Chapitre 1

Équations de Maxwell

Vers 1865, James Clerk Maxwell parvient à synthétiser les travaux de ces prédécesseurs concernant l'induction, l'électrostatique, la magnétostatique. Il pose les bases de l'électromagnétisme moderne reliant ainsi le champ électrique $\vec{E}$ au champ magnétique $\vec{B}$. Le lien entre ces vecteurs nécessitent un formalisme utilisant des opérateurs mathématiques qui sont introduits en début de chapitre.

FIGURE 1.1 – J.C Maxwell au centre, entouré de K. F. Gauss (en haut à droite, puis dans le sens horaire), A-M. Ampère, M. Faraday et J. J. Thomson.

I. Opérateur divergence et flux de champs

1 - Equation de Maxwell-Gauss

a) Théorème de Green-Ostrogradski

Nous avons établi le théorème de Gauss au chap. **??**. Il relie le flux de champ électrique à travers une surface fermée S à la charge qu'elle contient (Q_{int}) :

$$\Phi_S(\vec{E}) = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Nous cherchons à établir une forme locale de cette équation qui relie directement le champ $\vec{E}(M)$ en un point M aux caractéristiques locales du système. Le théorème de

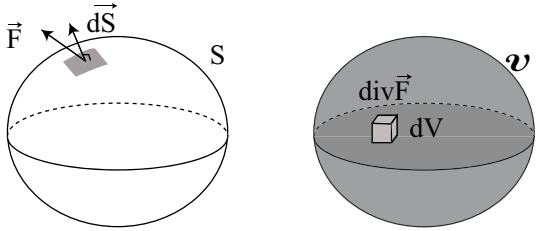


FIGURE 1.2 – Surface fermée et volume

Green-Ostrogradski qui permet de transformer le flux d'un champ vectoriel sur une surface fermée par une intégrale de volume.

Propriété :

Pour un champ vectoriel $\vec{F}(M)$, Le théorème de Green-Ostrogradski transforme le flux de champ sur une surface fermée en une intégrale volumique dans le volume contenu dans la surface fermée :

$$\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{F} d\mathcal{V}$$

où :

- $\mathcal{V}$ est le volume ;
- S est la surface frontière de $\mathcal{V}$
- $d\vec{S}$ est le vecteur normal à la surface, dirigé vers l'extérieur et de norme égale à l'élément de surface qu'il représente.

Pour une distribution volumique de charge ρ, l'écriture du théorème de Gauss devient :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V}$$

Le théorème de Green-Ostrogradski permet de tout ramener à une seule intégrale de volume :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{E} d\mathcal{V} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V} \quad \text{soit} \quad \iiint_{\mathcal{V}} (\operatorname{div} \vec{E} - \rho/\varepsilon_0) d\mathcal{V} = 0$$

La surface fermée et son volume associé étant quelconque, on en déduit l'équation de Maxwell-Gauss : $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$.

Définition :

L'équation de **Maxwell-Gauss** relie une source de champ électrique : la charge volumique ρ au vecteur champ électrique $\vec{E}$ à partir de l'opérateur divergence :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

où $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}$ F.m^{-1} est la permittivité du vide

b) Opérateur divergence

Définition :

L'opérateur divergence représente le flux par unité de volume d'un vecteur au travers d'une surface fermée infinitésimale (pour plus de détail, voir annexe 1 -). En géométrie cartésienne, l'opérateur divergence s'écrit :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

La figure 1.3 représente quelque cas usuels associés à différentes valeurs de $\operatorname{div} \vec{E}$. En fonction de la forme locale des lignes de champ, il est possible d'attribuer un sens au signe de l'opérateur divergence.

- $\operatorname{div} \vec{E} > 0$ correspond à un flux de $\vec{E}$ sortant du volume infinitésimal ;
- $\operatorname{div} \vec{E} < 0$ correspond à un flux de $\vec{E}$ rentrant du volume infinitésimal ;
- $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ correspond à une conservation du flux dans le volume infinitésimal.

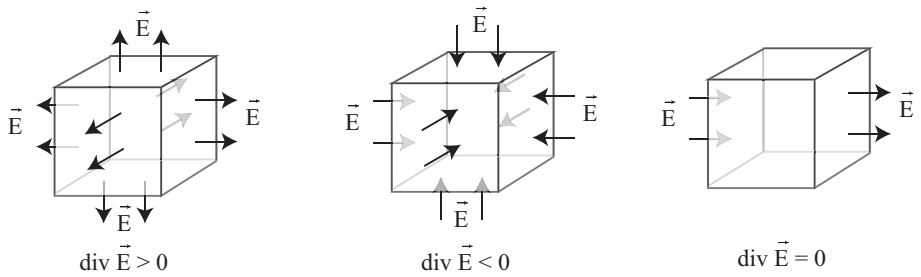


FIGURE 1.3 – Illustrations simplistes de l'opérateur divergence.

L'opérateur divergence dépend du système de coordonnées et ne prend une forme simple qu'en géométrie cartésienne. Il sera donné si nécessaire pour des repères cylindrique ou sphérique. En coordonnées cylindriques, il s'écrit :

$$\operatorname{div}\vec{\mathrm{U}} = \frac{1}{r}\frac{\partial r\mathrm{U}_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{U}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathrm{U}_z}{\partial z}$$

Pour les coordonnées sphériques :

$$\operatorname{div}\vec{\mathrm{U}} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2\mathrm{U}_r}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \sin\theta\mathrm{U}_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \mathrm{U}_\phi}{\partial \varphi}$$

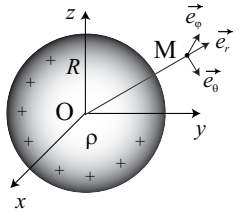
Remarque 1 :

L'équation locale de Maxwell-Gauss est valable même si la charge dépend du temps : $\rho(\mathrm{M},t)$, tandis que l'équation intégrale n'est valable que dans le régime statique ou bien revient à supposer une transmission instantanée des fluctuations des charges au point d'observation.

La mise en forme locale des équations par Maxwell a conduit à établir que les champs se propagent (voir les chapitres suivants) et que les interactions électromagnétiques ne sont pas instantanées. Décrire les interactions physiques par des champs plutôt que par des forces est fondamental pour comprendre leur caractère non instantanée. Ainsi, la relativité générale s'appuie sur la notion de champ gravitationnel (et non plus de force gravitationnelle) et conduit à définir des ondes gravitationnelles qui se propagent avec une vitesse finie (la vitesse de la lumière). Contrairement à ce que peut laisser penser la loi de gravitation universelle, l'attraction gravitationnelle entre deux masses n'est pas instantanée.

Exemple 1

On considère une boule chargée uniformément en volume. 1 - Déterminer le champ électrique à l'intérieur de la sphère.
2 - En admettant la continuité du champ électrique, déterminer le champ à l'exterieur de la sphère.



Données :
$\operatorname{div}\vec{\mathrm{U}} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2\mathrm{U}_r}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \sin\theta\mathrm{U}_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \mathrm{U}_\phi}{\partial \varphi}$

Pour s'entraîner : exercice **??**

1 - Considérons un point M quelconque à l'intérieur de la boule, tout plan contenant OM est un plan de symétrie des charges, on en déduit que le champ $\vec{\mathrm{E}}(\mathrm{M})$ appartient à l'intersection de ces plans : $\vec{\mathrm{E}}(\mathrm{M}) = \mathrm{E}_r(r,\theta,\phi)\,\vec{e}_r$.
La distribution de charge étant invariante par rotation selon θ et ϕ, on en déduit que

$$\vec{\mathrm{E}}(\mathrm{M}) = \mathrm{E}_r(r)\,\vec{e}_r$$

Appliquons l'équation de Maxwell-Gauss, seul le terme radial E_r est non nul.

$$\operatorname{div}\vec{\mathrm{E}} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2\mathrm{E}_r}{\partial r} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

La résolution de cette équation conduit à :

$$\frac{\partial r^2\mathrm{E}_r(r)}{\partial r} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}r^2 \quad \text{soit} \quad r^2\mathrm{E}_r(r) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{r^3}{3} + \mathrm{C^{te}}$$

d'où $$\mathrm{E}_r(r) = \tfrac{\rho}{\varepsilon_0}\tfrac{r}{3} + \mathrm{C^{te}}/r^2$$

Le champ ne pouvant diverger en $r \to 0$, on en déduit que la constante d'intégration est nulle :

$$\mathrm{E}_r(r) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{r}{3}$$

Le champ est identique à celui trouvé avec le théorème de Gauss (cf. chap. **??**).

