace sauf à l'origine :

$$f : X \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } X = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



La représentation de cette fonction pour $X = x + ct$ ou $X = x - ct$ est représenté ci-dessous.

On remarque que la fonction $f(x - ct)$ est non nulle seulement pour $x - ct = 0$ soit $x = ct$. La représentation de la fonction correspond à un point qui s'éloigne selon les x croissants à la vitesse de la lumière c (figure gauche ci-dessus). De la même manière, la représentation de la fonction $f(x + ct)$ correspond à un point se déplaçant selon les x décroissants à la vitesse c .

Définition :
 Une onde est dite **monochromatique** ou **harmonique** lorsque son amplitude est proportionnelle à une fonction sinusoïdale dépendante du temps du type : $s(M,t) = A(M) \cos(\omega t + \phi(M))$.

Définition :
 Une onde est dite *progressive* selon $+Ox$ à la vitesse c si son amplitude peut s'écrire sous la forme : $s(x,t) = s(x - ct)$.
 Elle est *progressive* selon $-Ox$ à la vitesse c si son amplitude peut s'écrire sous la forme : $s(x,t) = s(x + ct)$

La forme générale d'une onde progressive se déplace sans déformation puisque chaque partie possède la même vitesse. Le cas des sources d'onde électromagnétiques n'a pas été évoqué ici. Un dipôle oscillant génère une onde électromagnétique propagative comme nous le verrons au chapitre ??.

3 - Solution en onde progressive monochromatique

a) Onde Monochromatique

L'équation de D'Alembert étant linéaire, on s'intéresse à des solutions monochromatiques en plus d'être progressive, c'est à dire que les sources du champ électromagnétiques sont des fonctions sinusoïdales du temps². La linéarité de

2. On utilisera l'équivalence avec le terme **harmonique**. Bien que l'aspect monochromatique laisse entendre une unique longueur d'onde, il s'agit en réalité de fixer la pulsation, seule invariante par changement de milieu.

l'équation de d'Alembert permet de chercher des solutions également sinusoïdales.

b) Vecteur d'onde

Dans le cas d'une onde propagative, le déphasage dépend de la distance entre la source et le point d'observation ainsi que de la vitesse de l'onde. Une onde émise en O et se propageant à la vitesse c selon l'axe Ox , est retardée en un point M d'abscisse x de $t_{OM} = x/c$. Si cette onde est monochromatique, le déphasage peut s'écrire :

$$\phi(M) = \omega t_{OM} = \frac{\omega x}{c} = k \times x$$

Le déphasage est alors proportionnel à la distance de propagation. On note k ce coefficient de proportionnalité appelé **vecteur d'onde**.

Propriété :
 À une dimension, une onde *progressive* selon les x croissants, *monochromatique*, générée par une source située en O possède une vibration définie par :

$$s(M,t) = s_0 \cos(\omega t - kx)$$

où s_0 est l'amplitude de la vibration, supposée constante ici, ω sa pulsation et k son vecteur d'onde.

L'écriture d'une onde progressive monochromatique contient une double périodicité. En effet, si $\omega = 2\pi/T$ avec T la période temporelle de l'onde, on définit la périodicité spatiale de l'onde avec le vecteur d'onde $k = 2\pi/\lambda$ où λ

est la longueur d'onde (cf. fig. 1.2). En effet, considérons un émetteur au point O. Un observateur fixe au point M enregistrera une fonction sinusoïdale du temps de période T. La représentation de l'onde à un instant t donné sera une fonction sinusoïdale de période λ (cf. fig.1.2).

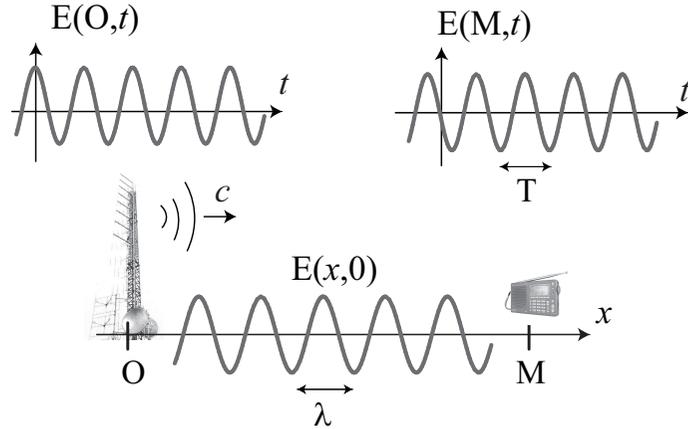


FIGURE 1.2 – Périodicité spatiale et temporelle d'une onde monochromatique

- les rayons UV : $1 \text{ nm} < \lambda < 400 \text{ nm}$, interagissent fortement avec les systèmes biologiques du fait de leur grande énergie ;
- le domaine visible (400-800 nm) ;
- les infra rouges utilisés pour le chauffage radiant, les télécommunications ($1,5 \mu\text{m}$) dans les fibres optiques ;
- les micro-ondes et ondes radio utilisés pour la transmission d'informations (wifi, portable, radio).

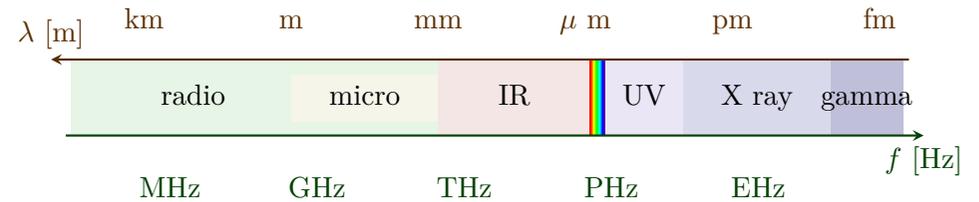


FIGURE 1.3 – Spectre électromagnétique

II. Les Ondes Planes Progressives Monochromatiques

1 - Onde plane progressive

Définition :
Le **front d'onde** ou la **surface d'onde** est une surface dite équiphasé, c'est-à-dire que ces points ont mis le même temps de parcours depuis la source, définie par $\phi(M) = C^{te}$.

Dans le cas d'une onde monochromatique, progressive selon Ox, l'amplitude de l'onde s'écrit : $s(M,t) = A \cos(\omega t - kx)$. La phase de l'onde en un point $M(x,y,z)$ est définie par $\phi(M) = kx$. La surface d'onde d'équation

Définition :
Pour une onde se propageant dans la direction \vec{u} , le vecteur d'onde s'écrit : $\vec{k} = k\vec{u}$ avec $k = 2\pi/\lambda$. L'écriture générique d'une vibration progressive harmonique est alors :

$$s(\vec{r},t) \mapsto A(\vec{r}) \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi_0)$$

avec $A(\vec{r})$ l'amplitude de l'onde au point \vec{r} et ϕ_0 la phase à l'origine (pour $\vec{r} = \vec{0}$ et $t = 0$).

c) Spectres et applications

Les ondes électromagnétiques ont des utilisations très variées selon la longueur d'onde utilisés (cf. fig. 1.3) :

- Les rayons X pour des longueurs d'onde inférieures au nm possèdent une très grande énergie et sont utilisées pour sonder la matière.

$\phi(x,y,z) = C^{te}$ et donc le plan $(M, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Les fronts d'onde sont donc des plans perpendiculaires à la direction de propagation (cf. fig. 1.4).

Définition :

Une onde est dite **plane** est une onde dont les fronts d'onde (plans équi-phases) sont des plans infinis.

On oppose en général les ondes planes aux ondes *sphériques*, émises par une source ponctuelle, dont les fronts d'onde sont des sphères. On estime qu'à proximité d'une source ponctuelle, la surface d'onde est sphérique mais qu'elle peut être assimilée localement à une onde plane à longue distance³ (cf.fig 1.4).

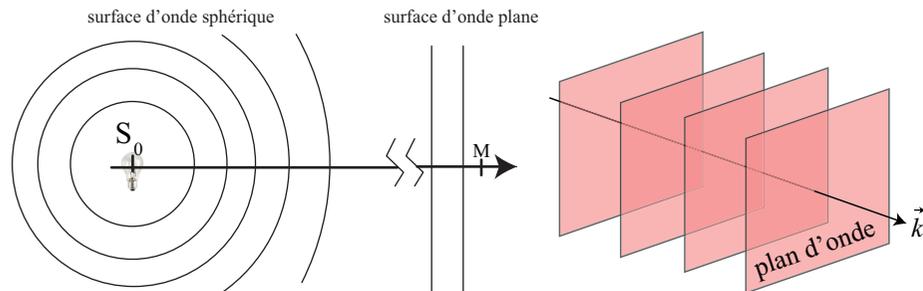


FIGURE 1.4 – Surfaces d'onde sphérique devenant plane (gauche). Illustration d'une succession de plan d'onde (droite).

3. Une autre possibilité est de placer une source visible dans le plan focal objet d'une lentille convergente.

Propriété :

Si l'amplitude d'une onde *plane progressive monochromatique* (OPPM) est uniforme l'onde est dite **homogène**. De façon générique, l'amplitude d'une onde plane monochromatique peut s'écrire sous la forme :

$$E(\vec{r},t) = \underbrace{E_0}_{\text{onde plane}} \underbrace{\cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}_{\substack{\text{monochromatique} \\ \text{progressive}}}$$

Pour une onde sphérique, l'amplitude de l'onde progressive est décroissante avec l'éloignement :

$$E(\vec{r},t) = \frac{\mathcal{E}_0}{r} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

2 - Polarisation

a) Définition

Le champ électromagnétique est une grandeur vectorielle. Lors de la propagation libre d'une onde électromagnétique dans le vide, le champ électrique et le champ magnétique oscillent simultanément dans des directions perpendiculaires. Par convention, la **polarisation** de la lumière décrit la mouvement du champ électrique dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation.

