Chapitre 1

Induction de Lorentz

Un circuit électrique plongé dans un champ magnétique est soumis à des forces permettant de réaliser une conversion d'énergie électrique en énergie mécanique. Ce principe est à la base des moteurs électriques. Dans ce chapitre, on se limite à la translation de conducteurs, que l'on retrouvera par exemple dans les moteurs linéaires (cf. fig. 1.1). Ces dispositifs permettent un déplacement rapide d'un support, très utilisés dans l'industrie notamment en robotique. Le cas de circuits en rotation, permettant d'appréhender les moteurs rotatifs usuels a été traité dans le chapitre **??**.

FIGURE 1.1 – Moteur linéaire, vidéo de phase de tests (H2W tecnhologies ©).

I. Conversion électromécanique

1 - Force de Laplace

Lorsqu'un circuit est parcouru par un courant, les électrons se déplacent dans le sens opposé au courant. En présence d'un champ magnétique, chaque électron va être soumis à la composante magnétique de la force de Lorentz ($\vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{Lo}} = q\vec{v} \wedge \vec{\mathrm{B}}$). Cette force est perpendiculaire au déplacement des électrons et au champ magnétique. L'ensemble des forces exercées sur chaque électron constitue la force de Laplace qui s'exerce sur le conducteur (cf. annexe. **??**). Dans l'expérience historique des rails de Laplace, un conducteur mobile, parcouru par un courant est placé dans un champ magnétique uniforme (cf. fig. 1.2).

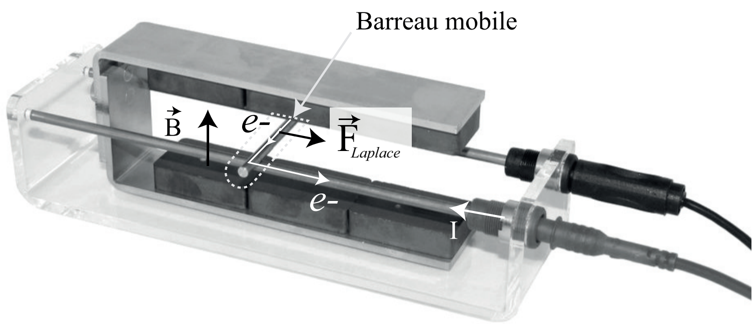
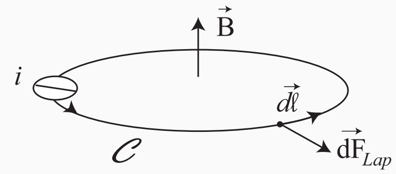


FIGURE 1.2 – Force de Laplace sur un dispositif commercial (Equascience ©).

Lorsque le courant circule, on observe un déplacement du conducteur qui peut être inversé en changeant le sens du courant.

Définition :

Considérons un circuit filiforme $\mathcal{C}$ parcouru par un courant i et plongé dans un champ magnétique $\vec{\mathrm{B}}$. Sur chaque morceau $\mathrm{d}\ell$ du circuit apparaît une force de Laplace définie par



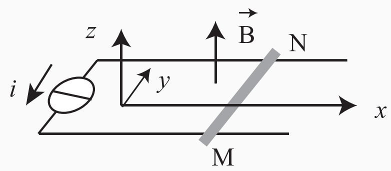
$$\overrightarrow{\mathrm{dF}}_{\mathrm{L}ap} = i\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} \wedge \vec{\mathrm{B}}$$

où l'élément $\mathrm{d}\ell$ est orienté dans le sens du courant i.

Dans les cas traités dans cet ouvrage, le champ magnétique est uniforme sur le circuit de sorte que la force exercé sur les conducteurs prennent une forme simplifiée.

Propriété :

Un conducteur rectiligne MN, parcouru par un courant orienté de M vers N et plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{\mathrm{B}}$ est soumis à la force de Laplace :



$$\vec{\mathrm{F}}_{lap} = i\overrightarrow{\mathrm{MN}} \wedge \vec{\mathrm{B}}$$

L'action de Laplace s'applique uniformément sur le conducteur, son point d'application est donc au centre géométrique de l'objet. Pour un courant de $i = 1\,\mathrm{A}$ dans un champ magnétique intense de $\mathrm{B} = 1\,\mathrm{T}$, la force de Laplace sur un conducteur d'une longueur de $d = 10\,\mathrm{cm}$ vaut : $\mathrm{F}_{lap} = 0{,}1\mathrm{N}$. Cette force est très faible, pour obtenir des actions plus importantes, il faut augmenter le courant, soit avec le générateur, soit en augmentant le nombre de spires du circuit.

2 - Résolution mécanique

Lors d'un mouvement d'un conducteur soumis à un courant dans un champ magnétique, le problème à résoudre est électromécanique puisque la force Laplace fait intervenir l'expression du courant et que le courant dépend de la f.e.m induite de Faraday en raison du phénomène d'induction dans le circuit qui évolue. Il faut donc résoudre un système d'équations couplées, électrique et mécanique. On peut résumer le principe de résolution par le schéma suivant (cf. 1.3).

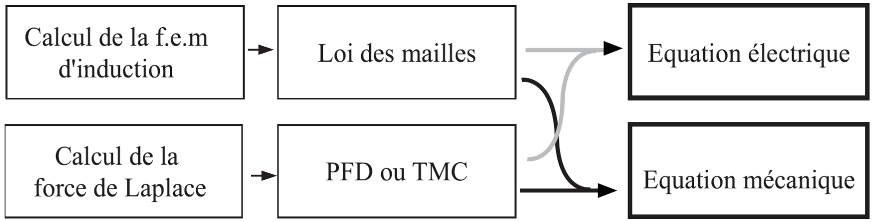
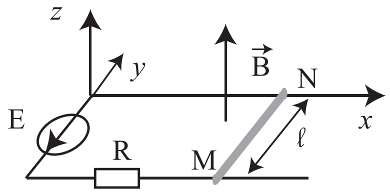


FIGURE 1.3 – Schéma de résolution.

Une méthode de résolution usuelle consiste à déterminer l'équation mécanique par application du PFD. Comme la force de Laplace $\vec{F}_{lap} = i\overrightarrow{MN} \wedge \vec{B}$ dépend de l'intensité du circuit, on obtient une équation électrique par application de la loi des mailles. Cette dernière fait apparaître la vitesse de déplacement du circuit en raison de loi de Faraday ($e = -\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t$). Pour obtenir une équation uniquement mécanique, sans terme électrique, on remplace le courant dans l'équation mécanique par son expression obtenue dans l'équation électrique.