2 - À l'extérieur de la sphère, il n'y a pas de charge volumique. L'équation de Maxwell-Gauss s'écrit : $\operatorname{div}\vec{\mathrm{E}} = 0$. On obtient donc :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 \mathrm{E}_r(r)}{\partial r} = 0 \quad \text{soit} \quad r^2\mathrm{E}_r(r) = \mathrm{C}$$

En isolant le champ, il vient :

$$\mathrm{E}_r(r) = \frac{\mathrm{C}}{r^2}$$

En utilisant la continuité du champ électrique :

$$\mathrm{E}_r(\mathrm{R}) = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{R}^2} = \rho\mathrm{R}/3\varepsilon_0 \quad \text{soit} \quad \mathrm{C} = \rho\mathrm{R}^3/3\varepsilon_0$$

Le champ à l'extérieur de la sphère vaut donc :

$$\mathrm{E}_r(r) = \frac{\rho\mathrm{R}^3}{3\varepsilon_0 r^2} = \frac{4\pi\mathrm{R}^3/3 \times \rho}{4\pi r^2} = \frac{q}{4\pi r^2}$$

On retrouve bien le champ associé à une charge ponctuelle.

2 - Équation de Maxwell-Thomson

Le champ magnétique est dit à flux conservatif. C'est-à-dire que son flux à travers une surface fermée est nulle :

$$\Phi_{\mathrm{S}}(\vec{\mathrm{B}}) = \oiint_{\mathrm{S}} \vec{\mathrm{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}} = 0$$

Ainsi, en utilisant le théorème de Green-Ostrogradski, le flux nul du champ $\vec{\mathrm{B}}$ sur toute surface fermée conduit à ce que pour tout volume :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div}\vec{\mathrm{B}}\,\mathrm{dV} = 0$$

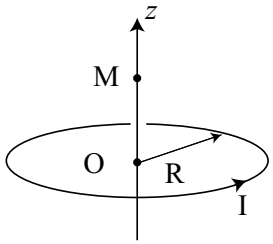
Cette propriété devient localement l'équation de Maxwell-Thomson : $\operatorname{div}\vec{\mathrm{B}} = 0$.

Définition :

L'équation de Maxwell-Thomson (également appelée Maxwell-flux) traduit localement le fait que le champ magnétique est à flux conservatif : $\operatorname{div}\vec{\mathrm{B}} = 0$.

Exemple 2

On considère une spire située dans le plan horizontal, de centre O, d'axe Oz, de rayon a, parcourue par un courant I_0. La norme du champ magnétique en un point de l'axe Oz, de côte z tel que $z \gg a$ vaut :



$$\mathrm{B}(\mathrm{M} \in \mathrm{O}z) = \frac{\mu_0 \mathrm{I}}{2}\frac{a^2}{z^3}$$

1 - Justifier précisément la direction du champ pour un point de l'axe Oz.

2 - Dans un plan contenant Oz, tracer l'allure des lignes de champ.

On considère un point M repéré en coordonnées cylindriques (r,θ,z) au voisinage de l'axe. On cherche à déterminer une expression approchée du champ magnétique au point M.

3 - Montrer que sur la base locale des coordonnées cylindriques, une des composantes de $\vec{\mathrm{B}}(\mathrm{M})$ est nulle.

4 - Pourquoi peut on assimiler la composante axiale $\mathrm{B}_z(\mathrm{M})$ à $\mathrm{B}(z,r=0)$

5 - Que vaut le flux du champ magnétique à travers une surface fermée ? Quelle est l'équation locale associée ?

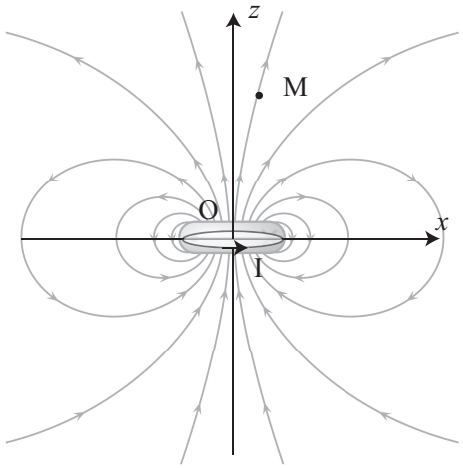
6 - Déterminer au voisinage de l'axe la composante radiale du champ magnétique. Commenter

Données : $\operatorname{div}\vec{\mathrm{U}} = \frac{1}{r}\frac{\partial r\mathrm{U}_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{U}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathrm{U}_z}{\partial z}$

Pour s'entraîner : exercice **??**

1 - Tout plan contenant Oz est plan d'antisymétrie pour le courant. On en déduit que pour un point M de l'axe Oz, le champ $\vec{\mathrm{B}}(\mathrm{M})$ est porté par $\vec{e}_z$.

2 - Une spire parcourue par un courant peut être assimilée à un dipôle, l'allure des lignes de champ est de la forme ci-dessous.



3 - Pour un point en dehors de l'axe, le plan $(\mathrm{M}, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan d'antisymétrie pour le courant, le champ magnétique est donc contenu dans ce plan, on en déduit que le champ n'a aucune composante selon $\vec{e}_\theta$:

$$\vec{\mathrm{B}}(\mathrm{M}) \cdot \vec{e}_\theta = 0$$

4 - D'après l'allure des lignes de champ, au voisinage de l'axe le champ est principalement selon Oz. Pour un point peu éloigné de l'axe, la faible courbure des lignes de champ permettent de supposer que le champ en M est voisin de celui de l'axe.

5 - Le champ magnétique est à flux conservatif, son flux à travers une surface fermée est nulle. L'équation locale associée est $\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{B}} = 0$.

6 - En utilisant la formule proposée, on en déduit que :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial r \mathrm{B}_r}{\partial r} + \frac{\partial \mathrm{B}_z}{\partial z} = 0$$

En assimilant le champ longitudinal à la valeur obtenue sur l'axe Oz, on obtient :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial r \mathrm{B}_r}{\partial r} \approx -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mu_0 \mathrm{I}}{2}\frac{a^2}{z^3}\right) \approx \frac{3\mu_0 \mathrm{I}}{2}\frac{a^2}{z^4}$$

L'intégration de cette équation donne :

$$\mathrm{B}_r(r,z) \approx \frac{3\mu_0 \mathrm{I}}{4}\frac{a^2 r}{z^4}$$

La contribution radiale est d'autant plus importante que la distance r à l'axe Oz est importante. Cela se traduit sur la figure ci-dessus par une inclinaison des lignes de champ de plus en plus prononcée à mesure que l'on s'éloigne de l'axe Oz.

3 - Équation de conservation de la charge

a) Démonstration 1D

Considérons un barreau de faible diamètre devant sa longueur soumis à une différence de potentiel entre ses extrémités. On note $j(x,t)$ la densité de courant à l'abscisse x à l'instant t. On note $\rho(x,t)$ la densité volumique de charge (cf. fig. 1.4).

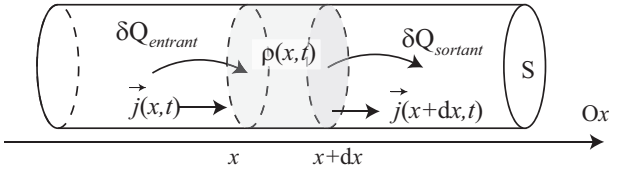


FIGURE 1.4 – Bilan de charges à une dimension.