Définition :

On parle de **polarisation rectiligne** lorsque le champ électrique n'est porté que par un seul vecteur. Ce vecteur donne l'axe de polarisation du champ électromagnétique. Le champ magnétique vibre alors dans une direction perpendiculaire.

Par exemple, un champ électrique écrit sous la forme : $\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z$ décrit une onde polarisée selon l'axe Oz. Une représentation des champs \vec{E} et \vec{B} est proposée figure 1.5.

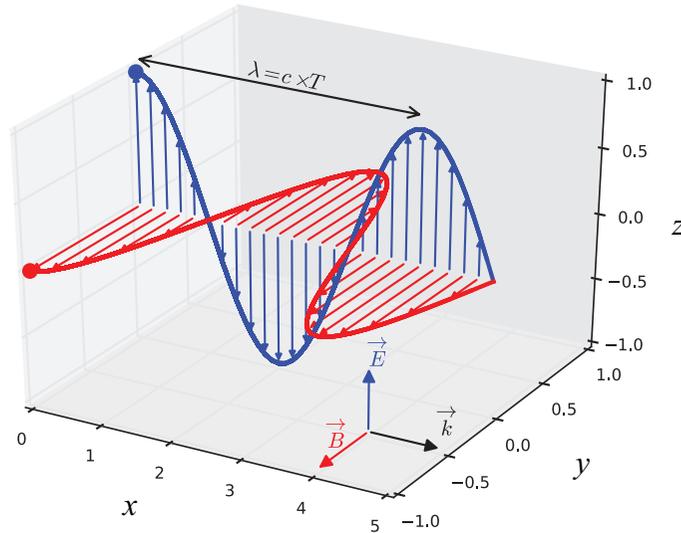


FIGURE 1.5 – Structure d’une onde propagative selon Ox et polarisée rectilignement selon z .

Bien que ce chapitre traite principalement de la polarisation rectiligne, il existe plusieurs états de polarisation. La polarisation circulaire est abordée en annexe III. La lumière naturelle n’est pas polarisée, c’est à dire que l’axe du champ électrique est aléatoire dans le temps. En revanche, la lumière réfléchie sur une surface vitrée ou de l’eau peut être totalement ou partiellement polarisée tout comme celle issue de la diffusion par les molécules de l’atmosphère (cf. chap. ??).

Remarque 3 :

Si nos yeux ne reconnaissent pas la polarisation de la lumière, il n’en est pas de même pour les animaux. De nombreux insectes détectent la lumière polarisée présente partiellement dans la lumière diffusée du ciel ou celle réfléchie par une flaque d’eau (cf. fig. 1.6). Pour le démontrer, des chercheurs ont placé des abeilles dans un tunnel muni de polariseur et ont étudié son comportement, notamment sa capacité à s’orienter dans l’espace (cf. 1.6).

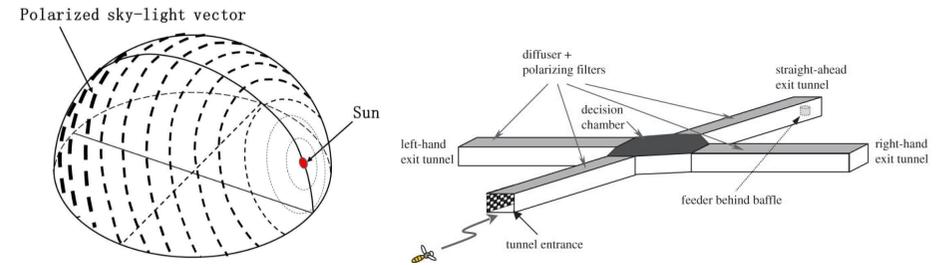


FIGURE 1.6 – (Gauche) Diagramme de polarisation du ciel, d’après Machines, (2022), **10**, 1028. (Droite) Tunnel avec lumière polarisée pour abeilles. D’après Kraft *et al*, *Honeybee navigation : following routes using polarized-light cues*, Phil. Trans. R. Soc. B (2011) **366**, 703-708,

Exemple 3 Proposer une écriture pour les champs électriques associées aux ondes planes monochromatiques suivantes :

- progressive selon Ox polarisée selon Oy
- progressive selon Oy polarisée selon Oz
- progressive selon $-Oy$ polarisée selon Ox

Pour s’entraîner : exercices 1, ??, ??

La propagation se retrouve dans le contenu de la fonction cosinus. Une onde progressive monochromatique selon $+Ox$ aura une amplitude proportionnelle à $\cos(\omega t - kx)$. La polarisation est la direction du vecteur \vec{E} , ainsi une polarisation rectiligne selon Oy sera décrite par un champ électrique porté par le vecteur \vec{e}_y . On peut donc proposer :

- $\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$
- $\vec{E}(y,t) = E_0 \cos(\omega t - ky) \vec{e}_z$
- $\vec{E}(y,t) = E_0 \cos(\omega t + ky) \vec{e}_x$

b) Polariseurs

Un polariseur permet d'analyser la lumière en absorbant préférentiellement le champ électrique selon une direction de l'espace. Les polariseurs usuels sont constitués d'un alignement de molécules formant de longues chaînes conductrices piégées sur une feuille plastique. De la même façon que pour une grille conductrice (cf. fig.1.8), lorsque le champ électrique est parallèle à ces chaînes, les électrons de ces molécules sont excités et le champ électrique est absorbé. Lorsque le champ électrique est perpendiculaire à l'axe des chaînes, l'interaction est beaucoup plus faible et le champ électrique est transmis. Un polariseur idéal possède donc un axe transparent (perpendiculaire aux molécules étirées) selon lequel la lumière transmise et polarisée rectilignement. En lumière naturelle, non polarisée, une feuille de polariseur paraît grise car elle absorbe environ la moitié de la lumière.



FIGURE 1.7 – Polariseurs commerciaux, Nova Physics ©.

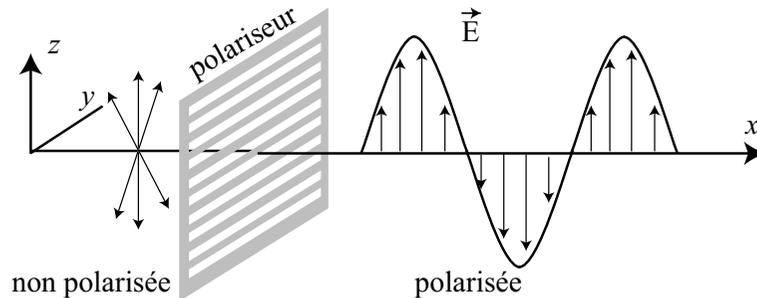


FIGURE 1.8 – Principe du polariseur.

3 - Lien entre \vec{k} , \vec{E} , \vec{B}

a) Notation complexe

Pour une onde monochromatique, il est possible d'utiliser la notation complexe avec les conventions suivantes concernant l'amplitude de l'onde :

$$E(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx) = \text{Re} \left(E_0 e^{i(\omega t - kx)} \right)$$

L'écriture complexe d'une onde plane progressive selon $+Ox$ et polarisée selon \vec{e}_y devient :

$$\underline{\vec{E}}(x,t) = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_y$$

L'intérêt de la notation complexe est double, puisque :

- une dérivée spatiale consiste à multiplier par $-i\vec{k}$;
- une dérivée temporelle par $i\omega$.

On admet alors que les opérateurs vectoriels utilisés peuvent s'utiliser avec la notation complexe et deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div.} \Leftrightarrow -i\vec{k}. \\ \text{rot.} \Leftrightarrow -i\vec{k} \wedge . \\ \frac{\partial}{\partial t} \Leftrightarrow i\omega. \end{array} \right.$$

En notation complexe, les équations de Maxwell dans le vide se simplifient, les dérivées sont remplacées selon la nature des opérateurs (cf. tableau 1.2).

b) Onde transverse

Dans le vide, l'équation de Maxwell-Gauss et de Maxwell Thomson s'écrivent en notation complexe sous la forme :

$$-i\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} = 0 \quad \text{et} \quad -i\vec{k} \cdot \underline{\vec{B}} = 0$$

On en déduit que le vecteur d'onde \vec{k} est orthogonal au champ électromagnétique.

	notation réelle	complexe
Maxwell-Gauss	$\text{div } \vec{E} = 0$	$-i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$
Maxwell-Flux	$\text{div } \vec{B} = 0$	$-i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$
Maxwell-Faraday	$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$-i\vec{k} \wedge \vec{E} = i\omega \vec{B}$
Maxwell-Ampère	$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$-i\vec{k} \wedge \vec{B} = \frac{i\omega}{c^2} \vec{E}$

TABLE 1.2 – Équations de Maxwell dans le vide en notation complexe.

Propriété :

Dans le vide, une onde électromagnétique progressive est une onde **transverse**. C'est à dire que le plan contenant le champ électromagnétique est perpendiculaire à la direction de propagation :

$$\vec{k} \perp \vec{E} \quad \text{et} \quad \vec{k} \perp \vec{B}$$

Les OPPMs sont des solutions génériques permettant de reconstruire la plupart des ondes rencontrées. La structure de l'OPPM sous la forme d'un trièdre direct $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ n'est valable que dans le vide. On rencontre des composantes longitudinales par exemple dans des fibres optiques ou les plasmas (cf. chapitre ??).

c) Relation de structure

Dans le vide, l'équation de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Ampère s'écrivent en notation complexe sous la forme :

$$\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B} \quad \text{et} \quad \vec{k} \wedge \vec{B} = -\frac{\omega}{c^2} \vec{E}$$

Ces équations sont également valables avec une écriture réelle des champs électromagnétiques. On en déduit que l'ensemble de vecteurs $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ forment un trièdre direct. L'utilisation de la relation de dispersion du vide $\omega = kc$

permet de simplifier les relations précédentes et l'étendre aux ondes non-monochromatiques.