Exemple 1

On branche en série un générateur de tension E et une résistance R à l'aide de deux rails écartés de ℓ. Le tout baigne dans un champ magnétique $\vec{B} = B_0\,\vec{e}_z$ vertical et uniforme. La partie MN, de masse m, est mobile sur les rails.



1 - Déterminer l'équation mécanique reliant l'accélération de la barre au courant i circulant dans le circuit.

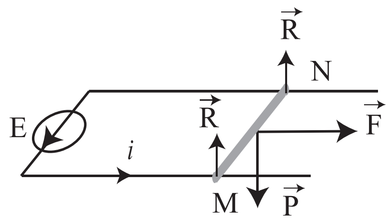
2 - Justifier l'apparition d'une f.e.m induite et l'exprimer en fonction de B_0, L et la vitesse $v(t)$.

3 - En déduire que l'équation différentielle vérifiée par la vitesse v de la barre peut se mettre sous la forme suivante et tracer l'allure de $v(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}v = \frac{v_{lim}}{\tau}$$

Pour s'entraîner : exercices 1, 3, 6 et 7

1 - Dans le référentiel d'étude supposé galiléen, la barre est soumise à

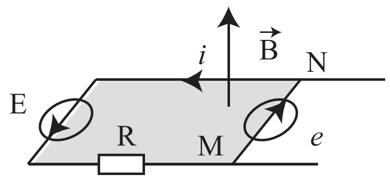


- son poids $\vec{P} = -mg\,\vec{e}_z$;
- la réaction des rails $\vec{R} = R\,\vec{e}_z$;
- la force de Laplace

$$\vec{F} = i\overrightarrow{MN} \wedge \vec{B} = i\ell B_0\,\vec{e}_x$$

Le principe fondamental de la dynamique donne selon l'axe Ox : $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = i(t)\ell B_0$.

2 - La surface du circuit (en grisé sur la figure) est définie par $S = \ell \times x$. Lors du mouvement, la surface étant modifiée, il apparaît une f.e.m induite donnée par la loi de Faraday (cf. chapitre **??**). L'orientation du circuit dans le sens du champ magnétique (règle de la main droite)



impose alors le sens de la f.e.m induite [1] :

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi_\mathrm{S}(\vec{\mathrm{B}})}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{B}_0\ell\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{B}_0\ell v(t)$$

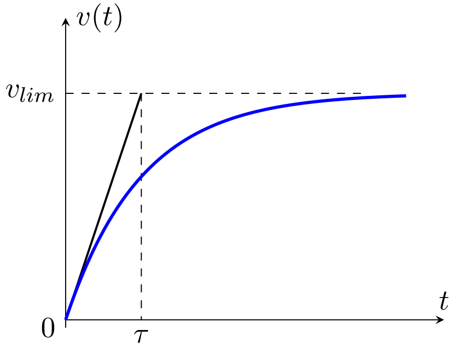
Dans le circuit équivalent la loi des mailles permet alors d'écrire :

$$\mathrm{E} + e = \mathrm{R}i(t) \quad \text{soit} \quad i(t) = \frac{\mathrm{E}+e}{\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{E} - \mathrm{B}_0\ell v(t)}{\mathrm{R}}$$

3 - En remplaçant le courant dans l'équation du mouvement, on en déduit l'équation canonique suivante :

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \mathrm{B}_0\ell\frac{\mathrm{E} - \mathrm{B}_0\ell v}{\mathrm{R}} \quad \text{soit} \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \underbrace{\frac{\mathrm{B}_0^2\ell^2}{m\mathrm{R}}}_{1/\tau} v = \underbrace{\frac{\mathrm{B}_0\ell\mathrm{E}}{m\mathrm{R}}}_{v_{lim}/\tau}$$

On reconnaît une équation différentielle de premier ordre avec second membre constant. La vitesse tendant vers la vitesse limite v_{lim} avec le temps caractéristique τ. La solution est de la forme :
$v(t) = v_{lim}(1 - e^{-t/\tau})$.



Remarque 1 :
Des projets de canons électromagnétiques (ou railgun) sont en développement, notamment dans la marine américaine. Ce type de canon électromagnétique permet de tirer des projectiles à plus de cinq fois la vitesse du son. Le contact électrique entre le projectile et le fût du canon (jouant le rôle des rails de Laplace) reste un problème technique majeur. En 2022, une simulation sur un système composé de 4 rails semble diminuer les difficultés rencontrées (cf. fig. 1.4). Toutefois une unité mobile semble pour l'instant hors de propos étant donné la taille du générateur électrique nécessaire.

1. On parle parfois de force contre-électromotrice car la f.e.m induite s'oppose à celle du générateur.

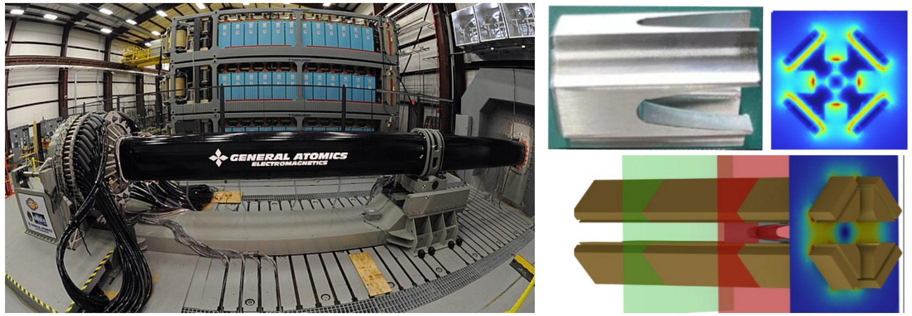


FIGURE 1.4 – (Gauche) Canon élecromagnétique de l'US Navy (U.S. Navy photo by John F. Williams, 2012). (Droite) Projectile et simulation du champ magnétique dans des rails quadrupolaires. D'après *Design and Experimental Study of a Curved Contact Quadrupole Railgun, Electronics, 2022.*

II. Puissance électromécanique

1 - Puissance de la force de Laplace

Dans un champ magnétique uniforme, la force de Laplace peut être conservative ou non. Lorsqu'il s'agit d'une rotation d'un cadre rigide, l'action de la force de Laplace dérive d'une énergie une énergie potentielle [2]. Lorsque le circuit est déformable comme les cas étudiés dans ce chapitre, la force est non conservative.

