

Induction de Neumann

L'induction de Neumann consiste à apporter de l'énergie dans un conducteur électrique à partir d'un champ magnétique oscillant. Ce phénomène est à l'origine de la conversion d'énergie mécanique en énergie électrique dans les alternateurs, présents dans les centrales électriques ou les véhicules hybrides. Il est également possible de transférer de l'énergie d'un circuit électrique à un autre. Dans les transformateurs, utilisé par exemple pour la recharge d'appareils nomades, un premier circuit crée un champ magnétique oscillant qui sera converti en courant électrique dans le second. Actuellement, des recherches s'accroissent sur la transmission d'énergie sans fil. Si des appareils existent déjà pour recharger certains téléphones portables, des dispositifs sont à l'étude pour recharger des implants cardiaques (cf. fig. 1.1) voire de transférer de l'énergie à des véhicules en mouvement.

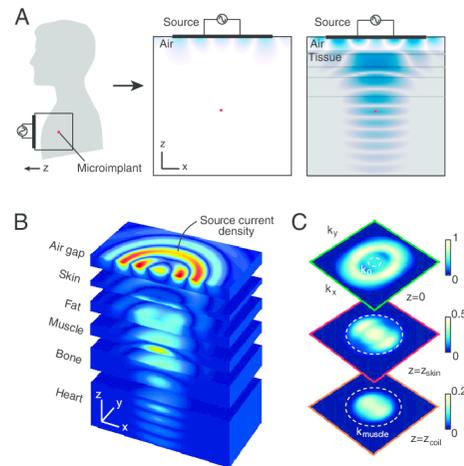


FIGURE 1.1 – Simulation du champ magnétique pour une recharge par induction d'implant cardiaque. D'après *Wireless power transfer to deep-tissue microimplants, Biological Sciences, 2014.*

I. Loi de Faraday

1 - Énoncé

En 1831, Michael Faraday, expérimentateur de génie, parvient à produire un courant électrique en faisant bouger un aimant à proximité d'un circuit électrique immobile (cf. fig 1.2). Quelques années plus tard, Heinrich Lenz énonce une loi reliant la force électromotrice dans le circuit aux fluctuations de champs magnétiques à travers la surface du circuit électrique.

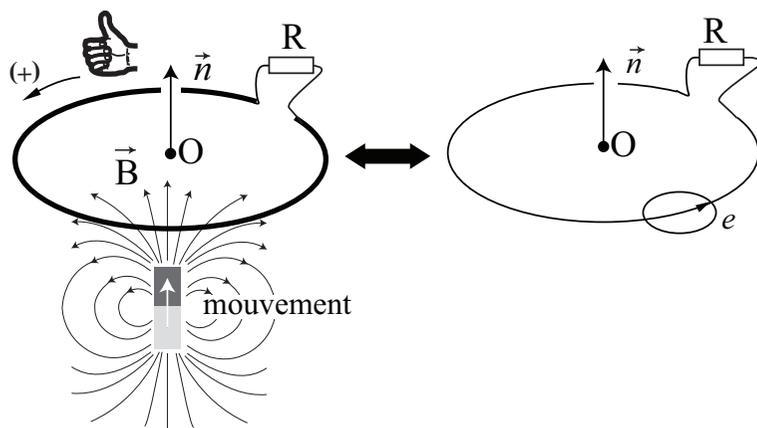


FIGURE 1.2 – Principe de la loi de Faraday.

◆ Définition : *Loi de Faraday*

Un circuit \mathcal{C} , fermant une surface S orientée à travers laquelle existe une variation de flux de magnétique, est le siège d'une force électromotrice (f.e.m.) d'induction donnée par :

$$e = - \frac{d\Phi_S(\vec{B})}{dt}$$

où $\Phi_S(\vec{B})$ est le flux de champ magnétique à travers la surface S générée par le circuit \mathcal{C} . La f.e.m induite s'exprime en Volt pour un champ en Tesla et une surface en m^2 .

L'orientation de la f.e.m induite est obtenue par la règle de la « main droite ». Le pouce définissant la normale \vec{n} au circuit, la f.e.m induite est orientée selon le sens des autres doigts (cf. fig. 1.2).

Nous traiterons dans ce chapitre deux possibilités de modification du flux de champ magnétique à travers un circuit fixe. Il est possible de faire varier dans le temps le flux de champ magnétique par :

- une modification de la norme de \vec{B} . Par exemple en translatant un aimant permanent à proximité d'un solénoïde ou en faisant varier l'intensité du courant responsable de \vec{B} ;
- une modification de l'orientation du champ magnétique \vec{B} par rapport au circuit. Par exemple en faisant tourner un aimant permanent ou en disposant et en alimentant des bobines de façon adéquate (cf. exercice ??).

Les fluctuations de flux induisent une f.e.m induite dont l'orientation peut se résumer par la loi de Lenz suivante.

◆ Définition : *Loi de Lenz*

| Le courant induit s'oppose par ses effets à la cause qui lui donne naissance.

La loi de Lenz est une loi de modération qui est traduite par le signe $(-)$ présent dans la loi de Faraday devant la dérivée du flux de champ magnétique. Supposons que le flux de champ magnétique augmente. La f.e.m d'induction créée par l'augmentation du flux est source d'un courant induit. Ce dernier

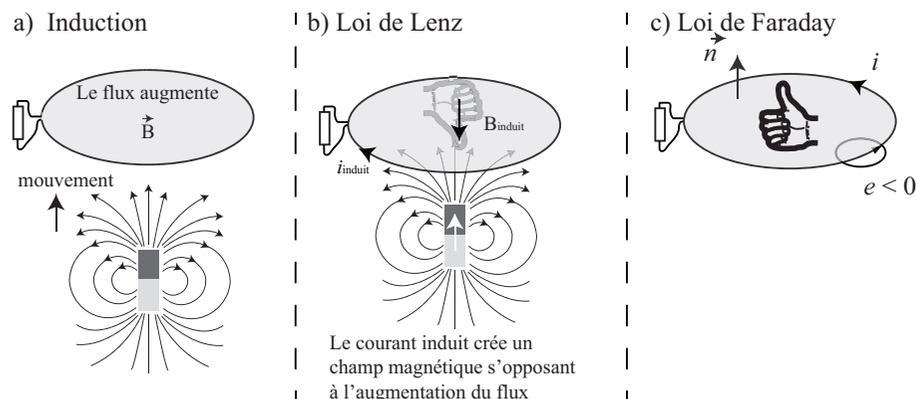


FIGURE 1.3 – Principe de la loi de Lenz et de Faraday.

crée un champ magnétique noté \vec{B}_{induit} qui s'oppose à l'augmentation du flux de champ magnétique. Dans l'exemple suivant (cf. fig. 1.3.a et b), le flux de champ magnétique créé par l'aimant augmente lorsque ce dernier se rapproche du circuit. La loi de Lenz stipule alors qu'un courant induit est responsable d'un champ magnétique induit qui s'oppose à l'augmentation du flux du champ magnétique. En pratique, la surface du circuit est souvent orienté selon le champ magnétique imposé (suivant le vecteur \vec{n} , fig. 1.3.c). L'orientation de la f.e.m induite e suit la règle de la « main droite ». En convention générateur, le courant est orienté dans le sens de la f.e.m e . La loi de Faraday donne une tension négative dans le cas d'une augmentation du flux de champ magnétique ($e = -d\phi/dt$). Cette expression est conforme avec la loi de Lenz indiquant un courant induit i_{induit} d'orientation opposée au courant i du circuit équivalent (fig. 1.3.c).