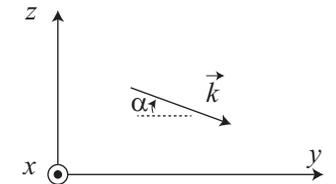
Propriété :

Notons \vec{u} la direction de propagation de l'onde électromagnétique, alors pour une onde progressive dans le vide se propageant dans la direction \vec{u} , les relations dites **de structure** s'écrivent :

$$\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c} \quad \text{et} \quad \vec{E} = -c\vec{u} \wedge \vec{B}$$

Exemple 4

On s'intéresse à une OPPM polarisée rectilignement selon Ox et arrivant avec un angle α par rapport à l'horizontale sur une surface plane.



1 - On note λ la longueur d'onde de l'OPPM. Donner les coordonnées du vecteur d'onde de l'onde décrite.

2 - Proposer une écriture pour le champ électrique.

3 - En déduire une écriture pour le champ magnétique et représenter le trièdre $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$.

Pour s'entraîner : exercice ??

1 - Le vecteur unitaire indiquant la propagation est : $\vec{u} = \cos \alpha \vec{e}_y - \sin \alpha \vec{e}_z$. On en déduit l'expression du vecteur d'onde :

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} (\cos \alpha \vec{e}_y - \sin \alpha \vec{e}_z)$$

2 - Le champ électrique est polarisé selon \vec{e}_x , on en déduit que :

$$\vec{E}(M,t) = E_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) = E_0 \cos(\omega t - k \cos \alpha y + k \sin \alpha z) \vec{e}_x$$

3 - Comme il s'agit d'une OPPM dans le vide :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

Le calcul du produit vectoriel donne :

$$k(\cos \alpha \vec{e}_y - \sin \alpha \vec{e}_z) \wedge \vec{e}_x = k(-\cos \alpha \vec{e}_z - \sin \alpha \vec{e}_y)$$

Le champ magnétique s'écrit donc :

$$\vec{B}(M,t) = \frac{kE_0}{\omega} \cos(\omega t - k \cos \alpha y + k \sin \alpha z)(-\cos \alpha \vec{e}_z - \sin \alpha \vec{e}_y)$$

4 - Vitesse de phase

La vitesse de phase d'une onde est la vitesse à laquelle la phase de l'onde se propage dans l'espace. On retrouve la vitesse de phase dans l'écriture d'une onde progressive monochromatique de la forme : $f(x,t) = \cos(\omega t - kx)$. En effet, factorisons par $-k$:

$$f(x,t) = \cos\left(-k \times \left(x - \frac{\omega}{k}t\right)\right) = \cos\left(-k \times (x - v_\phi t)\right) = f(x - v_\phi t)$$

On reconnaît ainsi dans l'expression proposée, une onde progressive se propageant à la vitesse v_ϕ .

Définition :

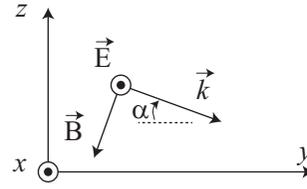
La vitesse de phase pour une onde progressive monochromatique correspond à sa vitesse de propagation définie par

$$v_\phi = \frac{\omega}{k}$$

Une onde progressive de type $f(x - v_\phi t)$ solution de l'équation de d'Alembert satisfait obligatoirement l'équation

$$v_\phi = c = \omega/k$$

Cette équation, appelée relation de dispersion du vide, donne l'expression de la vitesse pour toutes les longueurs d'onde.



Propriété :

Dans le vide, la vitesse de phase est la vitesse de la lumière $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ quelque soit la longueur d'onde. Le vide est un milieu **non-dispersif**.

Pour un milieu dispersif, la vitesse de l'onde dépend de sa longueur d'onde. Les problèmes de dispersion seront étudiés au chapitre ??.

Exemple 5

Dans un matériau transparent d'indice n , l'équation de Maxwell-Ampère en notation complexe devient : $\text{rot } \vec{B} = i\mu_0 \varepsilon \omega \vec{E}$ avec $\varepsilon = \varepsilon_0 \times \varepsilon_r$.

- 1 - Montrer que l'équation d'onde vérifiée par le champ électrique s'écrit : $\Delta \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 / c^2 \vec{E} = \vec{0}$.
 - 2 - Identifier la vitesse de phase v_ϕ en fonction de c et ε_r .
 - 3 - Calculer ε_r pour un verre de type SF11 d'indice optique $n = 1,78$.
- Donnée : $\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1$.

1 - Les équations de Maxwell pour une onde monochromatique s'écrivent dans ce milieu sous la forme :

$$\text{div } \vec{E} = 0, \quad \text{div } \vec{B} = 0, \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -i\omega \vec{B} \quad \text{et} \quad \text{rot } \vec{B} = i\mu_0 \varepsilon \omega \vec{E}$$

L'application de la formule du double rotationnel permet d'obtenir l'équation d'onde :

$$\text{rot } \underbrace{\text{rot } \vec{E}}_{-i\omega \vec{B}} = \text{grad } \underbrace{\text{div } \vec{E}}_{\vec{0}} - \Delta \vec{E} \quad \text{soit} \quad -i\omega \underbrace{\text{rot } \vec{B}}_{i\mu_0 \varepsilon \vec{E}} = -\Delta \vec{E}$$

$$\text{soit} \quad \Delta \vec{E} + \mu_0 \varepsilon \omega^2 \vec{E} = \vec{0}$$

2 - En utilisant une OPPM, le laplacien devient : $\Delta \vec{E} = (-ik)^2 \vec{E}$. L'équation précédente s'écrit alors :

$$-k^2 \vec{E} + \mu_0 \varepsilon \omega^2 \vec{E} = \vec{0} \quad \text{soit} \quad k^2 = \mu_0 \varepsilon \omega^2$$

Avec $\mu_0 \varepsilon = \varepsilon_r / c^2$, on identifie la vitesse de phase comme la vitesse de propagation de l'onde :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

3 - Dans un milieu d'indice n , la vitesse vaut $v_\phi = c/n = c/\sqrt{\epsilon_r}$. Ainsi la permittivité relative de ce matériau vaut :

$$\epsilon_r = n^2 = 3,17$$

Remarque 4 :

Les verres de type SF11 à l'oxyde de plomb font partie des verres dont l'indice est le plus élevé. Pour les lunettes de vue, un indice élevé permet de réduire l'épaisseur des verres pour gagner en esthétique.



III. Puissance transportée par une OPPM

1 - Énergie d'une onde électromagnétique

a) Densité d'énergie électrique

Pour un condensateur de capacité C , soumis à une tension U , l'énergie stockée s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}CU^2$$

En utilisant l'expression du champ électrique $E = Ue$ et de la capacité $C = \epsilon_0 S/e$ pour un condensateur plan (cf. fig. 1.9), on obtient l'expression suivante

$$\mathcal{E} = \underbrace{\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2}_{w_{el}} \times \underbrace{Se}_{\mathcal{V}}$$

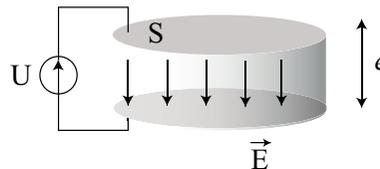


FIGURE 1.9 – Densité d'énergie électrique dans un condensateur.

Le volume entre les armatures étant $\mathcal{V} = Se$, la quantité $w_{el} = \epsilon_0 E^2/2$ est l'énergie volumique présente entre les armatures du condensateur.

Définition :

La densité d'énergie d'électrique est définie par $w_{el} = \epsilon_0 \frac{\|\vec{E}\|^2}{2}$, (en $J \cdot m^{-3}$).

b) Densité d'énergie magnétique

Effectuons le même raisonnement pour un solénoïde. L'énergie stockée dans une bobine s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}Li^2$$

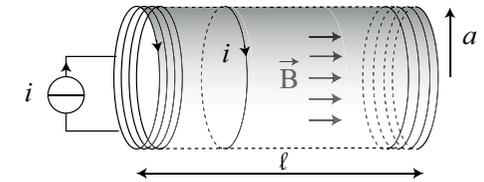


FIGURE 1.10 – Densité d'énergie magnétique dans un solénoïde.

En utilisant l'expression de l'inductance propre $L = \mu_0 n^2 l \pi a^2$ et du champ magnétique $B = \mu_0 n i$ créée par un solénoïde quasi-infini (cf. fig. 1.10), on obtient :

$$\mathcal{E} = \underbrace{\frac{B^2}{2\mu_0}}_{w_{mag}} \times \pi a^2 l$$

Le volume contenue dans le solénoïde vaut $\pi a^2 l$, on peut donc identifier la densité d'énergie magnétique stockée dans le solénoïde⁴ notée w_{mag} .

Définition :

La densité d'énergie magnétiques vaut : $w_{mag} = \frac{\|\vec{B}\|^2}{2\mu_0}$, (en $J \cdot m^{-3}$).