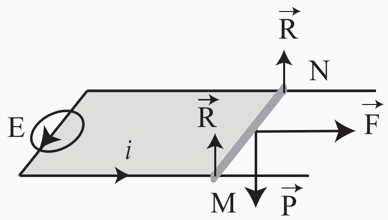
2. cf. chap. **??** ; un cadre rigide (spire) parcouru par un courant d'intensité I peut être assimilé à un dipôle magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}} = \mathrm{I}\vec{\mathrm{S}}$. Lorsqu'il est plongé dans un champ magnétique, la force de Laplace peut se mettre sous la forme $\vec{\mathrm{F}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{E}_p$ avec l'énergie potentielle $\mathrm{E}_p = -\overrightarrow{\mathcal{M}}\cdot\vec{\mathrm{B}}$.

Définition :

La puissance de la force de Laplace exercée sur un morceau de conducteur indéformable est définie par :

$$\mathcal{P}(\vec{F}_{\mathrm{Lap}}) = \vec{F}_{\mathrm{Lap}} \cdot \vec{v}$$

où $\vec{v}$ est la vitesse du conducteur.



Dans l'exemple des rails de Laplace, la puissance de la force de Laplace définie par $\vec{F}_{lap} = i(t)B_0\ell\,\vec{e}_x$ vaut[3] :

$$\mathcal{P}(\vec{F}_{\mathrm{Lap}}) = i(t)B_0\ell v(t)$$

Propriété :

Selon le signe de la puissance, la force de Laplace peut être

- motrice si $\mathcal{P}(\vec{F}_{\mathrm{Lap}}) > 0$;
- résistante si $\mathcal{P}(\vec{F}_{\mathrm{Lap}}) < 0$.

Dans les moteurs, la force de Laplace est évidemment motrice tandis qu'elle peut être résistante pour les freins électromagnétiques, utilisés sur les poids lourds ou les trains. Un disque conducteur placé sur l'axe de rotation tourne à proximité d'électroaimants (cf. fig. 1.5). Lorsque ces derniers sont alimentés, le flux du champ magnétique à travers le disque tournant engendre une f.e.m induite dans le disque et donc un courant. Une force de Laplace apparaît dans le disque qui tend à ralentir sa rotation. Ce type de dispositif sans contact évite une usure prématurée des freins usuels à mâchoires ou tambour comme ceux que l'on rencontre sur les vélos et les voitures. Ces freins, dits à courant de Foucault, équipent les poids lourds et bus pour le ralentir avant d'utiliser des freins à mâchoires.

3. Le lecteur pourra être surpris d'obtenir une puissance non nulle pour une force dont l'origine est la force de Lorentz de puissance nulle $\vec{F}_{Lorentz} \cdot \vec{v} = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$. Une explication est détaillée en annexe **??**. crée de la confusion sur v ? ? ?

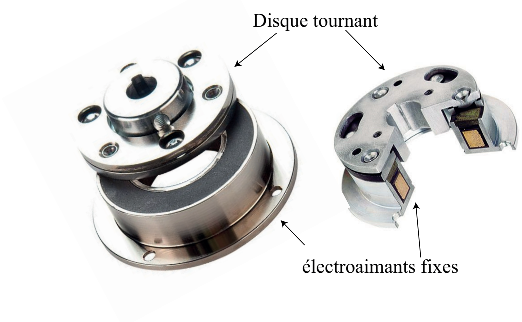
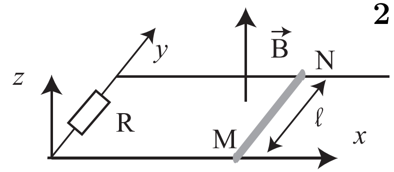


FIGURE 1.5 – Ralentisseurs électromagnétiques. Vidéo d'illustration (EPFL)

Exemple 2

On lance avec une vitesse initiale $\vec{V}_0 = V_0\,\vec{e}_x$, une barre MN sur deux rails écartés de ℓ et reliés à une résistance R. Le tout baigne dans un champ magnétique $\vec{B} = B_0\,\vec{e}_z$ vertical et uniforme.



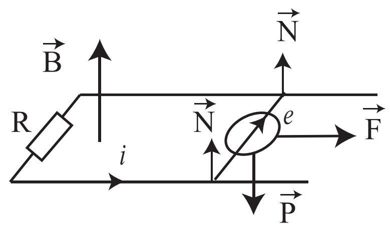
1 - Justifier l'apparition d'une f.e.m induite et donc d'un courant induit tel qu'indiqué sur la figure ci-contre. Exprimer le courant i circulant dans le circuit.

2 - Exprimer la force de Laplace en fonction de B_0, ℓ et $i(t)$.

3 - L'action de cette force est elle motrice ou résistante ?

Pour s'entraîner : exercice 2

1 - Le déplacement du conducteur va faire augmenter la taille du circuit induisant une augmentation du flux de champ magnétique. D'après la loi de Faraday, ce phénomène est associé à l'apparition d'une f.e.m induite responsable d'un courant dans le circuit. On oriente la surface en accord avec le courant (règle de la main droite, ici $\vec{S} = S\,\vec{e}_z$). Alors le flux vaut $\Phi_S = BS = Blx(t)$.



La f.e.m induite, orientée comme i (convention générateur) s'écrit :

$$e = -\frac{d\Phi_S(\vec{B})}{dt} = B_0\ell\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = B_0\ell v(t)$$

Dans le circuit équivalent la loi des mailles permet alors d'écrire [4] :

$$e = \mathrm{R}i(t) \quad \text{soit} \quad i(t) = -\frac{e}{\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{B}_0 \ell v(t)}{\mathrm{R}}$$

2 - Un conducteur parcouru par un courant et plongé dans un champ magnétique uniforme est soumis à une force de Laplace

$$\vec{\mathrm{F}} = i\overrightarrow{\mathrm{MN}} \wedge \vec{\mathrm{B}} = i\ell \mathrm{B}_0\, \vec{e}_x = -\frac{\mathrm{B}_0^2 \ell^2}{\mathrm{R}} v(t)\, \vec{e}_x$$

3 - On en déduit que la puissance associée vaut :

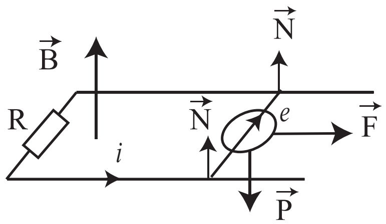
$$\mathcal{P}(\vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{Lap}}) = \vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{Lap}} \cdot \vec{v} = -\frac{\mathrm{B}_0^2 \ell^2}{\mathrm{R}} v(t)^2 < 0$$

La puissance étant négative, la force de Laplace est résistante.