Appliquons la conservation de la charge à une tranche de largeur dx pendant un intervalle de temps dt. La charge de cette tranche évolue durant l'intervalle de temps dt du fait que des charges entrent dans la zone ($\delta \mathrm{Q}_{entrant}$)) ou sorte ($\delta \mathrm{Q}_{entrant}$) :

$$\delta \mathrm{Q}(t + \mathrm{d}t) - \delta \mathrm{Q}(t) = \delta \mathrm{Q}_{entrant} - \delta \mathrm{Q}_{sortant}$$

La charge contenue dans la tranche d'épaisseur dx s'écrit :

$$\delta \mathrm{Q}(t) = \rho(x,t)\mathrm{S}\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \delta \mathrm{Q}(t + \mathrm{d}t) = \rho(x,t + \mathrm{d}t)\mathrm{S}\mathrm{d}x$$

Les charges entrantes et sortantes s'écrivent en fonction de la densité de courant :

$$\delta \mathrm{Q}_{entrant} = j(x,t)\mathrm{S}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \delta \mathrm{Q}_{sortant} = j(x + \mathrm{d}x,t)\mathrm{S}\mathrm{d}t$$

On obtient après division par $\mathrm{S}\mathrm{d}x \times \mathrm{d}t$:

$$\frac{\rho(x,t + \mathrm{d}t) - \rho(x,t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{j(x + \mathrm{d}x,t) - j(x,t)}{\mathrm{d}x}$$

On reconnaît un taux d'accroissement temporel pour la charge volumique et spatial pour la densité de courant. Ainsi dans la limite où $\mathrm{d}x \to 0$ et $\mathrm{d}t \to 0$, on obtient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x} \quad \text{soit} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0$$

b) Généralisation 3D

En 3 dimensions, il suffit de rajouter les flux selon Oy et Oz, pour aboutir à l'équation locale de conservation de la charge en géométrie cartésienne :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}}_{\operatorname{div} \vec{j}} = 0$$

Définition :

La conservation de la charge se traduit localement par l'équation suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

où ρ est la charge volumique et $\vec{j}$ le vecteur densité de courant.

En utilisant la signification de l'opérateur divergence, on remarque que si $\operatorname{div} \vec{j} < 0$, cela signifie que localement, sur un volume infinitésimal, le flux de charge est négatif, c'est-à-dire qu'il y a plus de charges qui arrivent que de charges qui partent. On en déduit une augmentation de la charge en fonction du temps soit $\partial \rho / \partial t > 0$.

II. Opérateur rotationnel

1 - Équation de Maxwell-Faraday

a) Théorème de Stokes

La Loi de Faraday relie la force électromotrice apparaissant dans un circuit électrique $\mathcal{C}$ en raison des fluctuations temporelles du champ magnétique à travers la surface S de ce circuit :

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{S}}(\vec{\mathrm{B}})}{\mathrm{d}t}$$

Or la force électromotrice correspond à une circulation du champ électrique :

$$e = \oint_{\mathcal{C}} \vec{\mathrm{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

La loi de Faraday peut donc s'écrire sous la forme intégrale suivante :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{\mathrm{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint_{\mathrm{S}} \vec{\mathrm{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}$$

Un contour fermée et orienté définit sans ambiguïté une surface (cf. fig. 1.5). En analyse vectorielle, l'opérateur rotationnel permet de transformer une intégrale sur un contour fermé en une intégrale sur la surface associée au contour fermée.

Définition :

En analyse vectorielle, le théorème de Stokes, affirme l'égalité entre l'intégrale du rotationnel d'un champ vectoriel sur un contour fermé et le flux de ce champ à travers la surface définie par le contour (cf. fig. 1.5)

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{\mathrm{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \iint_{\mathrm{S}} \vec{\mathrm{rot}}\, \vec{\mathrm{F}} \cdot d\vec{\mathrm{S}}$$

où :

- $\mathcal{C}$ est le contour fermé ;
- S est la surface définie par $\mathcal{C}$;
- $\mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}$ est le vecteur normal à la surface, dirigé vers l'extérieur et de norme égale à l'élément de surface qu'il représente.

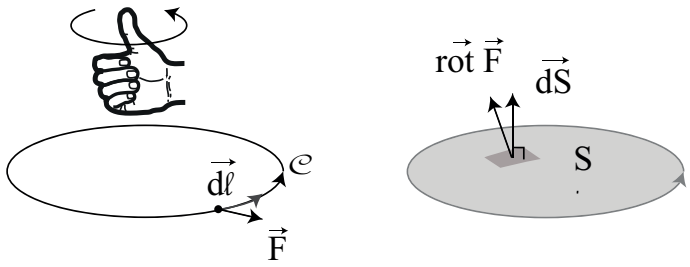


FIGURE 1.5 – Contour fermé orienté et surface associée.

L'utilisation du théorème de Stokes permet de ne faire apparaître que des intégrales de surface. Les surfaces choisies étant immobiles dans le référentiel d'étude, il est possible d'intervertir dérivation et intégrale :

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{\mathrm{rot}}\, \vec{\mathrm{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint_{\mathrm{S}} \vec{\mathrm{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}} = -\iint_{\mathrm{S}} \frac{\partial \vec{\mathrm{B}}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}$$

Cette relation est valable pour tout type de circuit $\mathcal{C}$ de surface S. L'équation de Maxwell-Faraday traduit l'égalité des intégrandes :

$$\vec{\mathrm{rot}}\, \vec{\mathrm{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathrm{B}}}{\partial t}$$

Définition :

La loi de Maxwell-Faraday relie une source possible de champ électrique : une variation temporelle de champ magnétique par l'opérateur rotationnel :

$$\vec{\mathrm{rot}}\, \vec{\mathrm{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathrm{B}}}{\partial t}$$

b) Expression de l'opérateur

Définition :

L'opérateur rotationnel représente la circulation par unité de surface d'un vecteur sur un contour fermé infinitésimal. En géométrie cartésienne, l'opérateur rotationnel s'écrit :

$$\vec{\mathrm{rot}}\, \vec{\mathrm{E}} = \left(\frac{\partial \mathrm{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{E}_y}{\partial z}\right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial \mathrm{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{E}_z}{\partial x}\right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial \mathrm{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{E}_x}{\partial y}\right) \vec{e}_x$$

L'opérateur rotationnel peut s'écrire comme un produit vectoriel entre l'opérateur de dérivation et le vecteur utilisé en coordonnées cartésiennes [1] :

$$\vec{\mathrm{rot}}\, \vec{\mathrm{E}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \mathrm{E}_x \end{matrix} \begin{matrix} \mathrm{E}_x \\ \mathrm{E}_y \\ \mathrm{E}_z \end{matrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathrm{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{E}_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathrm{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{E}_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathrm{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{E}_x}{\partial y} \end{vmatrix}$$

La valeur de $\vec{\mathrm{rot}}\, \vec{\mathrm{E}}$ renseigne sur la rotation des lignes de champ. Les lignes de champ s'enroule de manière directe autour de l'axe du vecteur $\vec{\mathrm{rot}}\, \vec{\mathrm{E}}$. L'utilisation de sa main droite permet de relier l'axe du rotationnel aux lignes de champ

1. Tout comme l'opérateur divergence, l'expression de l'opérateur rotationnel dépend du système de coordonnées utilisé.

(cf. fig 1.6). Il est également possible d'appréhender cet opérateur comme une intégrale de contour par unité de surface (cf. annexe 2 -).

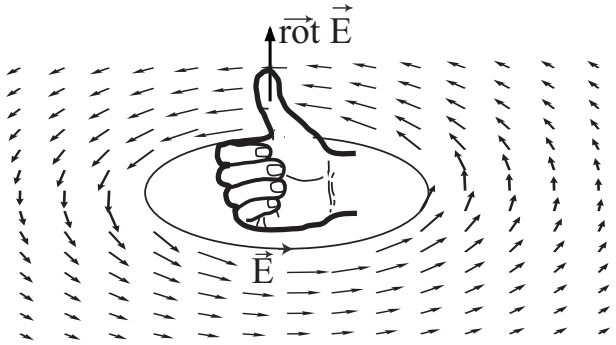


FIGURE 1.6 – Illustration de l'opérateur rotationnel.

c) Symétrie

L'équation de Maxwell-Faraday $\vec{\text{rot}}\,\vec{\text{E}} = -\dfrac{\partial \vec{\text{B}}}{\partial t}$ relie une variation temporelle de $\vec{\text{B}}$ au champ électrique par un produit vectoriel dû à l'opérateur $\vec{\text{rot}}$. Les plans de symétrie pour l'un sont donc inversé pour l'autre.

Propriétés :

- Tout plan de symétrie du champ magnétique $\vec{\text{B}}$ est un plan d'antisymétrie du champ électrique généré par $\vec{\text{B}}$.
- Tout plan d'antisymétrie du champ magnétique $\vec{\text{B}}$ est un plan de symétrie du champ électrique généré par $\vec{\text{B}}$.