4. Nous avons volontairement introduits les densités d'énergie électromagnétiques sur des exemples, elles apparaissent naturellement à partir des équations de Maxwell cf. annexe II.

c) Densité d'énergie EM

Un champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) stocke de l'énergie à la fois sous forme magnétique et électrique. D'après la relation liant les normes des champs pour une OPPM dans le vide : $B = E/c$, on en déduit que

$$w_{mag} = \frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0} = \frac{|\vec{E}|^2}{2\mu_0 c^2} = \varepsilon_0 \frac{|\vec{E}|^2}{2} = w_{el}$$

Propriété :

Dans une OPP, il y a autant d'énergie stockée sous forme magnétique que sous forme électrique.

Pour capter l'énergie d'une onde électromagnétique, on peut utiliser deux types d'antennes (cf. fig. 1.11). Les antennes cadre permettent d'être sensibles au flux de champ magnétique et les antennes filaires, plus fréquentes, détectent le champ électrique.

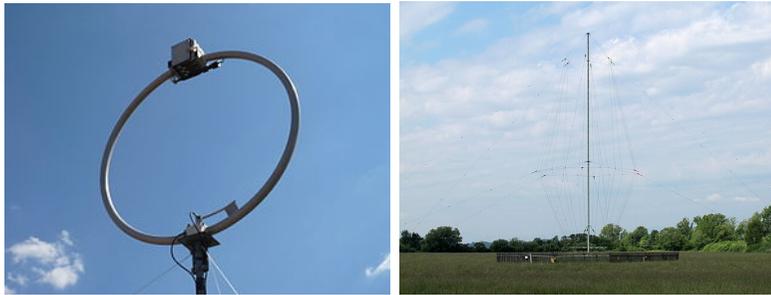


FIGURE 1.11 – Antenne cadre, sensible au champ magnétique (©Trixt, ) et antenne filaire, sensible au champ électrique (©wdwd, )

2 - Vecteur de Poynting

Si l'onde électromagnétique se déplace et contient une énergie, il est possible de définir une puissance transportée par cette onde. L'origine de cette puissance apparaît naturellement à partir des équations de Maxwell (cf. annexe II) mais n'est pas développée ici dans un souci de concision.

Définition :

Le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ est la puissance par unité de surface, transportée par l'onde électromagnétique dans la direction du vecteur $\vec{\Pi}$, défini par :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

$$[\Pi] = W \cdot m^{-2}$$

Pour une OPPM dans le vide, l'utilisation des relations de structures ($\vec{B} = \vec{u} \wedge \vec{E}/c$) permet d'obtenir une expression ne dépendant que du champ électrique. Pour un champ électrique se propageant selon $+Ox$ et polarisé rectilignement selon \vec{e}_y ($\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$), on obtient

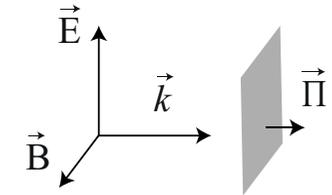


FIGURE 1.12 – Vecteur de Poynting associé à une OPPM.

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge (\vec{e}_x \wedge \vec{E}/c)}{\mu_0} = \frac{E_0^2 \cos^2(\omega t - kx)}{\mu_0 c} \vec{e}_x = \varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2(\omega t - kx) \vec{e}_x$$

Dans le vide, le vecteur de Poynting issue d'une OPPM est une fonction progressive portée par le vecteur associée à la propagation, \vec{e}_x dans l'exemple proposé (cf. fig. 1.12).

Dans le domaine visible, les fluctuations temporelles sont trop rapides pour être suivies par les capteurs optiques actuelles ($\omega \sim 10^{15} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$). On s'intéresse alors à la puissance moyenne du vecteur associée au vecteur de Poynting appelée **irradiance** ou **éclairage énergétique** et donnée⁵ par

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \varepsilon_0 E_0^2 \langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle \vec{e}_x = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2 \vec{e}_x$$

5. En utilisant l'expression de la densité d'énergie, le vecteur de Poynting peut s'écrire sous une forme qui traduit le déplacement de l'énergie à la vitesse c : $\vec{\Pi} = w_{em} \times c\vec{u}$ avec $w_{em} = \langle w_{el}(t) + w_{mag}(t) \rangle$.

Pour s'entraîner : exercices ??, ??, 6

Propriété :

Pour une OPPM écrite en notation complexe, la valeur moyenne peut être obtenue par :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right)$$

où \vec{E} et \vec{B} sont écrits en notation et complexe et \vec{B}^* est le conjugué de \vec{B} .

Quelques ordres de grandeurs usuels de l'irradiance sont donnés tableau 1.3. La valeur moyenne du vecteur de Poynting peut également être perçue comme un flux de photon transportant chacun une énergie $\mathcal{E} = h\nu$ où h est la constante de Planck et $\nu = \omega/2\pi$ la fréquence de l'OPPM.

source	soleil	pointeur laser	laser découpe
intensité ($\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$)	$1 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^3$	10^{11}
$\ \vec{E}\ $ ($\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$)	$6 \cdot 10^3$	$13 \cdot 10^3$	$6 \cdot 10^6$

TABLE 1.3 – Ordre de grandeur de l'irradiance pour différentes sources.

Exemple 6

On considère l'émission par un laser d'une OPPM, polarisée rectilignement selon Oy , se propageant sur l'axe $+Ox$ et de longueur d'onde $\lambda = 600 \text{ nm}$.

- Proposer l'expression du champ électrique correspondant à la description de l'onde. On notera E_0 l'amplitude de ce champ.
- En déduire l'expression du champ magnétique. On exprimera son amplitude B_0 en fonction de E_0 et c .
- Un spot laser éclaire une surface de $s = 1 \text{ mm}^2$ avec une puissance de 1 mW. Déterminer les valeurs des amplitudes E_0 et B_0 .

Données : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$, $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$



- D'après la description, un champ satisfaisant à la description est

$$\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

- Grâce à la notation complexe, on a dans le vide :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{\vec{e}_x \wedge \vec{E}}{c} \quad \text{soit} \quad \vec{B}(x,t) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z$$

- En supposant un éclairage uniforme, on a :

$$\mathcal{P} = \|\langle \vec{\Pi} \rangle\| \times s$$

La valeur moyenne du vecteur de Poynting est donné par :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \left\langle \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right\rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_x$$

On en déduit que⁶

$$E_0 = \sqrt{2\mu_0 c \mathcal{P} / s} = 870 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} \quad \text{et} \quad B_0 = E_0 / c = 2,8 \mu\text{T}$$

Remarque 5 :

Les lasers CO_2 sont des lasers de forte puissance associée à une longueur d'onde dans le domaine de l'infrarouge ($\lambda = 10,6 \mu\text{m}$). Ils sont couramment utilisés dans l'industrie pour la découpe et la gravure de différents matériaux, que ce soit le bois, le carton ou le métal (cf. fig.1.13). Avec une puissance de l'ordre de 1 kW sur une surface inférieure à $0,1 \text{ mm}^2$, la norme du vecteur de Poynting est souvent supérieure à $1 \cdot 10^{10} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$.

6. Même si l'ordre de grandeur du champ magnétique est comparable à celui du champ terrestre, il s'agit d'un champ variant avec une fréquence de $5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$. Il est illusoire de voir bouger une boussole éclairée par un laser...



FIGURE 1.13 – Laser de découpe (©), vidéo de Amada LC 3015 X1 NT ©, puissance 4 kW.

🔥 L'essentiel

Dans le vide, l'équation de propagation du champ électromagnétique est appelée equation de d'Alembert

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

où c est la vitesse de la lumière.

Les solutions de l'équation de d'Alembert sous forme d'Onde Plane Progressive Monochromatique possèdent une amplitude sous la forme :

$$E(\vec{r}, t) = \underbrace{E_0}_{\text{onde plane}} \underbrace{\cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}_{\substack{\text{monochromatique} \\ \text{progressive}}}$$

Dans le vide, une onde plane progressive est une onde **transverse** :

$$\vec{k} \perp \vec{E} \quad \text{et} \quad \vec{k} \perp \vec{B}$$

Les champs électriques et magnétiques sont reliés par **les relations de structure** :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c} \quad \text{et} \quad \vec{E} = -c^2 \vec{u} \wedge \vec{B}$$

La relation de dispersion du vide s'écrit :

$$\omega = kc$$

Comme ω et k sont proportionnels, le vide est dit **non-dispersif**.

La densité d'énergie d'électromagnétique est définie par :

$$w_{elmag} = \underbrace{\varepsilon_0 \frac{|\vec{E}|^2}{2}}_{w_{el}} + \underbrace{\frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0}}_{w_{mag}}$$

Le vecteur de poynting est la puissance par unité de surface rayonnée par l'onde électromagnétique dans la direction du vecteur $\vec{\Pi}$.

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

$$[\Pi] = W \cdot m^{-2}$$

Exercices

3 - Les indispensables

Exercice 1

*D'après CCP 04
solution p.??*

Onde électromagnétique dans le vide. L'espace est rapporté au repère cartésien orthonormé $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. On considère un champ électrique \vec{E} solution de l'équation sous la forme $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz - \phi) \vec{e}_y$ où E_0 et ϕ sont des constantes.

- 1 - Caractériser complètement l'onde associée à ce champ électrique.
- 2 - Établir la relation de dispersion du vide et donner l'expression du vecteur d'onde \vec{k} . Le vide (supposé illimité ici) est-il un milieu dispersif ? Justifier.

- 3 - Rappeler la structure de l'onde plane progressive et en déduire l'expression du vecteur champ magnétique \vec{B} associé à cette onde.
- 4 - Déterminer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ de l'onde.
- 5 - Que représente la moyenne dans le temps du flux de $\vec{\Pi}$ à travers une surface S perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde ? L'exprimer.