Remarque 2 :
La force de Laplace joue ici le même rôle que des frottements visqueux (c'est-à-dire proportionnelle à la vitesse, cf. tome Mécanique). La dépendance avec la vitesse impose que la force de Laplace ne permet pas d'arrêter la barre puisque plus la vitesse est faible, plus la force est faible. Les freins électromagnétiques utilisés dans les camions et les trains sont connus également sous la dénomination de *ralentisseurs* électromagnétiques car ils ne peuvent permettre l'arrêt du véhicule.

2 - Bilan de puissance

Dans le cas des rails de Laplace ci-contre, nous avons déterminé l'expression de la force et de la f.e.m induite :



$$\vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{Lap}} = \mathrm{B}_0 \ell i(t)\, \vec{e}_x \quad \text{et} \quad e(t) = -\mathrm{B}_0 \ell v$$

4. On aurait pu choisir d'orienter le circuit dans l'autre sens. Cela aurait conduit à $\Phi_{\mathrm{S}} > 0$ et $i < 0$.

Nous pouvons donc calculer la puissance de la force de Laplace et la puissance associée à la f.e.m induite :

$$\mathcal{P}(\vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{Lap}}) = \vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{Lap}} \cdot \vec{v} = \mathrm{B}_0 \ell i(t) \times v(t) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}(e) = e(t) \times i(t) = -\mathrm{B}_0 \ell v \times i(t)$$

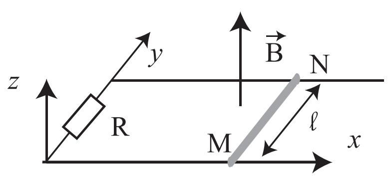
On remarque que ces deux grandeurs sont opposées. Cette relation se généralise quelque soit le déplacement d'un circuit filiforme dans un champ magnétique uniforme.

Propriété :
Lors du déplacement d'un conducteur filiforme dans un champ magnétique uniforme, la conversion de puissance électromécanique se résume sous la forme suivante :

$$\mathcal{P}(\vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{Lap}}) + \mathcal{P}_{elec}(e) = 0$$

Un démonstration est proposée à l'annexe **??**.

Exemple 3
Reprenons l'exemple précédent où la partie mobile possède une vitesse initiale $\vec{\mathrm{V}}_0 = \mathrm{V}_0\, \vec{e}_x$ et se déplace sans frottement dans un champ magnétique $\vec{\mathrm{B}} = \mathrm{B}_0\, \vec{e}_z$ vertical et uniforme.



1 - Déterminer l'équation reliant la f.e.m induite et le courant $i(t)$.
2 - Donner une relation entre le courant $i(t)$ et la vitesse de la barre $v(t)$.
3 - En faisant apparaître la puissance de la force de Laplace et celle de la f.e.m induite, expliquer ce que devient l'énergie cinétique de la barre.

Pour s'entraîner : exercices 2, 4

1 - La surface du circuit ($\mathrm{S} = \ell \times x$) augmente avec le déplacement de la barre. Le flux de champ magnétique augmente à travers le circuit, il apparaît une f.e.m induite donnée par la loi de Faraday :

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi_S(\vec{B})}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}B_0 \ell x(t)}{\mathrm{d}t} = -B_0 \ell v(t)$$

Dans le circuit équivalent, la loi des mailles permet d'obtenir une relation électrique : $e = Ri(t)$ soit $-B_0\ell v = Ri(t)$.

2 - Avec les orientations considérées, la force de Laplace vaut

$$\vec{F} = i\overrightarrow{MN} \wedge \vec{B} = i\ell B_0\,\vec{e}_x$$

L'application du principe fondamental de la dynamique selon $\vec{e}_x$ donne une relation mécanique : $m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F_{Lap} = B_0\ell i(t)$.

3 - Afin d'établir un bilan de puissance, multiplions par v l'équation mécanique et par i l'équation électrique. On obtient alors :

$$\begin{cases} mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = B_0\ell i(t)v(t) \\ -B_0\ell v(t)i(t) = Ri^2(t) \end{cases}$$

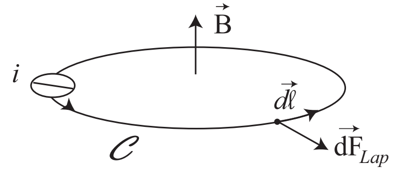
Dans l'équation mécanique, le premier terme correspond à la dérivée de l'énergie cinétique : $mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}mv^2)$. On remarque ainsi que la puissance de la force de Laplace est l'opposée de la puissance de la f.e.m induite, en les substituant, on peut écrire :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}mv^2) = -Ri^2 \quad \text{soit} \quad \frac{\mathrm{d}E_C}{\mathrm{d}t} = -\mathcal{P}_{Joule}$$

Nous pouvons donc conclure que l'énergie cinétique diminue et est dissipée dans la résistance par effet Joule.

L'essentiel

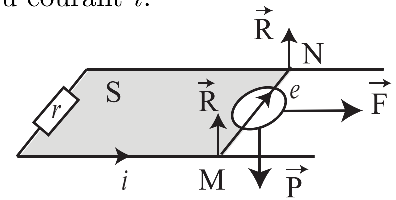
Considérons un circuit filiforme $\mathcal{C}$ parcouru par un courant i et plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$. Sur chaque morceau $\mathrm{d}\ell$ du circuit apparaît une **force de Laplace** définie par



$$\overrightarrow{\mathrm{d}F}_{Lap} = i\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} \wedge \vec{B}$$

où l'élément $\mathrm{d}\ell$ est orienté dans le sens du courant i.