2 - Flux de \vec{B} à travers un circuit fixe

a) Évaluation du flux

▲ Définition :

Le flux du champ magnétique \vec{B} au travers une surface S est donné par

$$\Phi_S(\vec{B}) = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Le vecteur $d\vec{S} = dS\vec{n}$ est perpendiculaire à S . Il oriente cette surface ainsi que la f.e.m induite (cf. fig. 1.2). Le flux s'exprime en $T \cdot m^2$ (ou Weber - Wb).

Afin d'augmenter l'influence du champ magnétique sur un circuit électrique, on utilise un enroulement de plusieurs spires. Ainsi la surface équivalente du circuit est proportionnelle au nombre de spires.

■ Propriété :

Si le champ magnétique est uniforme et perpendiculaire à la surface (donc parallèle à $d\vec{S}$ alors : $\Phi_S(\vec{B}) = B \times S$.

Si le circuit comporte N spires jointives : $\Phi_{N \text{ spires}}(\vec{B}) = N\Phi_{1 \text{ spire}}(\vec{B})$.

🍃 Exemple 1

Il existe des lampes de poche rechargeables utilisant le principe d'induction. Un aimant cylindrique générant un champ de 0,50 T dans son voisinage proche peut coulisser à l'intérieur d'une bobine constituée de $N = 300$ spires.

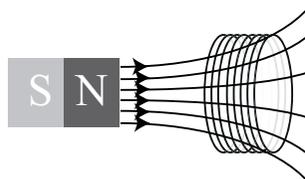


1 - Représenter l'aimant et ses lignes de champ au voisinage de la bobine. Estimer le flux de champ magnétique maximal Φ_0 à travers les spires de rayon $a = 1,0$ cm.

2 - En secouant la lampe à une fréquence de $f = 2\text{ Hz}$, estimer l'amplitude de la f.e.m induite dans la bobine.

Pour s'entraîner : exercice 1

1 - Le champ magnétique créé par l'aimant est selon l'axe des spires. La taille de l'aimant étant adapté à celle des spires, on peut supposer le champ magnétique uniforme sur la surface d'une spire. On obtient donc un flux maximal de



$$\Phi_0 = N \times B \times \pi a^2 = 4,7 \cdot 10^{-2} \text{ T} \cdot \text{m}^2$$

2 - En supposant le mouvement sinusoïdal, pour un passage de l'aimant à travers la bobine le flux, initialement nul, augmente puis diminue. La fréquence associée au flux de champ magnétique est donc double du mouvement de la main. On peut écrire le flux sous la forme $\Phi(t) = \Phi_0 \cos(2\pi \times 2f \times t)$, la loi de Faraday permet alors d'estimer la f.e.m induite :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \underbrace{4\pi f \times \Phi_0}_E \sin(4\pi ft)$$

L'amplitude de cette f.e.m induite vaut alors : $E = 4\pi f \Phi_0 = 1,2 \text{ V}$.

b) Champ tournant

Le calcul du flux de champ magnétique se simplifie grandement si le champ magnétique est uniforme sur la surface. Dans ce cas :

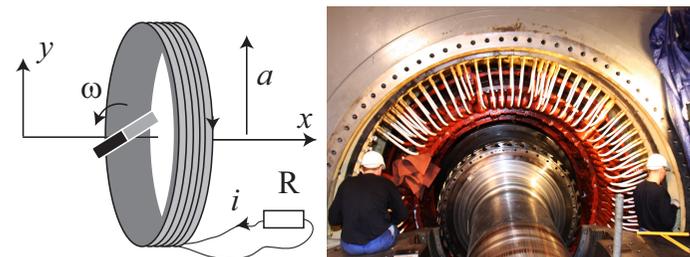
$$\Phi_S(\vec{B}) = \|\vec{B}\| \times S \times \cos \theta$$

où θ est l'angle entre la normale à la surface et le champ magnétique.

Exemple 2 Dans une éolienne, le générateur électrique ou alternateur est constitué d'une bobine fixe soumise à un champ magnétique tournant, comme celui d'un aimant fixé sur un rotor. On simplifie le système en considérant que $N = 500$ spires jointives de rayon $a = 0,1 \text{ m}$ sont plongées dans un champ magnétique de la forme :

$$\vec{B} = B_0(\cos \omega t \vec{e}_x + \sin \omega t \vec{e}_y)$$

avec $B_0 = 1 \text{ T}$ et une fréquence de rotation de $f = \omega/2\pi = 50 \text{ Hz}$.



La bobine est reliée à une résistance $R = 20 \Omega$. On négligera l'auto-inductance de la bobine ^b.

- 1 - Exprimer le flux de champ magnétique créé par l'aimant à travers la bobine.
- 2 - En déduire l'expression du courant $i(t)$.
- 3 - Conclure sur la valeur de la puissance moyenne dissipée dans la résistance par l'éolienne.

- a. Les éoliennes sont équipées d'une boîte de vitesse permettant d'augmenter la vitesse de rotation de l'arbre.
- b. En raison du très grand nombre de spires, cette hypothèse est très discutable.

Pour s'entraîner : exercice 6

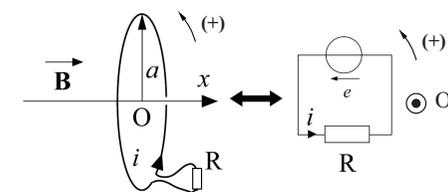
1 - Le champ magnétique est uniforme et perpendiculaire au plan de la spire. Le flux du champ magnétique au travers la bobine est de la forme

$$\Phi = \vec{B} \cdot S \vec{e}_x \text{ soit } \Phi = B_0 \cos \omega t \times N\pi a^2 = \pi N a^2 B_0 \cos \omega t$$

2 - D'après la loi de Faraday, la f.e.m qui en découle est de la forme :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \pi \omega N a^2 B_0 \sin \omega t$$

Le schéma équivalent au système est représenté ci-contre.