Exemple 3

On considère un fil étiré sur une longueur L parcouru par un courant $i(t) = \text{I}_0 \cos \omega t$.

1 - À quelle(s) condition(s), le champ magnétique engendré par le fil peut être obtenu par application du théorème d'Ampère ? On obtient alors

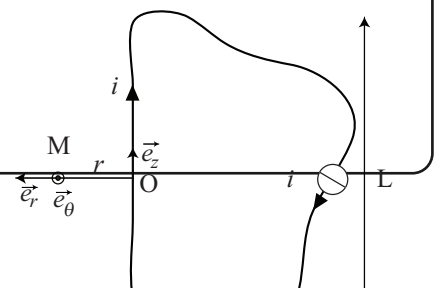
$$\vec{\text{B}}(\text{M},t) = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi r}\,\vec{e}_\theta$$

2 - Déterminer l'orientation du champ électrique et ses invariances.

3 - En déduire le champ électrique dans une zone de l'espace respectant 1.

Données :

$$\vec{\text{rot}}\,\vec{\text{U}} = \Big(\frac{1}{r}\frac{\partial \text{U}_z}{\partial \theta} - \frac{\partial \text{U}_\theta}{\partial z}\Big)\vec{e}_r + \Big(\frac{\partial \text{U}_r}{\partial z} - \frac{\partial \text{U}_z}{\partial r}\Big)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\Big(\frac{\partial r\text{U}_\theta}{\partial r} - \frac{\partial \text{U}_r}{\partial \theta}\Big)\vec{e}_z$$



Pour s'entraîner : exercice **??**

1 - Le théorème d'Ampère nécessite l'approximation d'un fil quasi-infini, valable pour $r << h$ et M loin des bords. Pour une variation temporelle du courant, il faut que la période des fluctuations de courant soit très supérieure à la durée de propagation des ondes jusqu'au point d'observation

d'où $$\frac{2\pi}{\omega} >> \frac{r}{c}$$

2 - Le plan $(\text{M}, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est un plan de symétrie du champ magnétique. Ce dernier dépendant du temps, il est source d'un champ électrique. On en déduit qu'il s'agit d'un plan d'antisymétrie du champ électrique, ainsi : $\vec{\text{E}}(\text{M}) = \text{E}_z(r,\theta,z)\,\vec{e}_z$. Le champ magnétique est invariant par rotation selon θ et translation selon z. On en déduit que : $\vec{\text{E}}(\text{M}) = \text{E}_z(r)\,\vec{e}_z$.

3 - Le rotationnel se simplifie alors en : $\vec{\text{rot}}\,\vec{\text{E}} = -\dfrac{\partial \text{E}_z}{\partial r}\,\vec{e}_\theta$.

L'équation de Maxwell-Faraday selon $\vec{e}_\theta$ permet d'écrire : $-\dfrac{\partial \text{E}_z}{\partial r} = -\dfrac{\partial \text{B}}{\partial t}$

soit $\dfrac{\partial \text{E}_z}{\partial r} = -\dfrac{\mu_0 \text{I}_0 \omega \sin \omega t}{2\pi r}$ d'où $\text{E}_z(r) = -\dfrac{\mu_0 \text{I}_0 \omega \sin \omega t}{2\pi} \ln r + \text{C}^{\text{te}}$

En coordonnées cylindriques, il est de coutume de fixer le champ nul à une distance arbitraire, que l'on notera ici d. Ainsi le champ prend la forme suivante :

$$\text{E}_z(r,t) = -\frac{\mu_0 \text{I}_0 \omega \sin \omega t}{2\pi} \ln \frac{r}{d}$$

J.B

Le fait que le champ électrique ne soit par borné est dû au domaine de de validité de la modélisation. Soit a le rayon du fil, la modélisation filiforme conduit à $r \gg a$. L'ARQS impose également : $r \ll c/\omega$.

2 - Équation de Maxwell-Ampère, statique

Le théorème d'Ampère relie la circulation d'un champ magnétique sur un contour au courant enlacé par ce contour :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{\mathrm{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 \mathrm{I}_{\text{enlacé}}$$

Cette équation est valable pour un courant constant (ou lentement variables ARQS). En utilisant l'expression du courant volumique, il vient, avec S la surface définie par le contour $\mathcal{C}$:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{\mathrm{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 \iint_{\mathrm{S}} \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}$$

L'utilisation du théorème de Stokes permet d'obtenir une version locale :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{\mathrm{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \iint_{\mathrm{S}} \vec{\mathrm{rot}}\, \vec{\mathrm{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}} = \mu_0 \iint_{\mathrm{S}} \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}} \quad \text{soit} \quad \iint_{\mathrm{S}} (\vec{\mathrm{rot}}\, \vec{\mathrm{B}} - \mu_0 \vec{j}) \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}} = 0$$

L'utilisation d'un contour quelconque permet de conclure que $\vec{\mathrm{rot}}\, \vec{\mathrm{B}} = \mu_0 \vec{j}$.

Définition :

La loi de Maxwell-Ampère *statique* s'écrit

$$\vec{\mathrm{rot}}\, \vec{\mathrm{B}} = \mu_0 \vec{j}$$

où $\vec{j}$ est le vecteur densité de courant. En dehors des régimes quasi-stationnaires, il est nécessaire d'ajouter un terme supplémentaire pour valider l'équation de la charge (cf. le §2 -).

Maxwell employait des illustrations mécaniques pour comprendre les liens entre des phénomènes électromagnétiques. Ainsi, il interprète la formation d'un champ magnétique en présence d'un courant électrique comme des tourbillons (hexagones) entourés de sortes de roulements à billes. Le courant électrique est associé au déplacement des billes qui met en rotation les tourbillons magnétiques. Tiré de Maxwell, *On physical lines of force* (1861).

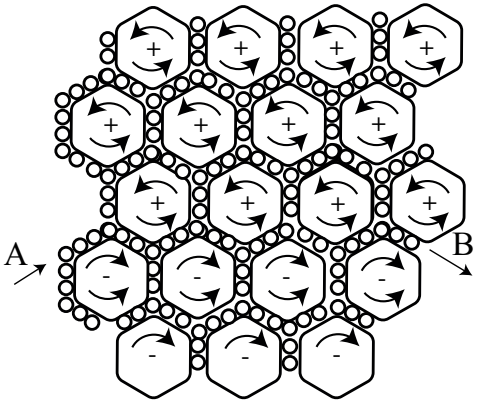
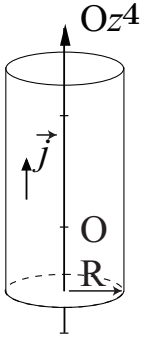


FIGURE 1.7 – Tourbillons magné-

Exemple



Un cylindre infini d'axe Oz et de rayon R est parcouru par une courant uniforme et permanent de densité $\vec{j} = j\,\vec{e}_z$.

1 - Justifier que le champ magnétique en un point M de coordonnées (r,θ,z) peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{\mathrm{B}}(\mathrm{M}) = \mathrm{B}(r)\,\vec{e}_\theta$$

2 - À l'aide de l'équation de Maxwell-Ampère, déterminer le champ magnétique créé à l'intérieur du cylindre.

Données :

$$\vec{\mathrm{rot}}\, \vec{\mathrm{U}} = \Big(\frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{U}_z}{\partial \theta} - \frac{\partial \mathrm{U}_\theta}{\partial z}\Big)\vec{e}_r + \Big(\frac{\partial \mathrm{U}_r}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{U}_z}{\partial r}\Big)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\Big(\frac{\partial r\mathrm{U}_\theta}{\partial r} - \frac{\partial \mathrm{U}_r}{\partial \theta}\Big)\vec{e}_z$$

Pour s'entraîner : exercices **??**, **??**

1 - Le champ magnétique est crée ici par une densité de courant. Le plan $(\mathrm{M}\,\vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie pour le vecteur $\vec{j}$, on en déduit que que $\vec{\mathrm{B}}$ est perpendiculaire à ce plan : $\vec{\mathrm{B}}(\mathrm{M}) = \mathrm{B}(\mathrm{M})\,\vec{e}_\theta$. La densité de courant $\vec{j}$ est invariante par translation selon z et rotation selon θ, on en déduit que $\mathrm{B}(\mathrm{M}) = \mathrm{B}(r)$ puis $\vec{\mathrm{B}}(r,\theta,z) = \mathrm{B}(r)\,\vec{e}_\theta$.