Un conducteur rectiligne MN, parcouru par un courant orienté de M vers N et plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ est soumis à la force de Laplace :



$$\vec{F}_{lap} = \int_M^N i\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} \wedge \vec{B} = i\overrightarrow{MN} \wedge \vec{B}$$

Lors du déplacement d'un conducteur filiforme dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme, la surface S du circuit électrique évolue il apparaît une f.e.m induite donnée par **la loi de Faraday**

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi_S(\vec{B})}{\mathrm{d}t}$$

La puissance de la force de Laplace exercée sur un morceau de conducteur indéformable est définie par :

$$\mathcal{P}(\vec{F}_{Lap}) = \vec{F}_{Lap} \cdot \vec{v}$$

où $\vec{v}$ est la vitesse du conducteur. La puissance de la f.e.m induite s'écrit : $\mathcal{P}_{elec}(e) = e \times i$. La conversion de puissance électromécanique se résume sous la forme suivante :

$$\mathcal{P}(\vec{F}_{Lap}) + \mathcal{P}_{elec}(e) = 0$$

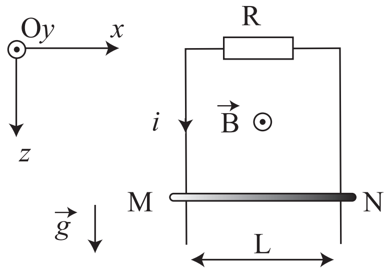
Exercices

Les classiques

Exercice 1

solution p.??

Une barre tombe sans frottement au contact de deux rails verticaux distants de L et reliés à une résistance R. Le tout est plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0\,\vec{e}_y$. On notera $\vec{g} = g\,\vec{e}_z$ l'accélération de la pesanteur et on supposera que les contacts sur les rails sont sans frottement.



1 - Exprimer la force de Laplace s'exerçant sur la barre MN.
2 - En appliquant le principe fondamental de la dynamique, déterminer une équation reliant $\ddot{z}(t)$ et $i(t)$.
3 - Déterminer la f.e.m. induite par le mouvement de la barre.
4 - En appliquant la loi des mailles, montrer que l'équation différentielle vérifiée par $v(t) = \dot{z}$ peut se mettre sous la forme :

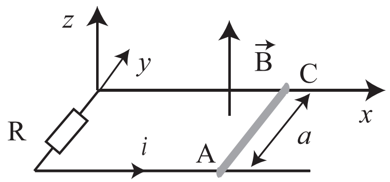
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}v = \frac{v_{lim}}{\tau}$$

On explicitera la valeurs de τ et v_{lim} en fonction de m, g, R, L et B_0.
5 - Représenter la vitesse en fonction du temps.

Exercice 2

solution p.??

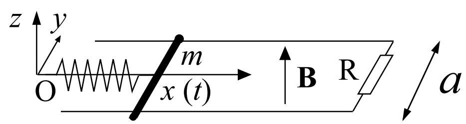
Une barre métallique AC de masse m et longueur a, est posée sur deux rails reliés à une résistance R. Cette barre se déplace à la vitesse $\vec{v} = v\,\vec{e}_x$.
On négligera les frottements de la barre sur les rails et le tout est plongé dans un champ magnétique uniforme et constant $B = B_0\,\vec{e}_z$



1 - Déterminer la f.e.m induite par le mouvement de la barre.
2 - En déduire l'expression du courant I circulant dans la résistance.
3 - Déterminer la force à appliquer sur la barre par un opérateur extérieur pour que la vitesse soit maintenue constante.
4 - Comparer la puissance fourni par un opérateur maintenant cette vitesse constante et la puissance dissipée par effet Joule.

Exercice 3

solution p.??

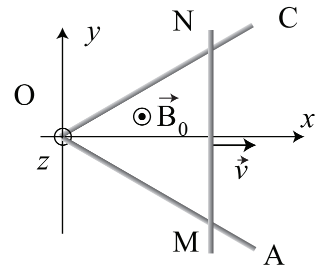


Une barre métallique de masse m et longueur a, posée sur deux rails reliés à une résistance R, est accrochée un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0.
On négligera les frottements de la barre sur les rails et le tout est plongé dans un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B} = B_0\,\vec{e}_z$
1 - Déterminer la f.e.m induite par le mouvement de la barre.
2 - En déduire l'expression du courant i circulant dans la résistance.
3 - Donner l'équation différentielle du mouvement vérifiée par $x(t)$.
4 - Que doit valoir la résistance R pour qu'il y ait des oscillations. Dans ce cas, résoudre $x(t)$ avec $x(0) = \ell_0 + h$ et $\dot{x}(0) = 0$.
On posera : $2\lambda = a^2B^2/mR$ et $\omega_0^2 = k/m$.

Exercice 4

solution p.??

Deux rails OA et OC, filiformes et fixes, sont placés dans le plan horizontal (xOy) selon un angle de 60°. L'ensemble AOC formé par les 2 rails est supposé conducteur. Une barre MN, de masse m, se déplace sans frottement sur les rails d'un mouvement de translation parallèle à $\vec{e}_x$, à la vitesse constante $\vec{v} = V_0\,\vec{e}_x$, imposée par l'opérateur. La position de son centre d'inertie est repérée par l'abscisse x. Les 2 rails et la barre ont la même résistivité linéique λ.



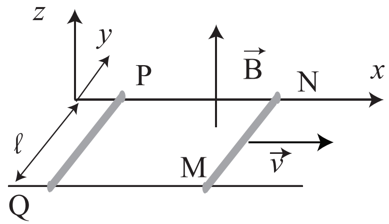
L'ensemble du dispositif est plongé dans un champ magnétique extérieur $\vec{B}_0 = B_0\,\vec{e}_z$ avec $B_0 > 0$. On négligera l'influence du champ magnétique créé par le circuit lui-même. On considère le déplacement de la barre MN entre AB et O.

1 - Déterminer la résistance R du circuit en fonction de λ et y.
2 - Déterminer le flux de $\vec{B}_0$ à travers le circuit en fonction de B_0 et y.
3 - En déduire la force électromotrice induite dans le circuit en fonction de B_0, V_0, et y.
4 - En écrivant l'équation électrique du circuit fermé ainsi formé, en déduire le courant I induit dans le circuit en fonction de B_0, V_0, et λ.
5 - Déterminer la force de Laplace $\vec{F}_L$ s'exerçant sur la barre MN en fonction de V_0, B_0, λ, et y.
6 - En déduire la force F_{op} que doit exercer l'opérateur pour maintenir $\vec{v}$ constante.
7 - Calculer la puissance de cette force, puis la puissance dissipée par effet Joule. Conclure ?