Exercice 2

D'après Centrale 17

Un matériau biréfringent est un matériau anisotrope dont la permittivité diélectrique relative dépend de la direction du champ électrique. Les matériaux biréfringents utilisés ici sont tels que la vitesse de propagation d'une onde électromagnétique se propageant selon \vec{u}_z diffère selon la direction du champ électrique et donc selon la polarisation de l'onde. Les lames biréfringentes utilisées ici sont telles que les ondes lumineuses polarisées linéairement selon deux directions orthogonales, appelées axes neutres de la lame, se propagent selon \vec{u}_z comme elles le feraient dans un milieu isotrope, mais avec des indices optiques différents. Les deux axes neutres de la lame sont notés (Ox) et (Oy) et on désigne par n_x (respectivement n_y) l'indice optique de la lame pour l'onde électromagnétique se propageant selon \vec{u}_z et polarisée selon \vec{u}_x (respectivement selon \vec{u}_y). On néglige tout phénomène d'absorption dans le milieu biréfringent et on choisit $n_x > n_y$.

1 - L'axe neutre de la lame biréfringente pour lequel la vitesse de propagation de l'onde est plus élevée est appelé *axe rapide*. L'autre axe neutre est appelé *axe lent*. Dans le cas où $n_x > n_y$, déterminer l'axe rapide.

La lame d'épaisseur e occupe l'espace $0 \leq z \leq e$. L'onde traverse la lame perpendiculairement, à z croissant. On représente son champ électrique à l'entrée de la lame par :

$$\vec{E}(z = 0^+, t) = (E_{0x}\vec{u}_x + E_{0y}e^{j\varphi}\vec{u}_y) e^{j(\omega t + \chi)} = E_{0x} (\vec{u}_x + \alpha e^{j\varphi}\vec{u}_y) e^{j(\omega t + \chi)}$$

avec E_{0x} et α réels positifs.

- Donner l'état de polarisation de l'onde en $z = 0^+$ pour chacune des valeurs $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/2$, $\varphi = \pi$ et $\varphi = 3\pi/2$.
- Préciser, lorsque cela est possible, la condition sur α pour observer une polarisation circulaire.

- Représenter pour chaque valeur de φ , dans le cas où $\alpha < 1$, la trajectoire dans le plan (O, \vec{u}_x , \vec{u}_y) du point M défini par $\vec{OM}(t) = \vec{E}(z = 0^+, t)$. Indiquer le sens de parcours de la trajectoire. Identifier, le cas échéant, le caractère droit ou gauche de la polarisation correspondante.

- Mettre la représentation complexe du vecteur champ électrique en un point d'abscisse z de la lame sous la forme : $\vec{E}(z, t) = E_{0x} (\vec{u}_x + \alpha e^{j\varphi'}\vec{u}_y) e^{j(\omega t + \chi')}$, en précisant les expressions de φ' et χ' . Comparer l'état de polarisation de l'onde en $z > 0$ et en $z = 0^+$. Pourquoi parle-t-on de lame à retard ?

- Dans toute la suite, on admet que la transmission sous incidence normale d'une onde plane progressive sinusoïdale entre deux diélectriques transparents, d'indices réels différents, n'affecte pas les valeurs de φ et de α : la transmission n'affecte pas l'état de polarisation. Exprimer φ' à la sortie de la lame biréfringente sous la forme $\varphi' = \varphi + \frac{2\pi\delta}{\lambda}$, où δ est à exprimer en fonction de n_x , n_y et e .

- On prend ici $\varphi = 0$ et $\alpha = 1$. Identifier l'état de polarisation de l'onde en $z = 0$ et les plus petites valeurs non nulles δ_C et δ_R de δ qui génèrent respectivement, en $z = e$, une onde de polarisation circulaire droite et une onde polarisée rectilignement. À quels types de lames correspondent-elles ?

4 - Ondes polarisées circulairement

Cette question n'est pas guidée et demande de l'initiative de la part du candidat. Les pistes de recherche doivent être consignées ; si elles sont pertinentes, elles seront valorisées. Le barème tient compte du temps nécessaire pour explorer ces pistes et élaborer un raisonnement.

- Vous disposez d'une source lumineuse émettant un faisceau parallèle de lumière non polarisée à la longueur d'onde λ_0 . Comment produire une lumière polarisée, de polarisation circulaire droite ? Même question pour une lumière de polarisation circulaire gauche.

- Concevoir un sélecteur de polarisation circulaire droite (respectivement gauche), c'est-à-dire un filtre de polarisation qui, à partir d'une onde polarisée quelconque transmet (sans pertes) la composante de l'onde de polarisation circulaire droite (respectivement gauche), tout en supprimant totalement la composante de polarisation circulaire gauche

(respectivement droite). Pour concevoir ces deux dispositifs, on n'utilisera que des polariseurs parfaits, des lames quart d'onde et demi onde, sans pertes à la longueur d'onde λ_0 .

5 - Association de lames biréfringentes

Le filtre optique utilise une lame de calcite d'épaisseur $e_c = 447 \mu\text{m}$ et telle que $\Delta n = n_x - n_y = 0,156$ pour la longueur d'onde $\lambda_0 = 1550 \text{ nm}$.

- Calculer pour cette longueur d'onde la valeur de δ notée δ_c .
- On supposera pour la suite que δ_c est indépendant de λ ; quel est alors le phénomène négligé?

Le film de cristaux liquides se comporte comme une lame à retard d'épaisseur $e_{CL} = 7,5 \mu\text{m}$, de valeur δ_{CL} contrôlée par la différence de potentiel U appliquée aux bornes des électrodes de la cellule. Les variations de δ_{CL} avec U sont indiquées par la courbe de la figure ci-dessous, supposée indépendante de λ dans la gamme de longueurs d'onde utilisée dans la technologie WDM.

On cherche à réaliser, pour toutes les longueurs d'onde comprises entre 1565 nm et 1535 nm , la condition $\delta_{CL} = \delta_R$.

Que dire de la plage des valeurs de U permettant de répondre à ce besoin ?



Variations de δ_{CL} avec la tension U

6 - Lame complète

Pour corriger cet inconvénient, on accole la lame de calcite précédente à la lame à cristaux liquides de telle sorte que leurs axes rapides soient confondus, ce qui donne une lame biréfringente L équivalente d'épaisseur $e_c + e_{CL}$.

- Justifier l'obtention en sortie de L d'une onde polarisée rectilignement *différente* de l'état de polarisation de l'onde incidente à condition de satisfaire la relation :

$$\delta_c + \delta_{CL} = (2p + 1)\delta_R \quad \text{avec } p \text{ entier}$$

- Parmi les valeurs $p = 44$, $p = 45$, $p = 46$, déterminer celle permettant de réaliser la condition recherchée, pour toutes les longueurs d'onde souhaitées, lorsque U varie entre 0 et 6 V.

- En déduire la nouvelle plage des valeurs de U permettant d'obtenir la polarisation rectiligne recherchée en sortie de L' , pour toutes les longueurs d'onde souhaitées. Quel est l'intérêt de la lame de calcite ?

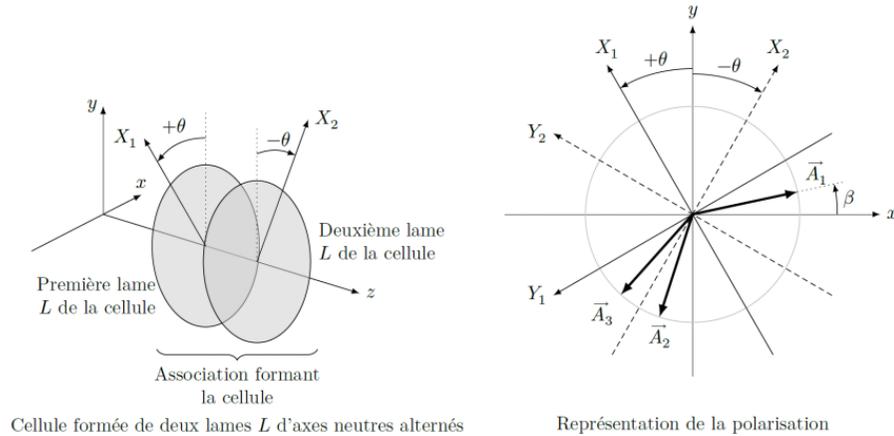
- Préciser la valeur U_0 de U réalisant la condition souhaitée pour $\lambda_0 = 1550 \text{ nm}$.

7 - Cellule du filtre

Une cellule du filtre figure ci-dessous est constituée par deux lames L , notées L_1 et L_2 :

- chaque lame L réunit une lame de calcite et une lame à cristaux liquides ;
- la condition $\delta_c + \delta_{CL} = (2p + 1)\delta_R$ est satisfaite, $\lambda = \lambda_0$ et $U = U_0$;
- les axes neutres des lames L_1 et L_2 sont respectivement (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) ;
- les axes X_1 et X_2 sont inclinés respectivement de $\pm\theta$ par rapport à l'axe Oy .

À l'entrée de la cellule, le champ électrique est : $\vec{E}(z = 0, t) = \vec{E}_0 e^{j\omega_0 t}$. L'état de polarisation de cette onde incidente est obtenu grâce à un polariseur parfait P dont l'axe de transmission fait un angle β avec (Ox) .



- Le champ électrique de l'onde est noté : $\vec{E} = \vec{E}_1 e^{j\omega_0 t}$ à la sortie de la lame L_1 , puis $\vec{E} = \vec{E}_2 e^{j\omega_0 t}$ à la sortie de la lame L_2 , donc à la sortie de la cellule.