2 - La simplification du rotationnel permet d'écrire :

$$\vec{\mathrm{rot}}\, \vec{\mathrm{B}} = \frac{1}{r}\frac{\partial r\mathrm{B}_\theta}{\partial r}\,\vec{e}_z \quad \text{soit} \quad \frac{1}{r}\frac{\partial r\mathrm{B}_\theta}{\partial r} = \mu_0 j$$

Après multiplication par r, l'intégration de cette équation par rapport à r donne :

$$r \times \mathrm{B}_\theta(r,t) = \mu_0 j \frac{r^2}{2} + \mathrm{C^{te}} \quad \text{soit} \quad \mathrm{B}_\theta(r,t) = \mu_0 j \sin\omega t \frac{r}{2} + \frac{\mathrm{C^{te}}}{r}$$

Le champ magnétique ne pouvant diverger en $r \to 0$ (sinon, il y aurait une énergie magnétique infinie), on obtient $\mathrm{C^{te}} = 0$.

III. Composition des opérateurs

1 - Propriétés d'analyse vectorielle

Propriété :

La composition des opérateurs div et $\vec{\text{rot}}$ suivent les lois suivantes :

- $\mathrm{div}\,\vec{\text{rot}}\,\vec{\mathrm{E}} = 0$
- $\vec{\text{rot}}\,\vec{\text{grad}}\,\mathrm{V} = \vec{0}$
- $\mathrm{div}\,\vec{\text{grad}}\,\mathrm{V} = \Delta\mathrm{V}$ où Δ. est l'opérateur Laplacien défini en coordonnées cartésiennes pas :

$$\Delta\mathrm{V} = \frac{\partial^2\mathrm{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathrm{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathrm{V}}{\partial z^2}$$

L'opérateur $\vec{\nabla}$ (nommé nabla pour sa ressemblance avec une harpe hébraïque) est défini en coordonnées cartésiennes par :

$$\vec{\nabla}. = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$$

Cet opérateur permet d'écrire l'opérateur rotationnel et l'opérateur divergence sous les formes suivantes : $\vec{\text{rot}}\,\vec{\mathrm{X}} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\mathrm{X}}$ et $\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{X}} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathrm{X}}$.
L'utilisation de l'opérateur nabla permet de retrouver les relations vectorielles de composition des opérateurs : $\mathrm{div}\,\vec{\text{rot}}\,\vec{\mathrm{X}} = \vec{\nabla}.(\vec{\nabla} \wedge \vec{\mathrm{X}})$.

Par propriété du produit mixte, $\vec{\nabla}.(\vec{\nabla} \wedge \vec{\mathrm{X}}) = 0$. On retrouve bien $\mathrm{div}\,\vec{\text{rot}}\,\vec{\mathrm{X}} = 0$
Pour la relation $\vec{\text{rot}}\,\vec{\text{grad}}\,f = \vec{0}$, l'utilisation de l'opérateur ∇ donne :

$$\vec{\text{rot}}\,\vec{\text{grad}}\,f = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} f)$$

Le produit vectoriel de deux vecteur étant nul, on retrouve bien $\vec{\text{rot}}\,\vec{\text{grad}}\,f = 0$
De la même façon, $\mathrm{div}\,\vec{\text{grad}}\,\mathrm{V} = \nabla \cdot \nabla\mathrm{V} = \nabla^2\mathrm{V} = \Delta\mathrm{V}$.

Remarque 2 :

L'opérateur ∇ est un outil pratique pour se rappeler les propriétés des opérateurs. Il convient toutefois de garder en mémoire que la géométrie conditionne l'écriture des opérateurs. Par exemple, en coordonnées cylindriques, l'écriture avec unique opérateur ∇ est impossible en raison de la dérivée radiale :

$$\vec{\text{grad}}\,f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}z \quad \text{et} \quad \mathrm{div}\,\vec{\mathrm{U}} = \frac{1}{r}\frac{\partial r\mathrm{U}_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{U}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathrm{U}_z}{\partial z}$$

2 - Équation de Maxwell-Ampère

a) Le problème statique

L'équation de Maxwell-Ampère ($\vec{\text{rot}}\,\vec{\mathrm{B}} = \mu_0\vec{j}$) établie à partir du théorème d'Ampère écrit sous forme locale de permet pas de vérifier l'équation de conservation de la charge ($\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{j} = 0$). En effet, les propriétés des opérateurs vectoriels assurent que $\mathrm{div}\,\vec{\text{rot}}\,\vec{\mathrm{B}} = 0$. En appliquant l'opérateur divergence à l'équation de Maxwell-Ampère, on obtient donc une équation qui contredit l'équation de conservation de la charge :

$$\mathrm{div}\,\vec{\text{rot}}\,\vec{\mathrm{B}} = \mu_0 \mathrm{div}\,\vec{j} = 0 \text{ au lieu de } \mathrm{div}\,\vec{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

Il est possible de rendre compatible toutes ces équations en rajoutant un terme à l'équation de Maxwell-Ampère. En effet, en utilisant l'équation de Maxwell-Gauss $\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{E}} = \rho/\varepsilon_0$, l'équation de conservation de la charge conduit à

$$\mathrm{div}\,[\vec{j} + \underbrace{\varepsilon_0\frac{\partial\vec{\mathrm{E}}}{\partial t}}_{\vec{j}_\mathrm{D}}] = 0$$

qui incite à définir une densité de courant $\vec{j}_{\mathrm{D}} = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{\mathrm{E}}}{\partial t}$, appelée courant de déplacement. On peut donc conclure qu'il existe deux sources possibles pour le champ magnétique : une distribution de courant ou une fluctuation temporelle de champ électrique.

Définition :

La loi de Maxwell-Ampère relie les densités de courants et les variations temporelles de champ électrique par l'opérateur rotationnel :

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{B}} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathrm{E}}}{\partial t}$$

b) Symétrie

L'équation de Maxwell-Ampère relie une variation temporelle de $\vec{\mathrm{E}}$ ou une densité de courant au champ magnétique par un produit vectoriel dû à l'opérateur $\vec{\mathrm{rot}}$. On obtient donc par le principe de Curie des plans de symétrie pour $\vec{\mathrm{E}}$ ou $\vec{j}$ inversés à ceux du champ magnétique $\vec{\mathrm{B}}$.

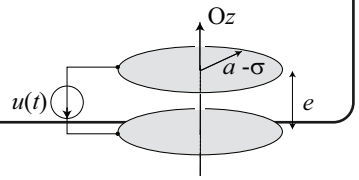
Propriétés :

- Tout plan de symétrie du champ électrique $\vec{\mathrm{E}}$ ou de la densité de courant est un plan d'antisymétrie du champ magnétique.
- Tout plan d'antisymétrie du champ électrique $\vec{\mathrm{E}}$ ou de la densité de courant est un plan de symétrie du champ magnétique.

On se propose de calculer dans l'exemple suivant le champ magnétique engendré par une fluctuation temporelle de champ électrique.

Exemple 5

Les armatures d'un condensateur plan sont deux disques de rayon a, distants de e, d'axe Oz. Le condensateur est soumis à une différence de potentiel $u(t) = \mathrm{U}_0 \cos \omega t$.



1 - À quelle(s) condition(s) le champ électrique s'écrit à l'intérieur du condensateur $\vec{\mathrm{E}} = \dfrac{\mathrm{U}_0}{e} \cos \omega t\, \vec{e}_z$.

2 - Justifier l'apparition d'un champ magnétique et déterminer son orientation.

3 - Déterminer l'expression du champ magnétique en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère.

Données :

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{U}} = \Big(\frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{U}_z}{\partial \theta} - \frac{\partial \mathrm{U}_\theta}{\partial z}\Big)\vec{e}_r + \Big(\frac{\partial \mathrm{U}_r}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{U}_z}{\partial r}\Big)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\Big(\frac{\partial r\mathrm{U}_\theta}{\partial r} - \frac{\partial \mathrm{U}_r}{\partial \theta}\Big)\vec{e}_z$$

Pour s'entraîner : exercice **??**

1 - Les disques peuvent être assimilés à deux plans infini si $e \ll a$.