Ainsi, l'application de la loi des mailles donne : $i = \frac{e}{R} = \frac{\pi \omega N a^2 B_0}{R} \sin \omega t$.

3 - La puissance Joule est définie par : $\mathcal{P}_J = Ri^2$, on en déduit la valeur moyenne^{1 2} :

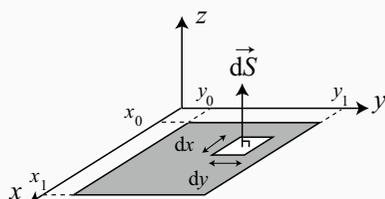
$$\langle \mathcal{P} \rangle = R \langle i^2 \rangle = \frac{(\pi\omega Na^2 B_0)^2}{2R} = 1,2 \text{ MW}$$

c) Champ non uniforme

Lorsque le champ magnétique varie sur la surface du circuit, le calcul du flux de champ magnétique \vec{B} nécessite de décomposer l'intégrale de surface.

Propriété :

La surface infinitésimale est un vecteur normal à la surface qui s'écrit selon les deux autres dimensions. Pour une surface orientée par exemple selon \vec{e}_z :

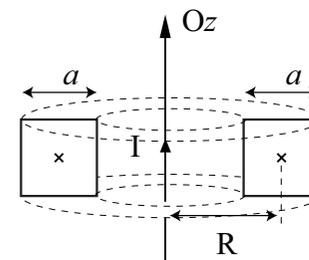


$$\Phi_S(\vec{B}) = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \vec{B}(x,y) \cdot dx dy \vec{e}_z$$

Exemple 3 Si les ampèremètres usuels se branchent en série dans un circuit électrique, une pince ampèremétrique permet de mesurer un courant alternatif sans modifier le circuit électrique. Considérons un fil rectiligne infini d'axe (Oz), parcouru par un courant d'intensité : $i(t) = I_0 \cos \omega t$. On rappelle que le champ magnétique créé par un fil infini parcouru par un courant i est de la forme : $\vec{B}(r) = \frac{\mu i}{2\pi r} \vec{e}_\theta$.

1. La puissance d'une éolienne de 100 m de hauteur est comprise en 1,8 et 3 MW (source www.ecologie.gouv.fr).

2. On rappelle que $\langle \sin^2 \omega t \rangle = 1/2$.



On entoure le fil d'un bobinage constitué d'un tore de section carrée de côté a et de rayon moyen R , sur lequel sont régulièrement enroulées un nombre $N = 1000$ de spires.

- 1 - Calculer le flux à travers une spire du tore.
- 2 - En déduire l'expression de la f.e.m induite dans le bobinage.
- 3 - Calculer la valeur efficace de cette f.e.m induite.

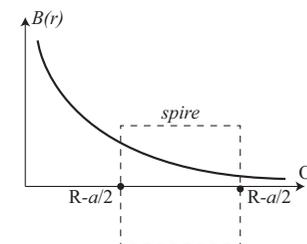
Données :

- Caractéristiques de la pince : $a = 2,0 \text{ cm}$, $R = 5,0 \text{ cm}$
- Courant à mesurer : $I_0 = 40 \text{ A}$ et $\omega = 2\pi f$ avec $f = 50 \text{ Hz}$
- $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ SI}$

Pour s'entraîner : exercice 3, 8

2 - Par définition, $\Phi_1 = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$. Le champ magnétique n'est pas uniforme sur une section puisqu'il est plus important lorsqu'on se rapproche de l'axe. Il faut calculer l'intégrale avec $d\vec{S} = dr dz \vec{e}_\theta$. On obtient :

$$\Phi_1 = \int_{r=R-a/2}^{r=R+a/2} \int_{z=0}^{z=a} \frac{\mu i(t)}{2\pi r} dr dz$$



soit

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 i(t) a}{2\pi} \ln \frac{2R + a}{2R - a}$$

2 - On en déduit que pour N spires :

$$\Phi_N = N\Phi_1 = \frac{N\mu_0 i(t) a}{2\pi} \ln \frac{2R + a}{2R - a}$$

En utilisant la loi de Faraday : $e = -\frac{d\Phi_N}{dt} = \omega N \times \underbrace{\frac{\mu_0 I_0 a}{2\pi} \ln \frac{2R+a}{2R-a}}_{e_{max}} \sin \omega t.$

3 - En simplifiant cette relation avec $\omega = 2\pi f$, la valeur efficace est donnée par :

$$e_{eff} = \frac{e_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{\mu_0 f N I_0 a}{\sqrt{2}} \ln \frac{2R+a}{2R-a} = 14 \text{ mV}$$

La valeur est mesurable, un voltmètre peut facilement mesurer cette valeur et la convertir en courant.

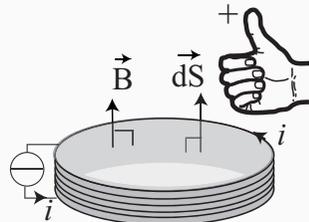
II. Inductance

1 - Inductance propre

Un circuit électrique parcouru par un courant génère un champ magnétique. On peut donc calculer le flux de champ magnétique créée par le circuit, à travers lui-même.

▲ Définition :

On appelle **flux propre**, le flux de champ magnétique créée par un circuit électrique à travers lui-même. La surface du flux étant orientée par le sens du courant.



L'orientation de la surface dans le sens du courant permet de définir un flux positif. Le flux propre est proportionnel au champ magnétique, qui lui même est proportionnel au courant. On peut donc en conclure que le flux propre est proportionnel au courant circulant dans le circuit.

▲ Définition :

On appelle **inductance propre** d'un circuit électrique, le coefficient de proportionnalité entre le flux du champ magnétique au travers ce circuit, et le courant i traversant le circuit et créant le champ magnétique :

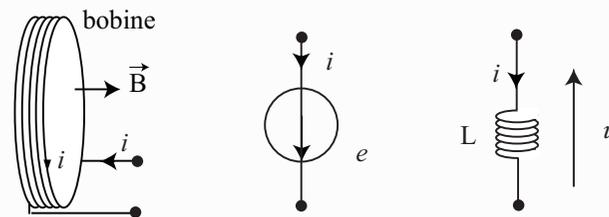
$$\Phi_S(\vec{B}) = L \times i$$

L s'exprime en Henry [H].