Exercice 5

solution p.??

Deux barres conductrices MN et PQ de masse m et longueur ℓ assimilés à chacune à une résistance R peuvent se déplacer sans frottement sur deux rails conducteurs, le tout étant plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$. Un opérateur tire la barre MN repérée par $x(t)$ avec une vitesse constante $\vec{v} = v\,\vec{e}_x$. On note $x'(t)$ l'abscisse de la barre PQ.



1 - Déterminer la f.e.m induite par le mouvement de la barre MN.
2 - En déduire l'expression du courant i circulant dans le cadre formé par MNPQ.
3 - Déterminer l'équation du mouvement vérifiée par $v' = \dot{x}'(t)$ vitesse de la barre PQ et représenter $v'(t)$.
4 - Déterminer la force à appliquer sur la barre par un opérateur extérieur pour que la vitesse soit maintenue constante. La force de Laplace exercée sur MN est elle motrice ou résistante ?

Problème ouvert

Exercice 6

solution p.??

Le canon électromagnétique, connu aussi sous le nom anglais de railgun est une arme à projectile accéléré par la force de Laplace. L'obus de masse $m = 10\,\mathrm{kg}$ et de largeur $\ell = 10\,\mathrm{cm}$ peut être assimilé à la barre conductrice se déplaçant sur les rails de Laplace. Le fût du canon jouant le rôle des rails est long de $L = 10\,\mathrm{m}$.

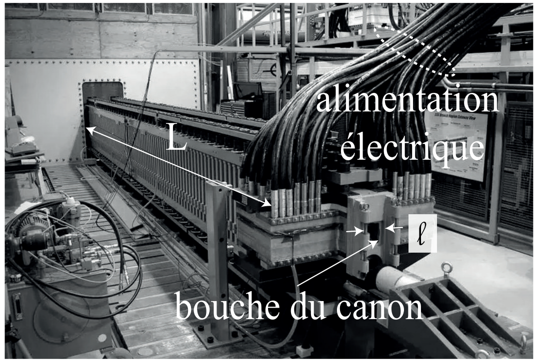


Figure 1.6 – Canon électromagnétique de l'US NAvy. Credits US Navy, cliché pris par J.F. Williams.

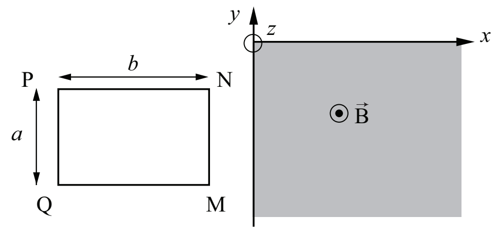
En supposant que le champ magnétique est de l'ordre de $B = 1\,\mathrm{T}$, déterminer le courant nécessaire pour propulser l'obus à $1600\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Les difficiles

Exercice 7

solution p.??

Une spire conductrice rectangulaire MNPQ mobile, de côtés de longueur a et b, de masse m, de résistance R et d'inductance négligeable, est en translation dans le plan (Oxy) parallèlement à l'axe (Ox) et dans le sens des x croissants. Dans la zone d'espace définie par $x > 0$ existe un champ magnétique uniforme et égal à B (avec $B > 0$). On admet que le champ magnétique est nul en dehors de cette zone, sans se préoccuper du problème lié à la discontinuité de $\vec{B}$. On notera $x(t)$ l'abscisse du côté MN (de longueur a) de la spire et $v(t)$ sa vitesse. On néglige toute force autre que magnétique.



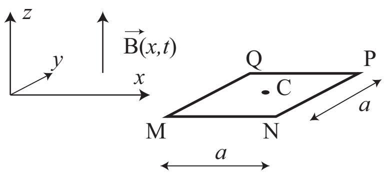
1 - À l'instant où le côté MN de la spire conductrice pénètre dans la zone où règne le champ magnétique la vitesse de la spire est non nulle et égale à v_0. Décrire qualitativement le phénomène qui se produit lorsque la spire pénètre avec une vitesse non nulle dans la zone où règne le champ magnétique.
2 - Déterminer l'expression de la force électromotrice induite dans la spire (on précisera le sens conventionnel choisi pour l'orientation de la spire et on distinguera très clairement différents cas selon les valeurs de x).
3 - En déduire l'expression de l'intensité du courant qui circule dans la spire dans chacun des cas précédents. Calculer le courant pour une spire carré de côté $a = b = 1$ cm, de résistance $\mathrm{R} = 1.10^{-2}\ \Omega$ se déplaçant avec une vitesse $\mathrm{V} = 10$ m.s^{-2} dans un champ d'intensité $\mathrm{B} = 0{,}1$ T.
4 - En déduire, en appliquant le principe fondamental de la dynamique, l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$.
5 - En déduire l'équation différentielle vérifiée par $v(x)$. On pourra utiliser le fait que

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

6 - En déduire, par intégration de l'équation précédente, la valeur de la vitesse v en fonction de x. On précisera le domaine de validité de la relation ainsi obtenue. A quelle condition sur v_0 la spire conductrice pourra-t-elle rentrer entièrement dans la zone où règne le champ magnétique ? Calculer numériquement v_0 pour une spire carré de masse $m = 10$ g.
7 - On suppose que la condition précédente est vérifiée et que la vitesse de la spire est non nulle à l'instant où la spire se trouve entièrement dans la zone où règne le champ magnétique. Quel sera le mouvement ultérieur de la spire ? Citer une application pratique du phénomène physique précédent.

Exercice 8 *solution p.??*

Le moteur linéaire à induction produit un déplacement de translation grâce à la production d'un champ magnétique glissant. La partie qui se translate utilise uniquement l'induction et ne nécessite pas de transporter de générateur. Ce type de moteur est utilisé par exemple dans la propulsion des trains à haute vitesse comme ci-dessous, le train japonais MLX01-01 (image sous licence Creative Commons 3.0).