2 - L'équation de Maxwell-Ampère stipule qu'une variation temporelle de champ électrique conduit à l'apparition d'un champ magnétique. Le plan $(\mathrm{M}, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est plan de symétrie pour le champ électrique, donc un plan d'antisymétrie pour le champ magnétique. On en déduit que $\vec{\mathrm{B}}(\mathrm{M}) = \mathrm{B}_\theta(r,\theta,z)\,\vec{e}_\theta$.

3 - La simplification du rotationnel permet d'écrire :

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{B}} = \frac{1}{r}\frac{\partial r\mathrm{B}_\theta}{\partial r}\,\vec{e}_z$$

Entre les armatures du condensateur, la densité de courant est nulle $\vec{j} = \vec{0}$. L'application de l'équation de Maxwell-Ampère conduit à

$$\frac{1}{r}\frac{\partial r\mathrm{B}_\theta}{\partial r} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial t} = -\frac{\mu_0\varepsilon_0\mathrm{U}_0\omega}{e}\sin\omega t$$

Après multiplication par r et intégration par rapport à r, il vient :

$$r \times \mathrm{B}_\theta = -\frac{\mu_0\varepsilon_0\mathrm{U}_0\omega}{e}\sin\omega t\frac{r^2}{2} + \mathrm{C^{te}} \quad \text{soit} \quad \mathrm{B}_\theta = -\frac{\mu_0\varepsilon_0\mathrm{U}_0\omega}{e}\sin\omega t\frac{r}{2} + \frac{\mathrm{C^{te}}}{r}$$

Le champ magnétique ne pouvant diverger en $r \to 0$ (sinon, il y aurait une énergie magnétique infinie), on obtient $\mathrm{C^{te}} = 0$.

3 - Extension de l'électrostatique

a) ARQS

Définition :
En électromagnétisme, l'approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS) consiste à considérer comme négligeable le temps de propagation des ondes électromagnétiques (OEM) devant la période de fluctuation de ses sources.

Le critère temporelle pour l'ARQS peut se décliner en comparant les distances mises en jeu. Pour un champ électromagnétique dépendant du temps selon une période temporelle T, la période spatiale associée λ vérifie $\lambda = c\mathrm{T}$ (où $c = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ désigne la vitesse de l'onde cf. chap. **??**). Tout observateur situé à une distance D d'un point quelconque des sources est dans le cadre de l'ARQS si

$$\mathrm{D} << \lambda$$

En ordre de grandeur, lors de manipulation en séance de Travaux Pratiques, si la fréquence du GBF est de $f = 3$ kHz, la longueur d'onde associée vaut :

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3.10^8}{3.10^3} = 1.10^5 \text{ m}$$

Ainsi, tant que la longueur des câbles utilisés pour un circuit est inférieur à 100 km, l'ARQS est valide. En revanche, pour des fréquences plus élevées, par exemple pour des téléphones portables, la fréquence utilisée est de l'ordre de $f = 3$ GHz, la longueur d'onde correspondante est :

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3.10^8}{3.10^9} = 0{,}3 \text{ m}$$

La longueur d'onde est comparable à la longueur des câbles utilisées en séance de Travaux pratiques, il est donc très difficile de faire de l'électronique sur une paillasse à cette fréquence puisqu'il faudrait tenir compte du temps de propagation du champ dans les fils. La tension ne serait pas la même en deux points d'un même fil électrique.

b) Maxwell-Faraday

Nous avions vu dans le chapitre sur l'électrostatique (cf. chap. **??**) que le champ électrique vérifie : $\vec{\mathrm{E}} = -\vec{\mathrm{grad}}\,\mathrm{V}$. Au regard des propriétés des opérateurs $\vec{\mathrm{grad}}$ et $\vec{\mathrm{rot}}$, cette équation n'est valable qu'en négligeant les fluctuations temporelles de champ magnétique. En effet, pour tout champ scalaire :

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{grad}}\,\mathrm{V} = \vec{\nabla} \wedge \nabla\mathrm{V} = \vec{0} \text{ au lieu de } \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathrm{B}}}{\partial t}$$

Propriété :
Lorsque les variations temporelles du champ magnétique sont négligeables, $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{E}} = \vec{0}$. Cette équation indique l'existence d'un potentiel V tel que :

$$\vec{\mathrm{E}} = -\vec{\mathrm{grad}}\,\mathrm{V}$$

La loi de Faraday n'est pas non plus compatible avec $\vec{\mathrm{E}} = -\vec{\mathrm{grad}}\,\mathrm{V}$. En effet, pour un circuit $\mathcal{C}$ plongé dans un champ magnétique variable, une f.e.m induite apparaît sous la forme :

$$e = \oint_{\mathcal{C}} \vec{\mathrm{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\frac{\mathrm{d}\Phi(\vec{\mathrm{B}})}{\mathrm{d}t}$$

Or, en utilisant l'expression $\vec{\mathrm{E}} = -\vec{\mathrm{grad}}\,\mathrm{V}$, l'intégrale sur un contour fermée est nécessairement nulle :

$$e = \oint_{\mathcal{C}} \vec{\mathrm{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\oint_{\mathcal{C}} \vec{\mathrm{grad}}\,\mathrm{V} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -(\mathrm{V(M)} - \mathrm{V(M)}) = 0$$

L'écriture du champ électrique en terme de potentiel est possible en utilisant le potentiel vecteur $\vec{\mathrm{A}}$ (cf. annexe. **??**).

c) Équation de Poisson

Dans l'ARQS : $\vec{\mathrm{E}} = -\vec{\mathrm{grad}}\,\mathrm{V}$, en utilisant l'équation de Maxwell-Gauss, il vient :

$$\mathrm{div}\,(-\vec{\mathrm{grad}}\,\mathrm{V}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

En utilisant les propriétés des opérateurs ($\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{grad}}\,. = \Delta.$), on en déduit l'équation de Poisson :

$$\Delta \mathrm{V} + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

Cette équation est très utilisée pour résoudre numériquement les problèmes d'électrostatique. Il est en effet plus facile de résoudre cette équation sur un champ scalaire $\mathrm{V}(\vec{r})$ que sur un champ vectoriel $\vec{\mathrm{E}}(\vec{r})$. Une méthode numérique est proposée annexe 3 -.

Exemple 6 Une distribution de charges présentant une symétrie sphérique autour d'un point O crée en un point M quelconque de l'espace situé à un distance $\mathrm{OM} = r$, un potentiel électrostatique de la forme

$$\mathrm{V}(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} e^{-r/a}$$

1 - Déterminer le champ électrique $\vec{\mathrm{E}}$.
2 - Calculer le flux sortant $\Phi(\mathrm{R})$ du champ $\vec{\mathrm{E}}$ à travers une sphère de rayon R centrée en O.
3 - En calculant $\Phi(0)$ et $\Phi(\infty)$, justifier que la distribution de charge est une charge $-q$ répartie dans tout l'espace associée à une charge q centrée sur O.
4 - Déterminer la distribution volumique de charge correspondante.
Données :

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$$

Pour s'entraîner : exercices **??**, **??**

1 - Par définition, $\vec{\mathrm{E}} = -\vec{\mathrm{grad}}\,\mathrm{V}$, on obtient donc

$$\vec{\mathrm{E}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Big(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{ar}\Big)e^{-r/a}\,\vec{e}_r$$

2 - En tout point de la sphère, $\vec{\mathrm{E}} \perp d\vec{\mathrm{S}}$. La norme de $\vec{\mathrm{E}}$ étant uniforme sur cette surface on obtient

$$\Phi(\mathrm{R}) = \mathrm{E}(\mathrm{R})\mathrm{S}$$

La surface d'une sphère de rayon R étant $4\pi\mathrm{R}^2$, on obtient

$$\Phi(\mathrm{R}) = 4\pi\mathrm{R}^2\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Big(\frac{1}{\mathrm{R}^2} + \frac{1}{a\mathrm{R}}\Big)e^{-\mathrm{R}/a}$$

soit

$$\Phi(\mathrm{R}) = \frac{q}{\varepsilon_0}\Big(1 + \frac{\mathrm{R}}{a}\Big)e^{-\mathrm{R}/a}$$