L'inductance propre est un coefficient qui dépend de la géométrie du circuit électrique et des matériaux utilisés (notamment de leur perméabilité cf. Tab. 1.1). Le flux est proportionnel à la fois au champ magnétique et à la surface du circuit. Comme le champ magnétique est proportionnel au courant et dépend de la forme du circuit électrique (cf. chap. ??), on en déduit que le flux est proportionnel au courant, le coefficient de proportionnalité dépendant de la géométrie du circuit.

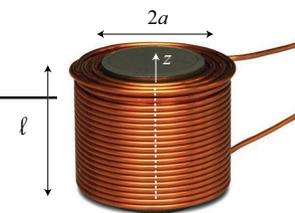
ⓘ Remarque 1 :

La définition de l'inductance propre associée à la loi de Faraday permet de retrouver la relation courant-tension aux bornes d'une bobine. En effet, la f.e.m e issue de la loi de Faraday est orientée en convention générateur tandis que la tension u aux bornes d'une inductance est définie en convention récepteur : $u = -e = L \frac{di}{dt}.$



🍃 Exemple 4

Des solénoïdes comme celui représenté ci-



contre sont utilisés pour les amplificateurs audio de qualité. On notera $\ell = 50 \text{ mm}$ la longueur du solénoïde et $a = 14 \text{ mm}$ son rayon. On supposera que le champ magnétique créée par un tel circuit est donné par l'approximation du solénoïde infini (cf . chap. ??) : $\vec{B} = \mu_0 n i \vec{e}_z$, où $n = 2400 \text{ spires} \cdot \text{m}^{-1}$.

1 - En présence d'un courant i , exprimer le flux propre en fonction de i , n , ℓ et a .

2 - En déduire la valeur de son inductance propre.

Données : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$

Pour s'entraîner : exercice 1, 3, 5

1 - Le champ magnétique est supposé uniforme sur toute la section du solénoïde. Le flux sur une spire est donnée par

$$\Phi_{1 \text{ spire}} = \iint_{1 \text{ spire}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = B \times S = \mu_0 n i \times \pi a^2$$

Le flux propre Φ_P correspondant au flux sur les N spires du solénoïde. Avec $N = n \times \ell$, on obtient :

$$\Phi_P = N \times \Phi_{1 \text{ spire}} \text{ soit } \Phi_P = \mu_0 n^2 \ell \pi a^2 \times i$$

2 - En identifiant l'inductance propre on obtient :

$$L = \mu_0 n^2 \ell \pi a^2 = 2,2 \mu\text{H}$$

On remarque dans l'exemple proposé que plus le nombre de spires est important, plus le champ magnétique est important et plus la surface équivalente du circuit est grande. Chacune des grandeurs précédente étant proportionnelle à N , le flux propre et donc l'inductance propre est proportionnelle à N^2 .

Propriété :

L'inductance propre est proportionnelle au carré du nombre de spires

$$L \propto N^2$$

Remarque 2 :

En plaçant un matériau ferromagnétique dans le solénoïde, il est possible d'augmenter la valeur de l'inductance propre. Le calcul est similaire en remplaçant la perméabilité magnétique du vide μ_0 par la perméabilité du matériau $\mu = \mu_0 \times \mu_r$ (cf table 1.1).

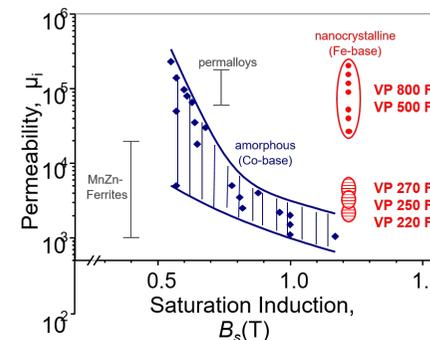
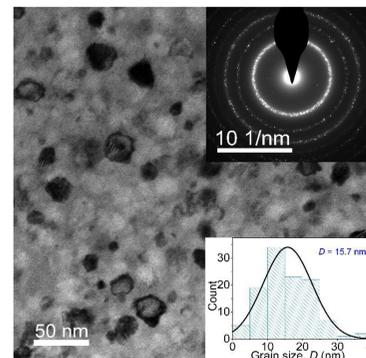


FIGURE 1.4 – (Gauche) Nanocristaux d'alliage magnétique, d'après *Effect of Ge Addition on Magnetic Properties and Crystallization Mechanism of Fe-SiBPNbCu Nanocrystalline Alloy with High Fe Content, Metals 2022*. (Droite) Permeabilité du Vitroperm© produit par VacuumSchmelze GmbH and Co.

La recharge des produits nomades nécessitent des bobines pour abaisser la tension du secteur (220 V). Si les transformateurs d'aujourd'hui sont relativement légers, ils pesaient plusieurs centaines de grammes dans les années 2000, les bobines pouvaient participer à jusqu'à 60% de la masse. À l'heure actuelle, l'utilisation de noyau nanocristalin permet aujourd'hui d'obtenir une perméabilité de l'ordre de 80 000 (cf. fig. 1.4) permettant ainsi de réduire drastiquement la masse de ces dispositifs. Ces nouveaux matériaux sont composés de grains de taille nanométrique par frittage plasma.

Métal	Cobalt	Fer	Alliage Fe/Ni	Nickel
μ_r	250	$1,0 \cdot 10^4$	$1,5 \cdot 10^5$	600

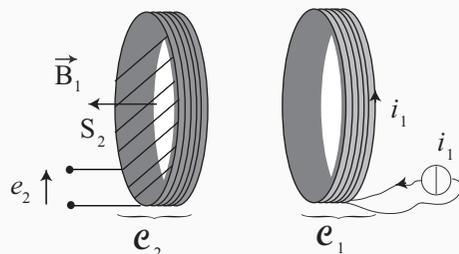
TABLE 1.1 – Perméabilité relative de quelques matériaux

2 - Inductance mutuelle

Lorsque plusieurs circuits électriques sont à proximité l'un de l'autre, le champ magnétique créée par le premier circuit peut influencer le second. Ce phénomène est à l'origine des transferts d'énergie dans les transformateurs, dans les recharges sans fil etc...

◆ Définition :

On appelle **coefficient d'inductance mutuelle** entre deux circuits C_1 et C_2 , le coefficient de proportionnalité entre le flux du champ magnétique \vec{B}_1 créée par C_1 au travers du circuit C_2 et le courant I_1 créant le champ \vec{B}_1 .