Sur la figure ci-dessus, trois vecteurs représentent les directions de polarisation prises par le champ électrique de l'onde avant L_1 , entre L_1 et L_2 , et après L_2 .

- Attribuer à chacun de ces trois vecteurs nommés \vec{A}_1 , \vec{A}_2 et \vec{A}_3 le champ \vec{E}_0 ou \vec{E}_1 ou \vec{E}_2 . Justifier à l'aide du schéma de la figure et des angles utiles.

- Justifier que, par rapport à la direction du champ électrique incident de l'onde en $z = 0$, la direction à la sortie de la cellule a tourné d'un angle ψ . Relier cet angle ψ à l'angle θ .

8 - Filtre complet

Le filtre complet empile un polariseur P, N_C cellules identiques à celles précédentes, et un analyseur A :

- le polariseur P a son axe de transmission orienté selon (Ox) ($\beta = 0$) et impose le champ électrique d'entrée : $\vec{E}(z = 0, t) = E_0 e^{j\omega_0 t} \vec{u}_x$;
- les N_C cellules traitent successivement la polarisation de l'onde transmise ;

- l'analyseur A est identique à P, mais aligné selon l'axe Oy ;
- l'éclairement issu du polariseur est noté \mathcal{E}_0 . On néglige toute absorption autre que le filtrage imposé par l'analyseur A.

La figure ci-contre superpose les profils d'éclairement \mathcal{E} observés pour plusieurs valeurs de U en fonction de λ .

La tension d'alimentation des cellules à cristaux liquides est $U = U_0$.

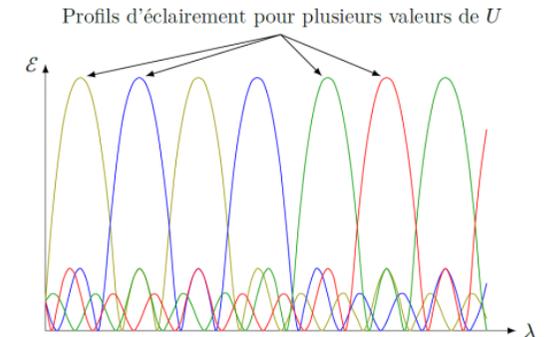
- Quelle est, pour un angle θ donné, la valeur minimale de N_C permettant d'obtenir à la sortie de l'analyseur (A) un éclairement maximal pour $\lambda = \lambda_0$?

- Expliquer *qualitativement* l'obtention d'un éclairement plus faible à la sortie du filtre, si λ s'éloigne de λ_0 .

- Quel est, pour $U = U_0$, l'état de polarisation à la sortie des N_C cellules, pour les deux longueurs d'onde entourant λ_0 correspondant à un éclairement nul ?

Constantes physiques

- Célérité de la lumière dans le vide $c = 3,00 \cdot 10^8$ m/s
- Masse de l'électron $m = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg
- Charge élémentaire $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$ C
- Perméabilité magnétique du vide $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H.m $^{-1}$
- Permittivité diélectrique du vide $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ F . m $^{-1}$
- Constante des gaz parfaits $R = 8,31$ J/K/mol
- Constante d'Avogadro $\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ mol $^{-1}$
- Constante de Boltzmann $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J . K $^{-1}$
- Constante de Planck $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J . s



Annexe : Polarisation circulaires (ou elliptiques) droite et gauche

Une onde plane monochromatique qui se propage selon l'axe (Oz) est dite avoir une polarisation circulaire (ou elliptique) gauche si, en un point donné de l'espace ($z = z_0$), le champ électrique $\vec{E}(z_0, t)$ de cette onde tourne dans le sens trigonométrique direct. Si le champ électrique $\vec{E}(z_0, t)$ tourne dans le sens opposé, l'onde a une polarisation circulaire (ou elliptique) droite.

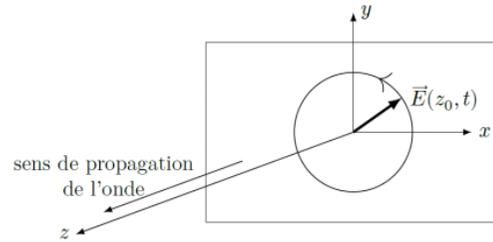


FIGURE 1.14 – polarisation circulaire gauche

Exercice 3

D'après Centrale 18

Lors d'une éclipse solaire, on peut observer la couronne en lumière blanche. Près du limbe solaire, cette lumière provient du rayonnement émis à la surface solaire et diffusé par les électrons libres de la couronne.

Dans le domaine visible, la couronne est quasiment transparente et la structure d'une onde électromagnétique qui s'y propage est identique à celle dans le vide. On considère une onde plane progressive harmonique de pulsation ω et de vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{u}_z$. Son champ électrique est noté $\vec{E}(M, t)$, on supposera une polarisation rectiligne selon \vec{e}_x .



- 1 - Rappeler, sans démonstration, les propriétés du champ électromagnétique de cette onde, ainsi que la relation de dispersion.
- 2 - Déterminer son vecteur de Poynting en fonction de ϵ_0 , c et du champ électrique.
- 3 - En déduire l'intensité I , c'est-à-dire la puissance surfacique moyenne traversant une surface orthogonale à \vec{u}_z .

9 - Pour s'entraîner

Exercice 4

solution p.??

On considère un milieu linéaire, homogène et isotrope de permittivité absolue $\epsilon = \epsilon_r \times \epsilon_0$ et de perméabilité μ_0 , dans lequel il n'y a ni charge libre ni densité de courant. On considère une onde plane monochromatique de pulsation ω , du point de vue des équations de l'électromagnétisme dans ce milieu, les propriétés seront les mêmes que dans le vide en remplaçant ϵ_0 par ϵ .

- 1 - Écrire les équations de Maxwell dans ce milieu.
- 2.a - Montrer simplement que le champ électrique \vec{E} est solution d'une équation vectorielle aux dérivées partielles appelée équation de propagation.

2.b - Identifier dans l'équation de propagation, la célérité de l'onde v_ϕ en fonction de c et ϵ_r .

On suppose que \vec{E} est porté par l'axe Oy , que l'onde est progressive dans la direction $+Ox$ et on appelle E_0 son amplitude.

- 3 - Donner l'expression de \vec{E} en fonction de E_0 , t, x, ω , et k la norme du vecteur d'onde

- 4 - Démontrer la relation de dispersion : $k^2 = \frac{\epsilon_r \omega^2}{c^2}$

- 5 - Démontrer que \vec{E} et \vec{B} sont transversaux et exprimer \vec{B} en fonction de E_0 , t, x, ω, c et ϵ_r .

On appelle $W(x, t)$ la densité volumique d'énergie électromagnétique associée à l'onde.

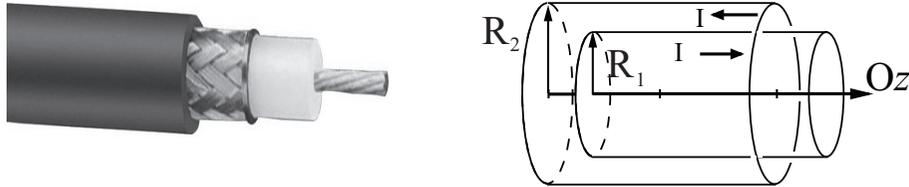
- 6 - Donner l'expression de $W(x, t)$ en fonction de E_0 , t, x, ω, c et ϵ_r .
- 7 - Montrer que W est solution d'une équation de propagation. Exprimer la vitesse de propagation de l'énergie, appelée vitesse v_e en fonction de ω et k puis en fonction de c et ϵ_r .
- 8 - Déterminer l'énergie moyenne traversant une surface plane S normale à Ox pendant un temps Δt en fonction de $S, E_0, \epsilon_r, c, \Delta t$ et μ_0 .

10 - Pour performer

Exercice 5

 D'après CCP 07, Banque PT 07, centrale 08
 solution p.??

Une ligne électrique, supposée de longueur infinie, est constituée par un câble coaxial comprenant deux surfaces cylindriques, conductrices, de résistance négligeable, de rayons R_1 et $R_2 > R_1$. L'espace entre les deux conducteurs est vide. Le câble est traversé par un courant alternatif d'expression en notation complexe $\underline{I}(z,t) = I_m(z)e^{j\omega t}$ dans le sens de Oz pour le conducteur interne et dans le sens opposé pour le conducteur externe.



On suppose que les champs électrique \vec{E} et magnétique \vec{B} en tout point M dans l'espace $R_1 < r < R_2$ sont de la forme :

$$\underline{\vec{E}}(r,z,t) = \underline{\vec{E}}_0(r,z)e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{\vec{B}}(r,z,t) = \underline{\vec{B}}_0(r,z)e^{j\omega t}$$

et que le champ électrique \vec{E} est radial : $\vec{E}_0(r,z) = E_0(r,z)\vec{e}_r$.

1 - Par application de l'équation de Maxwell-Faraday sous forme locale au point M entre les deux conducteurs, montrer que le champ \vec{B} est orthoradial. (On négligera toute composante continue de ce champ).

2 - En appliquant l'équation de Maxwell-Ampère sous forme intégrale (théorème d'Ampère généralisé) à un cercle d'axe Oz , de rayon r (cercle passant par M), déterminer en fonction de r et du courant $I_m(z)\exp(j\omega t)$, le champ magnétique \vec{B} .

3 - Établir une relation entre B_0 et E_0 en appliquant de nouveau l'équation de Maxwell-Ampère mais sous forme locale au point M , à la distance r de l'axe Oz . En déduire l'expression du champ électrique E en fonction de r et du courant $I_m(z)\exp(j\omega t)$. (On n'introduira pas de champ électrique constant).