3 - Par application du théorème de Gauss, si $\mathrm{Q}(\mathrm{R})$ est la charge contenue dans une sphère de rayon R, alors

$$\Phi(\mathrm{R}) = \frac{\mathrm{Q}(\mathrm{R})}{\varepsilon_0}$$

Or

$$\Phi(0) = \frac{q}{\varepsilon_0} \text{ et } \Phi(\infty) = 0$$

On en conclut que la distribution de charge est une charge q centrée sur O associée à une charge $-q$ répartie dans tout l'espace.
4 - En appliquant l'équation de Poisson, il est possible de calculer la distribution volumique de charge : $\rho = -\varepsilon_0\Delta\mathrm{V}$. Après simplification, il vient :

$$\rho = \frac{-q}{4\pi r a^2}e^{-r/a}$$

Remarque 3 :
Hideki Yukawa (prix Nobel 1949) montra dans les années 1930 que ce type de potentiel permet d'expliquer l'interaction entre neutron par la présence de mésons qui sont des particules chargées 200 fois plus massives que les électrons. Ces particules sont considérées comme virtuelles tant leur durée de vie est courte ($< 10^{-8}$ s). Initialement, Hideki Yukawa avait nommé ces particules des « mésotrons », mais Werner Heisenberg, dont le père était professeur de grec à l'Université de Munich, lui fit remarquer que le terme grec mesos ne possédait pas de "tr", d'où le terme de **méson**.

d) Loi des nœuds

En négligeant la dépendance temporelle de la charge volumique, la loi de conservation de la charge dans l'ARQS devient : $\mathrm{div}\,\vec{j} = 0$. C'est-à-dire que le courant est à flux conservatif. On retrouve ainsi une expression locale de la loi des nœuds vue en électricité.

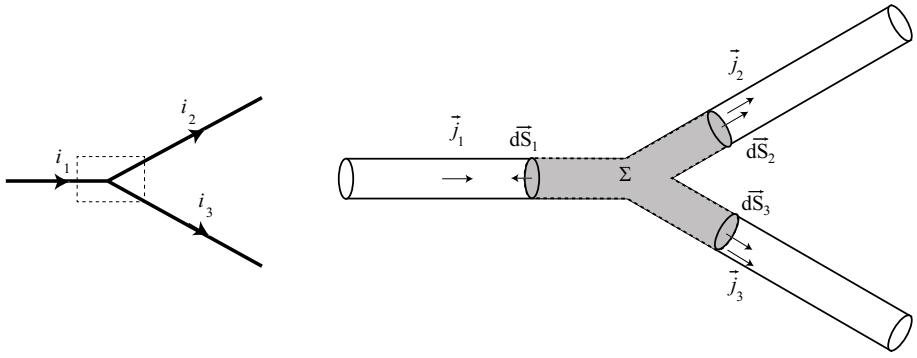


FIGURE 1.8 – Illustration de la loi des noeuds.

Sur la figure 1.8, considérons trois branches d'un circuit électrique, parcourues par les courant i_1, i_2 et i_3. Sur la surface fermée Σ, on a, dans l'ARQS :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}} = 0$$

Seules les contributions selon S_1, S_2 et S_3 sont non-nulles. En supposant la densité de courant uniforme sur chacune des surfaces et en tenant compte de l'orientation des vecteurs normaux, il vient :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}} = \underbrace{\iint_{\mathrm{S}_1} \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}_1}_{-j_1\mathrm{S}_1} + \underbrace{\iint_{\mathrm{S}_2} \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}_2}_{j_2\mathrm{S}_2} + \underbrace{\iint_{\mathrm{S}_3} \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}_3}_{j_3\mathrm{S}_3}$$

On en déduit que : $-j_1\mathrm{S}_1 + j_2\mathrm{S}_2 + j_3\mathrm{S}_3 = 0 \quad$ soit $\quad i_1 = i_2 + i_3$.

L'essentiel

Opérateurs

Les opérateurs vectorielles suivants s'écrivent en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{E}} = \left(\frac{\partial \mathrm{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{E}_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial \mathrm{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{E}_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial \mathrm{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{E}_x}{\partial y}\right)\vec{e}_x$$

$$\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{E}} = \frac{\partial \mathrm{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{E}_z}{\partial z}$$

$$\vec{\mathrm{grad}}\,\mathrm{V} = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\,\vec{e}_x + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\,\vec{e}_y + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\,\vec{e}_z$$

Équations de Maxwell

Maxwell-Gauss	$\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{E}} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$	Une distribution de charge crée un champ $\vec{\mathrm{E}}$.
Maxwell-Flux	$\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{B}} = 0$	$\vec{\mathrm{B}}$ est à flux conservatif.
Maxwell-Faraday	$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{E}} = -\dfrac{\partial \vec{\mathrm{B}}}{\partial t}$	Une variation temporelle de $\vec{\mathrm{B}}$ crée un champ $\vec{\mathrm{E}}$.
Maxwell-Ampère	$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{B}} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial \vec{\mathrm{E}}}{\partial t}$	Un courant volumique ou une variation temporelle de $\vec{\mathrm{E}}$ crée un champ $\vec{\mathrm{B}}$.

Composition des opérateurs

L'opérateur divergence appliqué à l'équation de Maxwell-Ampère donne l'équation de conservation de la charge :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{j} = 0$$

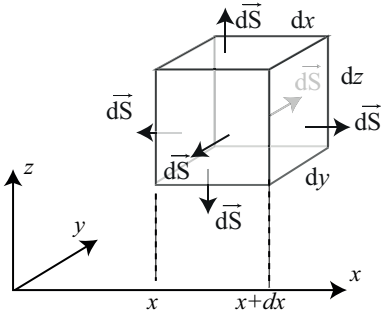
En négligeant les variations temporelles de charge, $\operatorname{div}\vec{j} = 0$ se traduit la loi des noeuds en électricité.
En électrostatique, $\vec{\operatorname{rot}}\,\vec{\mathrm{E}} = \vec{0}$, soit $\vec{\mathrm{E}} = -\vec{\operatorname{grad}}\,\mathrm{V}$. L'équation de Maxwell-Gauss en terme de potentiel donne l'équation de Poisson :

$$\operatorname{div}\vec{\mathrm{E}} = \rho/\varepsilon \quad \text{soit} \quad \Delta\mathrm{V} + \rho/\varepsilon_0 = 0$$

I. Opérateurs

1 - Opérateur divergence

En coordonnées cartésiennes, calculons le flux d'un champ $\vec{\mathrm{E}}(x,y,z)$ à travers un cube infinitésimal de côté $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$. Le cube étant de petite taille, le champ est supposé uniforme sur chaque face de sorte, par convention, le vecteur normal à la surface est dirigé vers l'extérieur, ainsi le flux est donné par :



$$\mathrm{d}\Phi = \underbrace{[\mathrm{E}_x(x+\mathrm{d}x,y,z) - \mathrm{E}_x(x,y,z)]\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z}_{\text{selon x}} + [\mathrm{E}_y(x,y+\mathrm{d}y,z) - \mathrm{E}_y(x,y,z)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z + [\mathrm{E}_z(x,y,z+\mathrm{d}z) - \mathrm{E}_z(x,y,z)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

En divisant par le volume infinitésimal $\mathrm{d}\mathcal{V} = \mathrm{d}x \times \mathrm{d}y \times \mathrm{d}z$, on fait apparaître le taux d'accroissement selon chaque direction :

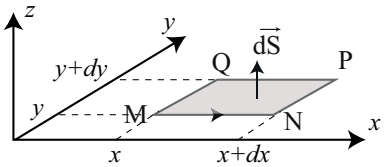
$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\mathcal{V}} = \frac{\mathrm{E}_x(x+\mathrm{d}x,y,z) - \mathrm{E}_x(x,y,z)}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{E}_y(x,y+\mathrm{d}y,z) - \mathrm{E}_y(x,y,z)}{\mathrm{d}y} + \frac{\mathrm{E}_z(x,y,z+\mathrm{d}z) - \mathrm{E}_z(x,y,z)}{\mathrm{d}z}$$

Par passage à la limite, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\mathcal{V}} = \frac{\partial \mathrm{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{E}_z}{\partial z} = \operatorname{div}\vec{\mathrm{E}}$$