$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \Phi_{S_2}(\vec{B}_1) = M_{12} \times i_1 \quad \text{et} \quad \Phi_{2 \rightarrow 1} = \Phi_{S_1}(\vec{B}_2) = M_{21} \times i_2$$

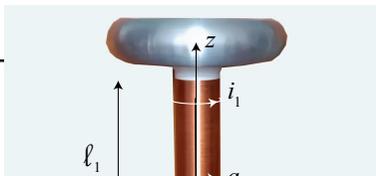
Le signe du coefficient d'inductance mutuelle dépend du choix d'orientation du circuit conformément au calcul du flux. On choisira autant que possible des orientations compatibles avec des valeurs positives.

◆ Propriété :

Le théorème de Neumann précise que les coefficients d'inductance mutuelle entre les circuits C_1 et C_2 sont égaux : $|M_{12}| = |M_{21}| = M$. Une démonstration est proposée annexe I.

🍃 Exemple 5

Les bobines Tesla du nom de son inven-



teur permet d'obtenir de très hautes tensions. Il s'agit de deux bobines concentriques d'axe Oz, de longueur respectives $\ell_1 = 50$ cm et $\ell_2 = 7$ cm pour des rayons $a_1 = 5$ cm et $a_2 = 7$ cm. La bobine intérieure contient $N_1 = 1000$ spires tandis que la bobine extérieure en comprend $N_2 = 5$ spires.

1 - En notant i_1 le courant parcourant le solénoïde (1), exprimer le coefficient d'inductance mutuelle M_{12} .

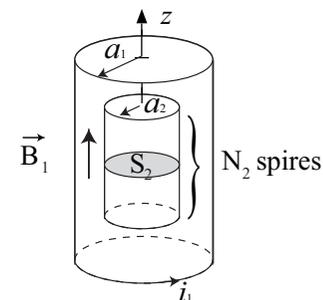
2 - En utilisant le théorème de Neumann, en déduire l'expression du coefficient d'inductance du circuit d'excitation (2) à travers le circuit (1) et le calculer.

Données : champ créé à l'intérieur d'un solénoïde infini parcouru par un courant i et comportant n spires par unité de longueur : $B = \mu_0 n i$.

Données : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ SI

Pour s'entraîner : exercice 6, 2

Le champ créé par le solénoïde (1) à l'intérieur de celui-ci est de la forme : $\vec{B}_1 = \mu_0 n_1 i_1 \vec{e}_z$, avec $n_1 = N_1/\ell_1$. Le champ magnétique est nul à l'extérieur du solénoïde (1). Le flux de ce champ au travers d'une spire du solénoïde (2) est donc restreint à la surface S_1 : $\Phi_{1 \text{ spire}} = B_1 \times S_2 = \mu_0 n_1 i_1 \times \pi a_1^2$. On en déduit que le flux de (1) sur (2) est



$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = N_2 \times \Phi_{1 \text{ spire}} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{\ell_1} i_1 \times \pi a_1^2$$

En identifiant le coefficient d'inductance mutuelle, on obtient : $M_{12} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{\ell_1} \pi a_1^2$.

2 - Le théorème de Neumann permet d'obtenir le coefficient d'inductance du circuit 2 sur le circuit 1 : $M_{21} = M_{12} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{\ell_1} \pi a_1^2 = 100$ mH.

Remarque 3 :

L'astuce de Nikola Tesla en 1891 consiste à réaliser un circuit oscillant à haute fréquence (~ 200 kHz) et résonant en associant la bobine (2) et un condensateur. Un facteur de qualité important permet une élévation de tension au primaire qui est augmenté par le nombre de spires de N_1 . Aux Etats-Unis, de nombreux bricoleurs amateurs cherchent à créer des éclairs les plus grands possibles, en utilisant des tensions de plusieurs millions de volts (cf. QR-code ci-contre)... Tout ceci n'est évidemment pas sans risque.



III. Transformateur

1 - Modèle du transformateur idéal

L'efficacité d'un transformateur repose sur la transmission du flux de champ magnétique d'un circuit à l'autre. Pour éviter de perdre de l'énergie magnétique, les lignes de champ magnétique peuvent être guidés par une carcasse ferromagnétique. La partie métallique joue alors le rôle de canalisation pour le flux magnétique.

Propriété :

Un couplage magnétique est dit **parfait** si toutes les lignes de courant issues d'un circuit traversent l'autre circuit. Dans ces conditions :

$$|M| = \sqrt{L_1 L_2}$$

Pour les couplages non-parfaits, le coefficient d'inductance mutuel vérifie (cf. annexe. II) :

$$|M| < \sqrt{L_1 L_2}$$

Un transformateur est constitué d'une carcasse ferromagnétique, sur lequel sont enroulés deux bobinages (spires), l'un appelé primaire, l'autre secondaire. On appelle enroulement primaire celui placé du côté de la source d'alimentation. L'enroulement secondaire étant placé du côté du dispositif à alimenter. Dans les transformateurs monophasé bas de gamme, les deux enroulements sont concentriques (cf. fig. 1.5).

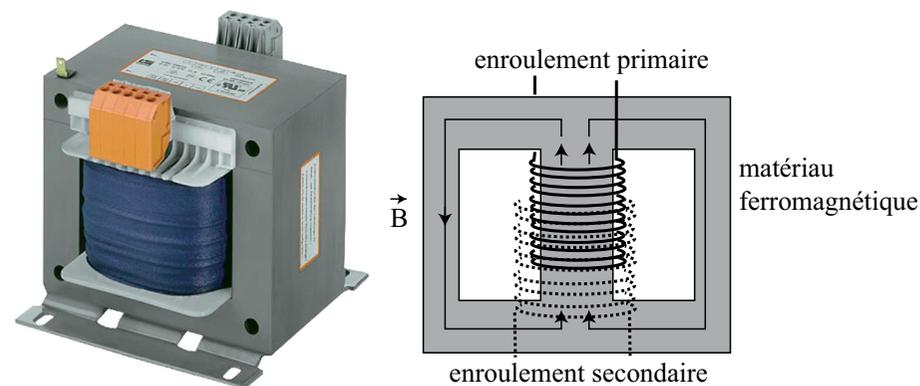


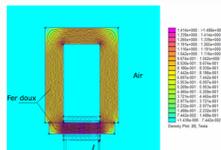
FIGURE 1.5 – (Gauche) Transformateur monophasé commercial et sa carcasse ferromagnétique. (Droite) Principe de l'enroulement.

Un transformateur idéal suppose que

- le matériau magnétique assurant le couplage est linéaire (pas de perte lors de l'aimantation) ;
- le couplage magnétique parfait (toutes les lignes de champ magnétique passe à travers les deux circuits) ;
- les résistances des enroulements sont nulles (pas de pertes Joule) ;
- l'absence de courants de Foucault dans le matériau ferromagnétique.