Un cadre rectangulaire $\mathcal{C}$ (l'induit) de masse m est constitué par les points MNPQ de centre C et de côtés MN = QP = a et QM = PN = a. Ce cadre reste dans le plan $z = 0$ et se translate, par rapport au référentiel galiléen $\mathcal{R}$ de centre O, à la vitesse $v_\mathrm{C} = \dot{x}_\mathrm{C}\,\vec{e}_x$. Le centre C d'abscisse x_C reste sur l'axe Ox et les côtés MN et QP restent parallèles à Oy. En $t = 0$, le centre du cadre $\mathcal{C}$ passe par l'origine du système de coordonnées O. On note R la résistance interne de l'induit $\mathcal{C}$.
Un ensemble d'électroaimants situés le long de l'axe Ox dans lesquels les courants sont déphasés forme l'inducteur. Il crée dans le référentiel R un champ électromagnétique « glissant »à la vitesse v_s :

$$\vec{\mathrm{B}} = \mathrm{B}_0 \cos(\omega(t - x/v_\mathrm{S}))\,\vec{e}_z$$

1 - Calculer le flux du champ magnétique à travers la spire MNPQ pour une position x_C quelconque de la spire. On supposera que $v_s/\omega \gg a$.
2 - Dans le cas d'un déplacement à vitesse constante, $\dot{x}_\mathrm{C} = v_0$ déterminer l'expression de la f.e.m d'induction en fonction de B_0, a, ω, x_C v_s et v_0.
3 - Déterminer l'expression du courant circulant $i(t)$ circulant dans l'induit. On précisera avec soin l'orientation du courant sur un schéma clair.
4 - Évaluer la force de Laplace sur chacun les cotés NP et QM.
5 - Montrer que la résultante de la force de Laplace sur le cadre $\mathcal{C}$ peut se mettre sous la forme :

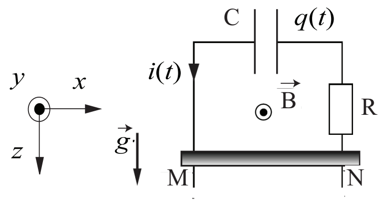
$$\vec{\mathrm{F}}_{lap} = 2\frac{\omega^2 a^4 \mathrm{B}_0^2}{2\mathrm{R}v_\mathrm{S}}\left(1 - \frac{v_0}{v_\mathrm{S}}\right)\sin^2\left(\omega(1 - v_0/v_\mathrm{S})t\right)\vec{e}_x$$

6 - Déterminer la valeur moyenne de la résultante et en déduire si le mouvement est ralenti ou accéléré.

7 - Justifier par un argument physique sur le flux de champ magnétique, le fait que $\vec{F}_{lap} = \vec{0}$ si $v_0 = v_S$.
8 - Évaluer la puissance moyenne de la force de Laplace $< \mathcal{P}_{Laplace} >$ pour un déplacement à vitesse constante v_0.
9 - Évaluer la puissance moyenne dissipée dans la résistance $< \mathcal{P}_J >$.
10 - À l'aide d'un bilan de puissance, conclure sur la vitesse maximale du circuit en fonction de v_s.
Données : $\cos(p) - \cos(q) = -2.\sin(\dfrac{p+q}{2}).\sin(\dfrac{p-q}{2})$

Exercice 9 *solution p.??*

Considérons deux rails verticaux distants de L reliés à une résistance et un condensateur. Une barre de masse m tombe sans frottement au contact des rails. Le tout est plongé dans un champ magnétique $\vec{B} = B_0\,\vec{e}_y$. On notera $\vec{g} = g\,\vec{e}_z$ l'accélération de la pesanteur. À l'instant initial, le condensateur n'est pas chargé.

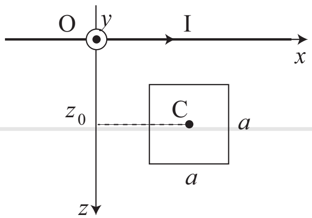


1 - Déterminer l'expression de la force de Laplace s'exerçant sur la barre MN.
2 - En appliquant le principe fondamental de la dynamique, déterminer une équation reliant $\ddot{z}(t)$ et $i(t)$.
3 - Calculer la f.e.m. induite par le mouvement de la barre dans le champ magnétique.
4 - En appliquant la loi des mailles, montrer que l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ peut se mettre sous la forme :

$$\dot{i} + \frac{1}{\tau} i = \frac{i_{lim}}{\tau}$$

On explicitera la valeurs de τ et i_{lim} en fonction de m, g, R, C et B_0.

Exercice 10 *solution p.??*



Un fil infini horizontal est parcouru par un courant constant I. Un cadre métallique carré de côté A est lâché à une distance z_0 du fil. On note m la masse du cadre et R sa résistance interne.
1 - Déterminer le champ magnétique crée par le fil.
2 - Proposer une description du mouvement.
3 - Déterminer la f.e.m induite dans la spire, simplifier son expression dans le cas où $z_0 >> a$.
4 - Exprimer la force de Laplace exercée sur la spire carré.
5 - Donner l'équation différentielle du mouvement du cadre repérée par $z(t)$.

Corrigés

I. Force de Laplace

Considérons un barreau de conducteur contenant n électrons libres par unité de volume (cf. fig. ??). Ce barreau étant électriquement neutre, il contient également des cations de charge $+e$ avec la même densité volumique n.

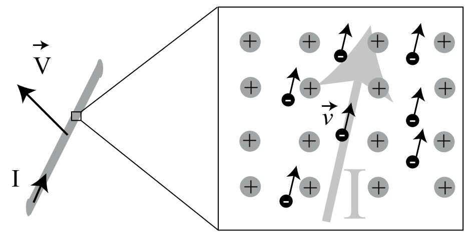


FIGURE 7 – Description d'un courant dans un conducteur.

En présence d'un générateur de courant, les électrons ont une vitesse **par rapport au conducteur** définie par :

$$\mathrm{I} = \iint \vec{j} \cdot \overrightarrow{\mathrm{dS}} = -nev \times \mathrm{S} \quad \text{soit} \quad v = -\mathrm{I}/ne\mathrm{S}$$

Si $\vec{\mathrm{V}}$ est la vitesse de déplacement du conducteur **par rapport au laboratoire**, en présence d'un champ magnétique, la force de Lorentz exercée sur ces électrons est donnée par :

$$\vec{\mathrm{F}}^{-}_{Lorentz} = -e(\vec{v} + \vec{\mathrm{V}}) \wedge \vec{\mathrm{B}}$$