2 - Opérateur rotationnel

Calculons la circulation du champ électrique sur un contour $\delta\mathcal{C}$ infinitésimal de côté $\mathrm{d}x \times dy$ dans le plan $\mathrm{O}xy$. On obtient en calculant dans l'ordre MNPQ :



$$\oint_{\delta\mathcal{C}} \vec{\mathrm{E}}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{E}_x(x,y,z)\mathrm{d}x + \mathrm{E}_y(x+\mathrm{d}x,y,z)\mathrm{d}y - \mathrm{E}_x(x,y+\mathrm{d}y,z)\mathrm{d}x - \mathrm{E}_y(x,y,z)\mathrm{d}y$$

Faisons apparaître un taux d'accroissement en factorisant par $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$:

$$\oint_{\delta\mathcal{C}} \vec{\mathrm{E}}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big(\frac{\mathrm{E}_x(x,y,z) - \mathrm{E}_x(x,y+\mathrm{d}y,z)}{\mathrm{d}y} + \frac{\mathrm{E}_y(x+\mathrm{d}x,y,z) - \mathrm{E}_y(x,y,z)}{\mathrm{d}x}\Big)$$

Par passage à la limite, on reconnaît l'expression des dérivées partielles ainsi que la surface infinitésimale seln $\mathrm{O}z$:

$$\oint_{\delta\mathcal{C}} \vec{\mathrm{E}}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} \underbrace{\approx}_{\mathrm{d}x\to 0,\mathrm{d}y\to 0} \overbrace{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}^{\mathrm{dS}}\Big(-\frac{\partial \mathrm{E}_x}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{E}_y}{\partial x}\Big)$$

Les dérivées partielles correspondent à l'expression du rotationnel selon $\mathrm{O}z$, on peut donc écrire pour cette surface orientée selon $+\vec{e}_z$:

$$\oint_{\delta\mathcal{C}} \vec{\mathrm{E}}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \vec{\operatorname{rot}}\,\vec{\mathrm{E}}\cdot\mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}$$

Un raisonnement similaire sur des contours orientés selon y et z aboutissent à l'expression du rotationnel comme une intégrale de contour surfacique.

3 - Résolution numérique

L'équation de Poisson $\Delta\mathrm{V} + \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$ se résout par intégration numérique en utilisant la méthode des éléments finis. En général, du point de vue numérique, il est toujours intéressant de résoudre une équation sur un potentiel plutôt que sur un champ vectoriel présentant plus d'inconnues.

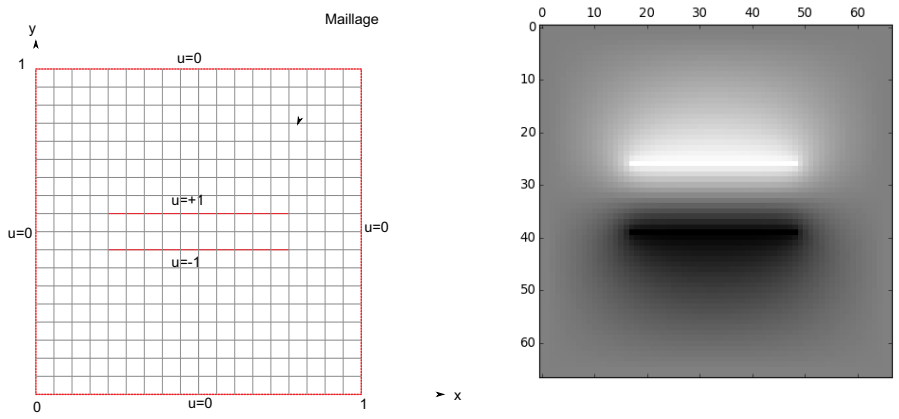


FIGURE 9 – Méthode des éléments finis appliquée à un condensateur plan.

En 2 dimensions, sur un maillage régulier de côté a, le potentiel peut être décrit comme une suite de valeurs indicés par i et j correspondant au numéro d'une cellule de calcul. Notons $\mathrm{V}(x,y)$ le potentiel et $\mathrm{V}_{i,j}$ son approximation numérique telle que :

$$\mathrm{V}(x = ia, y = ja) = \mathrm{V}_{i,j}$$

L'utilisation des formules de Taylor permettent d'approximer les valeurs des dérivées. Sur l'axe Ox, on peut écrire :

$$\mathrm{V}(x+a,y) = \mathrm{V}(x,y) + a\frac{\partial \mathrm{V}(x,y)}{\partial x}\frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{V}(x,y)}{\partial x^2} + \frac{a^3}{6}\frac{\partial^3 \mathrm{V}(x,y)}{\partial x^3} + o(a^3)$$

$$\mathrm{V}(x-a,y) = \mathrm{V}(x,y) - a\frac{\partial \mathrm{V}(x,y)}{\partial x} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{V}(x,y)}{\partial x^2} - \frac{a^3}{6}\frac{\partial^3 \mathrm{V}(x,y)}{\partial x^3} + o(a^3)$$

En sommant ces équations et en isolant la dérivée seconde, il vient :

$$\frac{\partial^2 \mathrm{V}(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\mathrm{V}(x+a,y) + \mathrm{V}(x-a,y) - 2\mathrm{V}(x,y)}{a^2} + o(a)$$

Ainsi, numériquement, la dérivée seconde en coordonnées cartésienne peut alors s'exprimer par la relation suivante :

$$\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial x^2} \approx \frac{\mathrm{V}_{i+1,j} + \mathrm{V}_{i-1,j} - 2\mathrm{V}_{i,j}}{a^2}$$

Une démonstration similaire sur Oy donne :

$$\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial y^2} \approx \frac{\mathrm{V}_{i,j+1} + \mathrm{V}_{i,j-1} - 2\mathrm{V}_{i,j}}{a^2}$$

La méthode de Jacobi est un principe de résolution consistant à ajouter une évolution temporelle et résoudre l'équation de diffusion suivante :

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} = \kappa \Delta \mathrm{V}$$

où $\kappa \in \mathbf{R}$ est une constante dont la valeur conditionne la convergence de la résolution numérique. On notera donc $\mathrm{V}^n[i,j]$ le potentiel approximé pour le pour le temps t_n :

$$\mathrm{V}^n_{i,j} \approx \mathrm{V}(x_i, y_i, t_n)$$

Approximons la dérivée temporelle :

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} \approx \frac{\mathrm{V}^{n+1}_{i,j} - \mathrm{V}^n_{i,j}}{\Delta t}$$

La résolution s'effectue alors de proche en proche avec l'équation itérative suivante :

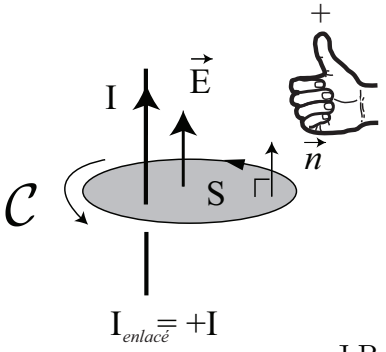
$$\mathrm{V}^{n+1}_{i,j} = \mathrm{V}^n_{i,j} + \frac{\kappa \Delta t}{a^2}\left(\mathrm{V}^n_{i+1,j} + \mathrm{V}^n_{i-1,j} + \mathrm{V}^n_{i,j+1} + \mathrm{V}^n_{i,j-1} - 4\mathrm{V}^n_{i,j}\right)$$

Dans l'exemple proposé, (cf. fig. 9), la résolution numérique utilise comme conditions limites, un potentiel nul sur le pourtour du domaine, un potentiel arbitraire +1 sur une armature et -1 sur l'autre.

4 - Théorème d'Ampère généralisé

Le théorème d'Ampère généralisé relie la circulation de champ magnétique $\vec{\mathrm{B}}$ sur un contour fermé et orienté $\mathcal{C}$ au courant enlacé par ce contour et à la variation temporelle de flux de champ électrique à travers la surface définir par le contour fermée :

$$\mathrm{C}_{\mathcal{C}}(\vec{\mathrm{B}}) = \mu_0 \mathrm{I}_{\text{enlacé}} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{S}}(\vec{\mathrm{E}})}{\mathrm{d}t}$$



J.B

Le terme $I_D = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_S(\vec{E})}{dt}$ est homogène à un courant est appelé *courant de déplacement*. Ce terme est souvent négligeable devant un courant réel I. Il est néanmoins conservé en l'absence de courant dû à un déplacement de charge.