Remarque 4 :

Pour un couplage **parfait**, Les bobines dans les transformateurs sont enroulées autour d'un matériau ferromagnétique. Ainsi le champ magnétique crée par une bobine est guidé par le noyau ferromagnétique et maximise le couplage. En contrepartie, de l'énergie est perdue pour faire varier l'aimantation du matériau avec le courant sinusoïdal.



Les noyaux ferromagnétiques sont en général des structures toriques permettant d'éviter les fuites magnétiques.

2 - Équations électriques

Il existe différentes représentations électriques des transformateurs (cf. fig. 1.6), nous utiliserons principalement la représentation de droite où figure le coefficient d'inductance mutuelles M .

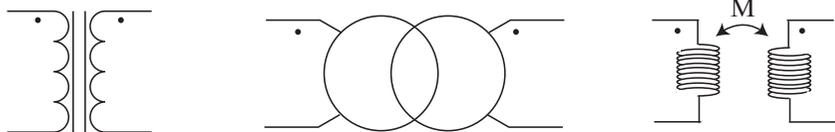


FIGURE 1.6 – Symboles électriques usuels pour les transformateurs.

Le sens d'enroulement des bobinages conditionne le signe du coefficient de couplage mutuel M . Sur les schémas électriques, il est parfois précisé le sens d'enroulement des bobinages par des points noirs qui permettent de repérer les deux bornes dites homologues. Lorsque le courant est positif et rentre par ces bornes, le flux de champ magnétique est orienté dans le même sens pour chacun des circuits. Dans cet ouvrage, nous nous restreindrons à une orientation tel que le coefficient d'inductance est positif : $M > 0$ (cf. fig. 1.7).

Considérons deux circuits \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 couplés par mutuelle d'inductance M . Chaque enroulement possède une inductance L_1 et L_2 . On note i_1 et i_2 les courants respectivement dans \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 . Les tensions u_1 et e_2 peuvent s'exprimer à l'aide de la loi de Faraday. Le champ magnétique total est créé par chacun des circuits de sorte que le flux total Φ_1 au travers \mathcal{C}_1 est de la forme

$$\Phi_1 = \Phi_{1 \rightarrow 1} + \Phi_{2 \rightarrow 1}$$

où $\Phi_{1 \rightarrow 1}$ est le flux propre pour le circuit 1 et $\Phi_{2 \rightarrow 1}$ est le flux de champ magnétique créé par le circuit 2 sur le circuit 1. Par définition des coefficients d'inductance propre et mutuel :

$$\Phi_1 = Li_1 + Mi_2$$

L'enroulement (1) est donc assimilé à un générateur de tension. La f.e.m est orientée dans le même sens que le courant (convention générateur, cf. fig. 1.7). En utilisant la loi de Faraday, cette tension vaut :

$$e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

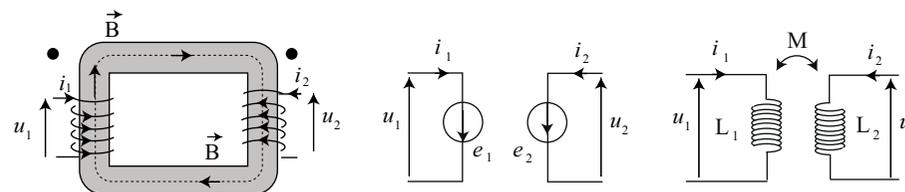


FIGURE 1.7 – Transformateur et schéma électrique, avec f.e.m induite ou inductance.

La tension u_1 aux bornes d'une bobine est définie en convention récepteur.

Ainsi, $u_1 = -e_1$ et vaut

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

Un raisonnement identique conduit à

$$e_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} \quad \text{et} \quad u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

Propriété :

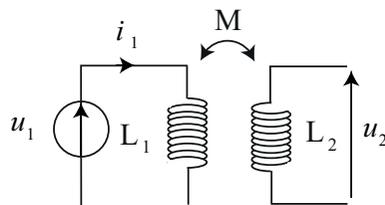
Les tensions aux bornes des enroulements d'un transformateur dépendent de la dérivée temporelle du flux magnétique. Un transformateur ne fonctionne donc pas avec des alimentations continues.

3 - Lois de transformation

a) Lois de transformation en tension

Pour un transformateur parfait, le coefficient d'inductance mutuelle vaut $M = \sqrt{L_1 L_2}$. Considérons deux enroulement de section identique, soit N_1 le nombre de spires de C_1 et N_2 le nombre de spires de C_2 . L'inductance propre est proportionnel au carré du nombre de spires (cf. II.1) alors $L_1 = N_1^2 \times L_0$ et $L_2 = N_2^2 \times L_0$ où L_0 est l'inductance d'une spire. On en déduit que $M = N_1 N_2 \times L_0$. Lorsque le circuit secondaire est vide, le courant i_2 est nul, les équations aux bornes des inductances deviennent : $u_1 = L_1 di_1/dt$ et $u_2 = M di_1/dt$. On en déduit que le rapport des tensions vérifie :

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{M}{L_1} = \frac{N_2}{N_1}$$



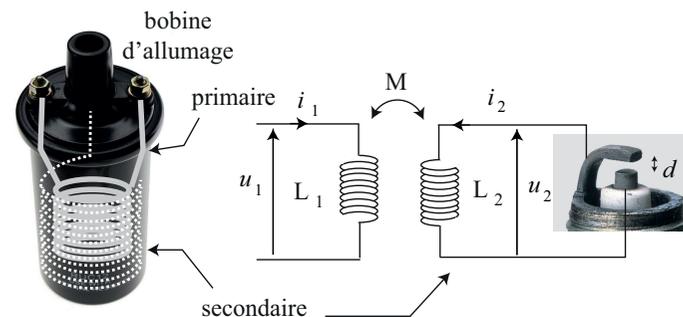
Propriété :

Dans un transformateur idéal comprenant N_1 spires à l'enroulement primaire et N_2 spires à l'enroulement secondaire, le rapport des tensions à vide vaut :

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{N_2}{N_1} = m$$

Exemple 6

Dans les moteurs thermiques, pour faire exploser le mélange air-essence, on utilise une bobine d'allumage composée de deux enroulements concentriques comprenant $N_1 = 10$ spires et $N_2 = 1000$ spires.