4 - En déduire que la fonction $I_m(z)$ satisfait à une équation différentielle dont une solution est $I_m(z) = I_0 \exp(-jkz)$ et donner l'expression de k .

5 - Montrer que cette solution correspond à une " onde de courant " qui se propage parallèlement à l'axe Oz , avec un sens et une vitesse de phase que l'on précisera.

6 - Déterminer, à partir de l'expression de $I_m(z)$, les champs \vec{E} et \vec{B} en notation réelle.

7 - L'onde électromagnétique existant entre les conducteurs est elle une onde plane ? Quelle propriété vérifie néanmoins \vec{k} , \vec{E} et \vec{B} .

8 - Définir, en notation réelle, le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ et sa valeur moyenne temporelle $\langle \vec{\Pi} \rangle$. En déduire le flux de $\langle \vec{\Pi} \rangle$ à travers la couronne circulaire comprise entre les circonférences de rayons R_1 et R_2 .

Données : $\vec{\text{rot}} \vec{U} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \theta} - \frac{\partial U_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial U_r}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r U_\theta}{\partial r} - \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$

Exercice 6

 D'après Centrale 07
 solution p.??

On considère deux ondes électromagnétiques planes progressives, monochromatiques, de même pulsation ω , se propageant dans le vide dans la même direction et le même sens (celui de l'axe Oz). On notera c la célérité de la lumière dans le vide. $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est une base orthonormée associée au trièdre (Ox, Oy, Oz) . Les deux ondes sont polarisées rectilignement selon le même axe Ox . On a alors deux polarisations parallèles. On note E_1 et E_2 les amplitudes, supposées positives, des champs électriques des deux ondes. L'onde (2) présente un retard de phase ϕ par rapport à l'onde (1).

1 - Exprimer les champs électriques \vec{E}_1, \vec{E}_2 et les champs magnétiques \vec{B}_1, \vec{B}_2 , caractérisant les deux ondes en notation complexe. Calculer pour chacune des deux ondes les moyennes temporelles des vecteurs de Poynting $\langle \vec{\Pi}_1 \rangle$ et $\langle \vec{\Pi}_2 \rangle$. Pour simplifier les calculs, on utilisera le fait que

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0}$$

où \underline{X}^* correspond au conjugué que \underline{X} .

- 2 - Exprimer pour l'onde résultante la moyenne temporelle du vecteur de Poynting $\langle \vec{\Pi} \rangle$.
- 3 - On introduit les intensités : $I_1 = \langle \vec{\Pi}_1 \rangle \cdot \vec{e}_z$, $I_2 = \langle \vec{\Pi}_2 \rangle \cdot \vec{e}_z$ et $I = \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \vec{e}_z$. Relier I à I_1 , I_2 et ϕ . Quelle formule obtient-on ?
 Les deux ondes sont désormais polarisées rectilignement, l'onde (1) selon Ox et l'onde (2) selon Oy . On a alors deux polarisations orthogonales. L'onde (2) présente toujours le déphasage par rapport à l'onde (1).
- 4 - Reprendre les calculs précédents afin d'écrire I en fonction des mêmes quantités.
- 5 - Conclure sur les conditions nécessaires à des interférences d'ondes planes progressives monochromatiques polarisées rectilignement se propageant sur le même axe.

I. Solution de l'équation de d'Alembert

Montrons que $s(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$ est une fonction solution de l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$$

Posons le changement de variable $u = x + ct$ et $v = x - ct$. Ainsi les opérations de dérivation se modifient grâce à la règle de la chaîne :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \times \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \times \frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \quad \text{car} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \times \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial t} \times \frac{\partial}{\partial v} = c \frac{\partial}{\partial u} - c \frac{\partial}{\partial v} \quad \text{car} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial t} = c$$

Évaluons les dérivées secondes :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial s}{\partial u} + \frac{\partial s}{\partial v} \right) = \frac{\partial^2 s}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 s}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 s}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \left(c \frac{\partial}{\partial u} - c \frac{\partial}{\partial v} \right) \left(c \frac{\partial s}{\partial u} - c \frac{\partial s}{\partial v} \right) = c^2 \frac{\partial^2 s}{\partial u^2} - 2c^2 \frac{\partial^2 s}{\partial u \partial v} + c^2 \frac{\partial^2 s}{\partial v^2}$$

Grâce à ces expressions, l'équation de d'Alembert devient :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 s}{\partial u \partial v} = 0$$

Intégrons cette équation :

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial s}{\partial v} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\partial s}{\partial v} = A(v) = A(x - ct)$$

où $A(v)$ est une fonction quelconque dépendant uniquement de $v = x - ct$. Par une nouvelle intégration par rapport à v , il vient :

$$s(u,v) = \int A(v) dv + B(u)$$

où $B(u)$ est la "constante" d'intégration, à priori différente pour chaque valeur de u . Il s'agit donc d'une fonction quelconque dépendant uniquement de u . Nous pouvons donc poser sans souci de généralisation :

$$B(u) = g(x + ct) \quad \text{et} \quad \int A(v) dv = f(x - ct)$$

II. Vecteur de Poynting

Rappelons les équations de Maxwell

Maxwell-Gauss	$\text{div } \vec{E} = \rho / \epsilon_0$
Maxwell-Flux	$\text{div } \vec{B} = 0$
Maxwell-Faraday	$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Maxwell-Ampère	$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Utilisons la formule d'identité vectorielle :

$$\text{div } \vec{E} \wedge \vec{B} = \vec{B} \cdot \text{rot } \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{B}$$

Grâce aux équations de Maxwell-Faraday et Ampère, il vient :

$$\operatorname{div} \vec{E} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \left(\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Les dérivées temporelles peuvent être modifiées selon l'expression : $f(t)f'(t) = \frac{1}{2} \frac{df^2}{dt}$. On obtient :

$$\operatorname{div} \vec{E} \wedge \vec{B} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} B^2 - \frac{1}{2} \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E^2 - \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{E}$$

En divisant par μ_0 , il apparaît la dérivée de la densité d'énergie électromagnétique : $w_{em} = \varepsilon_0 E^2/2 + B^2/2\mu_0$. En réorganisant les termes, on obtient :

$$\operatorname{div} \underbrace{\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}}_{\vec{\Pi}} + \frac{\partial w_{em}}{\partial t} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ est appelé vecteur de Poynting. Si $\vec{j} = \vec{0}$, l'équation ci-dessus une équation de conservation⁷ où $\operatorname{div} \vec{\Pi}$ décrit un flux et $\frac{\partial w_{em}}{\partial t}$ une variation de l'énergie volumique. Comme le vecteur de Poynting apparaît à partir de l'opérateur divergence, il pourrait être défini à un rotationnel près $\vec{\Pi}' = \vec{\Pi} + \operatorname{rot} \vec{X}$ serait également solution. La théorie de la relativité impose l'unicité de $\vec{\Pi}$ sous la forme définie ici.

III. Polarisation circulaire

1 - Expression du champ électrique

Il est possible d'obtenir une polarisation autre que rectiligne, comme la polarisation elliptique ou la polarisation circulaire. Cette dernière est par exemple utilisée dans le cinémas 3D. L'expression ci-dessous correspond à l'écriture d'une

onde progressive selon Ox et polarisée circulaire-droite s'écrivant dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:

$$\vec{E}(x,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \sin(\omega t - kx) \\ E_0 \cos(\omega t - kx) \end{pmatrix}$$

Une représentation est proposée figure 15. On parle de polarisation circulaire car dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation, l'extrémité du vecteur \vec{E} décrit un cercle. Lorsque les amplitudes du champ électrique sont différentes selon les axes, la polarisation set dite elliptique.

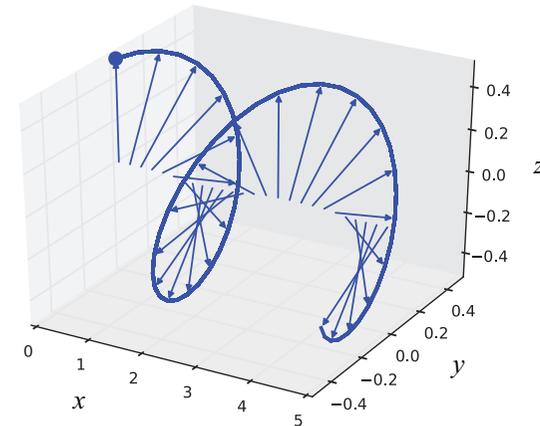


FIGURE 15 – Onde polarisée circulaire-droite.



Propriété :

Par convention, le sens de rotation d'une polarisation circulaire est défini avec le vecteur \vec{k} vers l'observateur.

Lorsque le sens de parcours est horaire, la polarisation est dite « droite ». On obtient une polarisation circulaire gauche si le sens de parcours est anti-horaire (cf. fig. 16). Dans l'exemple proposé ci-dessus, à $t = 0$, le champ électrique pointe selon l'axe Oz dans le plan $x = 0$. La composante selon Oy croît pour des temps ultérieurs, le sens de parcours est donc horaire pour cette polarisation circulaire droite.

7. Comparer par exemple à l'équation de conservation de la charge $\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

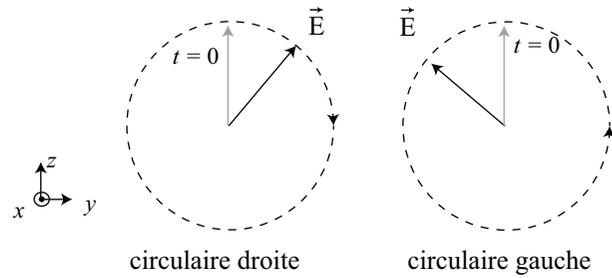


FIGURE 16 – Mouvement du vecteur \vec{E} dans le plan Oyz pour une propagation selon $+Ox$. Le repère est orienté de sorte que $\vec{k} = k\vec{e}_x$ pointe vers l'observateur.