Tandis que la force de Lorentz exercée sur les cations s'écrit :

$$\vec{\mathrm{F}}^{+}_{Lorentz} = +e\vec{\mathrm{V}} \wedge \vec{\mathrm{B}}$$

L'ensemble des forces exercées sur les charges, s'obtient en sommant toutes les forces de Lorentz. La contribution de la vitesse $\vec{\mathrm{V}}$ s'annule, il reste :

$$\vec{\mathrm{F}}_{Laplace} = \iiint_{\mathcal{V}} n \times (\vec{\mathrm{F}}^{+}_{Lorentz} + \vec{\mathrm{F}}^{-}_{Lorentz} \mathrm{d}\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} -en \times \vec{v} \wedge \vec{\mathrm{B}} \mathrm{d}\mathcal{V}$$

On fait alors apparaître la densité volumique de courant $\vec{j}$:

$$\vec{\mathrm{F}}_{Laplace} = \iiint_{\mathcal{V}} \underbrace{-en \times \vec{v}}_{\vec{j}} \wedge \vec{\mathrm{B}} \mathrm{d}\mathcal{V}$$

Décomposons l'intégrale de volume en intégrale sur la section du conducteur et sur sa longueur, on peut donc écrire :

$$\vec{\mathrm{F}}_{Laplace} = \int_0^{\mathrm{L}} \Big[\iint_{\mathrm{S}} \vec{j} \wedge \vec{\mathrm{B}} \mathrm{dS} \Big] \mathrm{d}\ell = \int_0^{\mathrm{L}} \Big[\iint_{\mathrm{S}} \vec{j} \mathrm{dS} \wedge \vec{\mathrm{B}} \Big] \mathrm{d}\ell$$

Le champ magnétique étant uniforme sur la section du conducteur, il est possible de réécrire l'intégrale :

$$\vec{\mathrm{F}}_{Laplace} = \int_0^{\mathrm{L}} \Big[\iint_{\mathrm{S}} \vec{j} \mathrm{dS} \Big] \wedge \vec{\mathrm{B}} \mathrm{d}\ell$$

En remarquant que $\iint_{\mathrm{S}} \vec{j} \mathrm{dS}$ est orienté dans le sens du courant, noté $\vec{u}$, on obtient :

$$\vec{\mathrm{F}}_{Laplace} = \int_0^{\mathrm{L}} \Big[\mathrm{I} \vec{u} \wedge \vec{\mathrm{B}} \Big] \mathrm{d}\ell$$

Ainsi, en définissant le vecteur unitaire $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}\ell \vec{u}$, on obtient une expression simple de la force de Laplace :

$$\vec{\mathrm{F}}_{Laplace} = \int_0^{\mathrm{L}} \mathrm{I} \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} \wedge \vec{\mathrm{B}}$$

II. Puissance de la force de Laplace

La force de Laplace s'applique sur l'objet macroscopique que constitue le conducteur. La puissance de cette force s'exprime donc en fonction de la vitesse $\vec{\mathrm{V}}$ du conducteur dans le référentiel d'étude :

$$\mathcal{P}(\vec{\mathrm{F}}_{Laplace}) = \Big(\int_0^{\mathrm{L}} \mathrm{I} \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} \wedge \vec{\mathrm{B}} \Big) \cdot \vec{\mathrm{V}}$$

On obtient donc une puissance non nulle tandis que la puissance de la force de Lorentz exercée sur chaque électron est nulle :

$$\mathcal{P}(\vec{\mathrm{F}}_{Lorentz}) = \vec{\mathrm{F}}_{Lorentz} \cdot \vec{v} = q(\vec{v} \wedge \vec{\mathrm{B}}) \cdot \vec{v} = 0$$

Pour lever le paradoxe, il faut remarquer que la force de Lorentz dépend de la vitesse et donc du référentiel. Pour les électrons se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ par rapport au conducteur qui lui-même se déplace à la vitesse $\vec{\mathrm{V}}$ dans le référentiel du laboratoire, la vitesse des électrons par rapport au laboratoire est (cf. fig. **??**) :

$$\vec{v}_{e^-} = \vec{v} + \vec{\mathrm{V}}$$

Dans le référentiel du laboratoire, la puissance de la force de Lorentz s'écrit donc :

$$\mathcal{P}(\vec{\mathrm{F}}_{Lorentz}) = q\big((\vec{v} + \vec{\mathrm{V}}) \wedge \vec{\mathrm{B}}\big) \cdot (\vec{v} + \vec{\mathrm{V}}) = 0$$

En décomposant le produit vectoriel, il reste :

$$q(\vec{v} \wedge \vec{\mathrm{B}}) \cdot \vec{\mathrm{V}} + q(\vec{\mathrm{V}} \wedge \vec{\mathrm{B}}) \cdot \vec{v} = 0$$

En multipliant par n le nombre d'électrons par unité de volume et en intégrant sur le volume du conducteur, le premier terme va donner la puissance des forces de Laplace tandis que le second va correspondre à la puissance de la f.e.m induite. Pour cela intégrons sur la longueur puis la longueur, en faisant apparaître la densité de courant :

$$\int_0^{\mathrm{L}} \Big[\iint_{\mathrm{S}} (\underbrace{nq\vec{v}}_{\vec{j}} \wedge \vec{\mathrm{B}}) \cdot \vec{\mathrm{V}} \mathrm{dS} \Big] \mathrm{d}\ell + \int_0^{\mathrm{L}} \Big[\iint_{\mathrm{S}} (\vec{\mathrm{V}} \wedge \vec{\mathrm{B}}) \cdot \underbrace{nq\vec{v}}_{\vec{j}}) \mathrm{dS} \Big] \mathrm{d}\ell = 0$$

L'intégrale sur la surface donne le courant, en faisant porter la partie vectorielle sur l'intégrale selon la longueur du conducteur, orienté selon le courant. La relation précédente devient :

$$\underbrace{\int_0^{\mathrm{L}} (i\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} \wedge \vec{\mathrm{B}})}_{\vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{L}ap}} \cdot \vec{\mathrm{V}} + \underbrace{\int_0^{\mathrm{L}} (\vec{\mathrm{V}} \wedge \vec{\mathrm{B}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}}_{e} \times i = 0$$

En reconnaissant la force de Laplace dans le premier membre et la f.e.m induite dans le second, on obtient l'équation de conversion électromécanique :

$$\mathcal{P}(\vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{L}ap}) + \mathcal{P}_{elec}(e) = 0$$

Temporary page!

LaTeX was unable to guess the total number of pages correctly. As there was some unprocessed data that should have been added to the final page this extra page has been added to receive it.

If you rerun the document (without altering it) this surplus page will go away, because LaTeX now knows how many pages to expect for this document.