On considère que le primaire est alimenté par une tension sinusoïdale $u_1 = U_1 \cos \omega t$ avec $U_1 = 400$ V. On suppose que la résistance du primaire est négligeable et que le secondaire est connecté à une bougie d'allumage constituée de deux électrodes métalliques distantes de $d = 0,8$ mm. On supposera les inductances pouvant s'écrire sous la forme $L_1 = N_1^2 L_0$ et $L_2 = N_2^2 L_0$.

- 1 - Écrire les équations électriques pour ce transformateur en supposant que le courant i_2 est nul.
- 2 - Exprimer le rapport des tensions u_2/u_1 en supposant le couplage magnétique parfait. En déduire l'amplitude de la tension u_2 .
- 3 - Estimer l'amplitude du champ électrique entre les électrodes de la bougie. Conclure.

Pour s'entraîner : exercice

1 - Les équations électriques pour ce transformateur sont :

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \quad \text{et} \quad u_2 = M \frac{di_1}{dt}$$

2 - En supposant le transformateur idéal $M = \sqrt{L_1 L_2} = N_1 N_2 L_0$. On en déduit que le rapport des tensions vérifie : $u_2/u_1 = M/L_1 = N_2/N_1 = 100$. L'amplitude de la tension u_2 vaut donc : $U_2 = N_2 U_1/N_1 = 40 \text{ kV}$.

2 - Sur une distance d , le champ électrique vaut : $||\vec{E}|| = \frac{U_2}{d} \approx 50 \cdot 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$. On obtient un champ largement supérieur au champ disruptif de l'air ($3 \cdot 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ cf. chap. ??). Il est donc probable qu'une étincelle se forme.

Remarque 5 :

Le cas $N_1 = N_2$ permet d'obtenir un transformateur d'isolement (cf. fig. 1.8). En effet, si l'enroulement primaire est relié à la masse, l'enroulement secondaire constitue un circuit isolé de la masse. Les transformateurs d'isolement sont utilisés pour éviter les boucles de masse et la mise à la terre d'équipement de test.

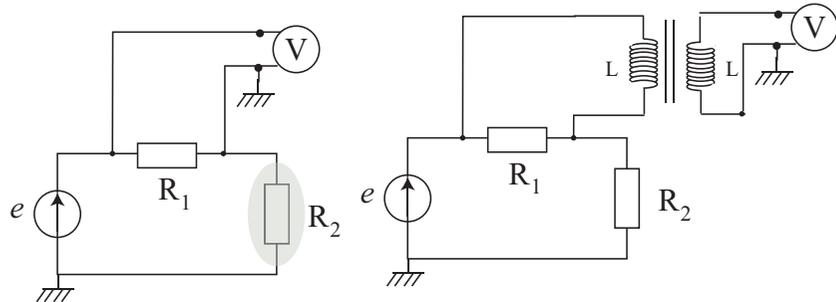


FIGURE 1.8 – Principe du transformateur d'isolement.

La mesure de la tension aux bornes de la résistance R_1 par un voltmètre dont une borne est reliée à la masse conduit sur le circuit de gauche à un court circuit au niveau de la résistance R_2 puisque chacune des bornes est reliée à une masse : celle du générateur et celle du voltmètre. Un montage avec un transformateur d'isolement permet de supprimer ce problème.

b) Lois de transformation en courant

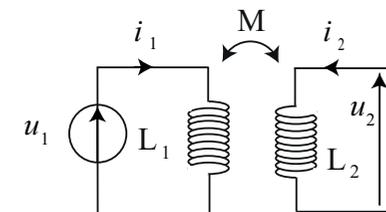
Si le circuit C_2 est en court-circuit : $u_2 = 0$. On en déduit que :

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0$$

Avec des grandeurs périodiques, l'intégration de l'équation précédente devient $L_2 i_2 + M i_1 = 0$. Considérons un transformateur parfait, tel que les inductances propre et mutuelle s'écrivent $L_2 = N_2^2 L_0$

et $M = \sqrt{L_1 L_2} = N_1 N_2 L_0$.

$$N_2^2 L_0 i_2 + N_1 N_2 L_0 i_1 = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{i_2}{i_1} = -\frac{N_1}{N_2}$$

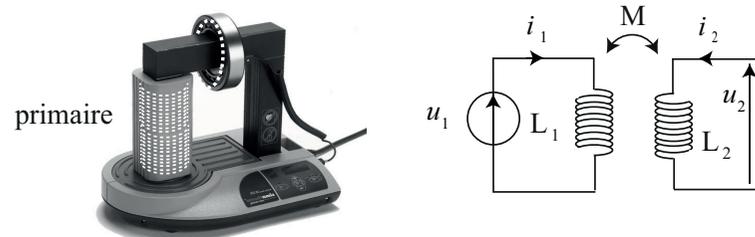


Propriété :

Dans un transformateur idéal comprenant N_1 spires à l'enroulement primaire et N_2 spires à l'enroulement secondaire, le rapport des courants en court-circuit vaut :

$$\frac{i_2}{i_1} = -\frac{N_1}{N_2} = -\frac{1}{m}$$

Exemple 7 Pour ajuster les roulements à billes sur un axe, il est nécessaire de les chauffer légèrement pour les dilater. Dans le dispositif ci-contre, le primaire est composé de $N_1 = 100$ spires alimentées par un courant sinusoïdale de la forme $i_1 = I_1 \cos \omega t$ avec $I_1 = 1 \text{ A}$ tandis que le secondaire est composé du roulement assimilé à une seule spire.



- 1 - Écrire les équations électriques pour ce transformateur.
- 2 - Exprimer le rapport des tensions i_2/i_1 en supposant le couplage magnétique parfait. En déduire l'amplitude de l'intensité I_2 .
- 3 - En supposant que les valeurs précédentes sont valables avec une résistance $R_2 = 0,1 \Omega$, estimer la puissance de chauffage.