On peut proposer l'écriture suivante Une onde progressive selon Ox et polarisée circulaire-gauche s'écrirait dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:

$$\vec{E}(x,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -E_0 \sin(\omega t - kx) \\ E_0 \cos(\omega t - kx) \end{pmatrix}$$

2 - Matériau biréfringent

Certains matériaux ont la particularité de ne pas avoir la constante diélectrique selon deux axes cristallographiques différents. C'est notamment le cas de la calcite (cf. fig. 17).

Il est possible de réaliser des polarisations circulaires à partir d'une lame quart d'onde. Il s'agit d'un cristal non isotrope, l'indice dépend de ces axes cristallographique. Selon l'axe du champ électrique, le déphasage sera différent selon l'axe dit lent ou rapide du matériau. En choisissant une épaisseur adaptée, il est possible de déphaser de $\pi/2$ deux composantes perpendiculaire du champ électrique. Dans un souci de simplification des calculs, on choisit l'orientation \vec{e}_z selon l'axe de la lame quart d'onde. Le polariseur est incliné de $\pi/4$ de sorte que le champ électrique s'écrive dans ce repère

$$\vec{E}(x,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \cos(\omega t - kx) \\ E_0 \cos(\omega t - kx) \end{pmatrix}$$

Après passage dans la lame $\lambda/4$ (c'est-à-dire d'épaisseur $\delta = \lambda/4$) orientée selon \vec{e}_z , le champ électrique sur cet axe présente un retard de phase de $\phi =$

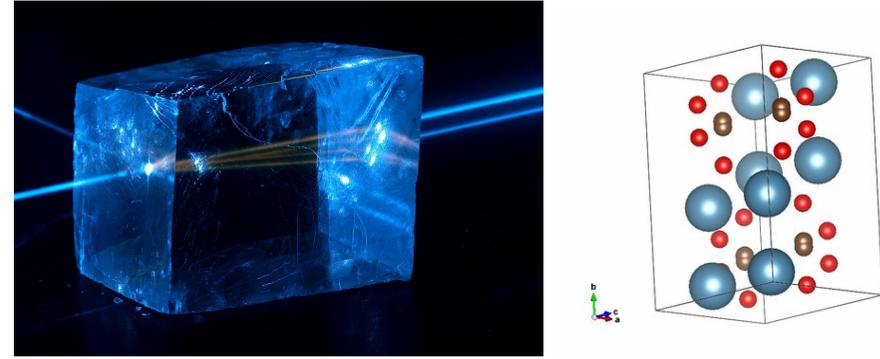


FIGURE 17 – Biréfringence dans la calcite (©J. Pavelka, ©) et maille cristallographique (©I. Veltz, Institut français de l'éducation).

$2\pi\delta/\lambda = \pi/2$. Ainsi, le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E}(x,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \cos(\omega t - kx) \\ E_0 \cos(\omega t - kx - \pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \cos(\omega t - kx) \\ E_0 \sin(\omega t - kx) \end{pmatrix}$$

qui est polarisée circulaire gauche.

IV. Limites du modèle de l'OPPM

a) Limitation spatiale

L'onde plane définie précédemment possède une extension spatiale infinie. L'onde associée au champ $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$ est définie dans tout le plan Oyz . La densité d'énergie étant uniforme, l'énergie totale véhiculée par cette onde est infinie.

On pourrait restreindre la valeur du champ à un certain domaine comme un faisceau cylindrique :

$$\vec{E}(x,y,z) = \begin{cases} E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y & \text{si } y^2 + z^2 < R^2 \\ \vec{0} & \text{sinon} \end{cases}$$

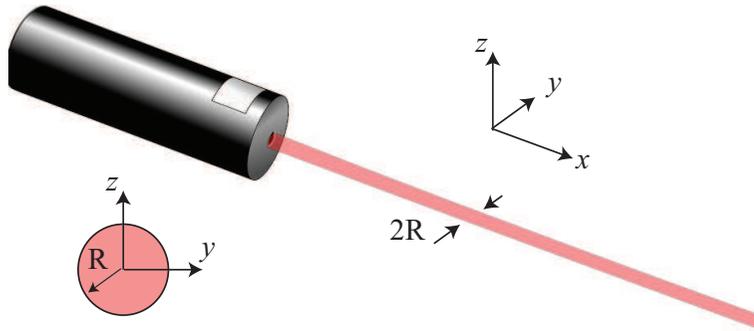


FIGURE 18 – Modèle de faisceau cylindrique

Ce modèle est plus juste mais incompatible avec $\text{div } \vec{E} = 0$. Pour le champ proposé, l'équation de Maxwell-Gauss dans le vide devient :

$$\frac{\partial E}{\partial y} = 0$$

Or le champ écrit ci-dessus n'est pas dérivable ! L'écriture ci-dessus est incompatible avec la théorie de la diffraction. On peut utiliser alors le modèle du « faisceau Gaussien » qui permet de satisfaire une équation de propagation selon Oz :

$$E(r, z) = E_0 \frac{w_0}{w(z)} \exp\left(\frac{-r^2}{w^2(z)}\right) \exp\left(-ikz - ik \frac{r^2}{2R(z)} + i\zeta(z)\right)$$

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + z^2/z_0^2} ; R(z) = z \left(1 + z_0^2/z^2\right) ; \zeta = \tan^{-1}(z/z_0)$$

Si ce modèle pourtant non trivial permet une nette amélioration, il est issu de l'approximation paraxiale et ne vérifie pas toutes les équations de Maxwell ! Il est cependant généralement suffisant pour décrire des faisceaux de rayon $w_0 > 10\lambda$.

b) Limitation temporelle

L'onde plane possède une extension temporelle infinie. La description d'une onde harmonique définie entre $t \rightarrow -\infty$ et $t \rightarrow +\infty$ est la modélisation d'une onde de largeur spectrale nulle. On peut restreindre la durée d'une onde sur une durée Δt (ou t_c pour temps de cohérence). Mais la transformée de Fourier

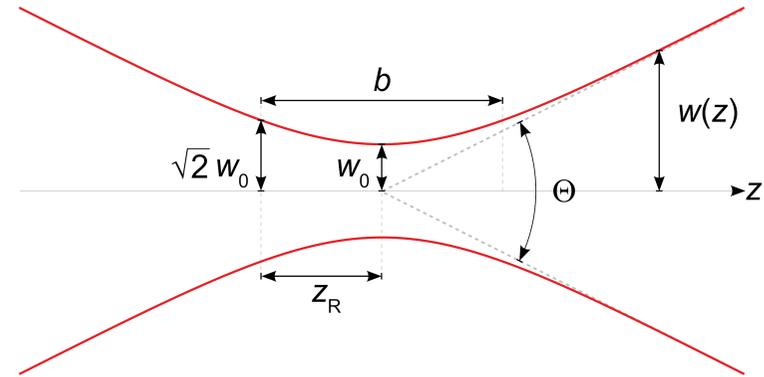


FIGURE 19 – Modèle de faisceau gaussien. Source : wiki/Gaussianbeam.svg (CC BY-NC-SA).

d'une vibration sinusoïdale définie sur une durée Δt donne une répartition des fréquences sur une largeur spectrale Δf reliée par :

$$\Delta t \Delta f \approx 1$$

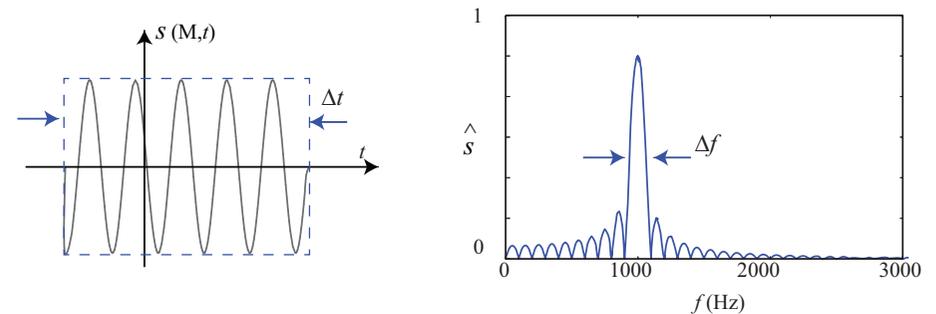


FIGURE 20 – Limitation temporelle et spectrale d'un train d'onde

L'équation de d'Alembert étant linéaire, une onde non harmonique peut s'écrire comme la somme de d'ondes harmoniques. La somme de deux ondes de pulsations proches permet de localiser légèrement une onde harmonique par le phénomène de battement. Dans le cas général, on peut construire un champ quelconque par intégration sur les pulsations ou les nombres d'onde (plus pra-

source	$\lambda(nm)$	$\Delta\lambda(nm)$	$\nu(Hz)$	$\Delta\nu (Hz)$	t_C	L_c
Laser	633	$1 \cdot 10^{-3}$	$4,74 \cdot 10^{14}$	$1,5 \cdot 10^9$	0,67 ns	20 cm
Sodium	590	0,1	$5,08 \cdot 10^{14}$	$86 \cdot 10^9$	10 ps	3 mm
Blanche	600	200	$5,0 \cdot 10^{14}$	$170 \cdot 10^{12}$	6 fs	$2 \mu m$

TABLE 4 – Sources et temps de cohérence

tique que les vecteurs d'onde) :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} d\omega$$