Pour s'entraîner : exercice 9

1 - Pour ce transformateur en court-circuit :

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0$$

2 - Avec des grandeurs périodiques, l'intégration de l'équation au secondaire est $L_2 i_2 + M i_1 = 0$. Considérons un transformateur parfait, tel que les inductances propre et mutuelle s'écrivent $L_2 = N_2^2 L_0$ et $M = \sqrt{L_1 L_2} = N_1 N_2 L_0$.

$$N_2^2 L_0 i_2 + N_1 N_2 L_0 i_1 = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{i_2}{i_1} = -\frac{N_1}{N_2} = -100$$

3 - Pour des grandeurs sinusoïdales, la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans le roulement à bille vaut donc :

$$\langle \mathcal{P}_J \rangle = \frac{1}{2} R I_2^2 \approx 500 \text{ W}$$

Il s'agit de l'ordre de grandeur d'un petit système de chauffage. L'intérêt est ici que la chaleur se concentre principalement sur le roulement à billes.

c) Bilan de puissance

Dans le cas général, les équations électriques sont :

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

Afin d'effectuer un bilan de puissance, multiplions par i_1 et la première équation et par i_2 la seconde :

$$\begin{cases} u_1 i_1 = L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + M i_1 \frac{di_2}{dt} \\ u_2 i_2 = L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} + M i_2 \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

On reconnaît $\mathcal{P}_1 = u_1 i_1$ la puissance reçue au primaire et $\mathcal{P}_2 = u_2 i_2$ celle du secondaire, la somme des équations précédentes s'écrit :

$$\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = \underbrace{L_1 i_1 \frac{di_1}{dt}}_{\frac{d}{dt} \frac{1}{2} L_1 i_1^2} + \underbrace{L_2 i_2 \frac{di_2}{dt}}_{\frac{d}{dt} \frac{1}{2} L_2 i_2^2} + \underbrace{M \left(i_1 \frac{di_2}{dt} + i_2 \frac{di_1}{dt} \right)}_{\frac{d}{dt} M i_1 i_2}$$

Le terme de droite est la puissance contenue dans le transformateur. La puissance dérive d'une énergie magnétique contenue dans le transformateur.

$$\mathcal{E}_{mag} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

Pour des grandeurs périodiques, on peut donc conclure qu'en valeur moyenne³ :

$$\langle \mathcal{P}_1 \rangle + \langle \mathcal{P}_2 \rangle = \left\langle \frac{d\mathcal{E}_{mag}}{dt} \right\rangle = 0$$

Cette équation traduit la transmission de puissance du primaire au secondaire sans perte.

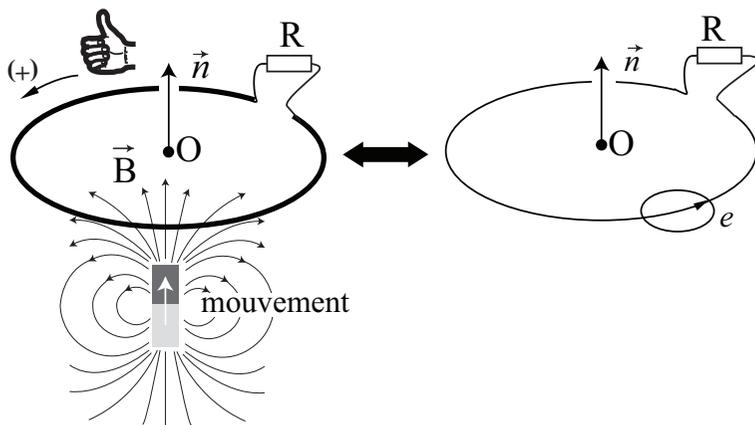
3. Pour des signaux périodiques, on obtient $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 \propto I_1 I_2 \cos(\omega t) \sin(\omega t)$ dont la moyenne temporelle est nulle.

L'essentiel

Dans un circuit \mathcal{C} , fermant une surface S orientée, soumis une variation de flux de magnétique, apparaît une force électromotrice (f.e.m.) induite donnée par la **loi de Faraday** :

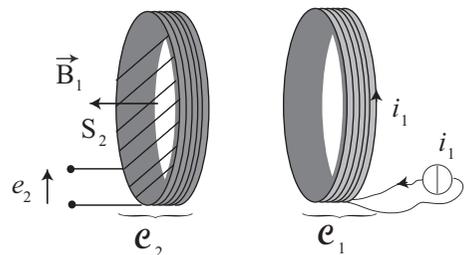
$$e = - \frac{d\Phi_S(\vec{B})}{dt}$$

où $\Phi_S(\vec{B})$ est le flux de champ magnétique à travers la surface S généré par le circuit \mathcal{C} .

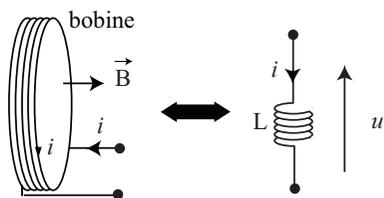


On appelle **inductance propre** d'un circuit électrique, le coefficient de proportionnalité entre le flux de champ magnétique au travers ce circuit, et le courant i traversant le circuit et responsable du champ magnétique :

$$\Phi_S(\vec{B}) = L \times i$$



On appelle **coefficient d'inductance mutuelle** entre deux circuits \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 , le coefficient de proportionnalité entre le flux du champ magnétique \vec{B}_1 créé par \mathcal{C}_1 au travers du circuit \mathcal{C}_2 et le courant I_1 créant le champ \vec{B}_1 .



$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \Phi_{S_2}(\vec{B}_1) = M_{12} \times i_1 \quad \text{et} \quad \Phi_{2 \rightarrow 1} = \Phi_{S_1}(\vec{B}_2) = M_{21} \times i_2$$

Le signe du coefficient d'inductance mutuelle dépend du choix d'orientation du circuit. Le théorème de Neumann précise que les coefficients d'inductance mutuelle entre les circuits \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 sont identiques : $M_{12} = M_{21} = M$

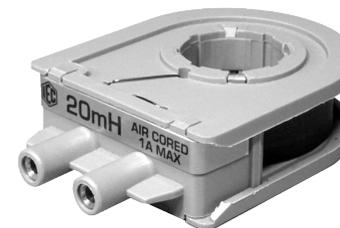
Exercices

Les classiques

Exercice 1

solution p.??

On considère une bobine plate de rayon $a = 1,2 \text{ cm}$ comportant $N = 730$ spires jointives et parcourue par un courant $I = 1,0 \text{ A}$.



1 - Déterminer l'orientation du champ au centre de la bobine.

2 - On admet que le champ moyen sur la section de la bobine vaut : $B_M = 1,56 \times B(O)$ où $B(O)$ est le champ magnétique au centre du dispositif. Calculer B_M .

3 - Exprimer puis calculer l'inductance propre L de cette bobine. Quelle serait la valeur de L pour un courant d'intensité 2 A ?

Données :

- Champ magnétique au centre d'une spire de rayon R , parcourue par un courant I : $B = \frac{\mu_0 I}{2R}$;
- $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$

Exercice 2

solution p.??

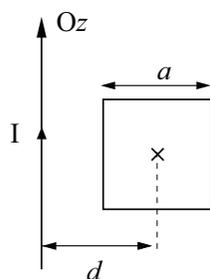
On considère un fil infini parcouru par un courant à proximité d'un carré de côté a .

1 - Établir l'expression du champ magnétique créé par un fil infini parcouru par un courant I .

2 - Calculer le flux magnétique à travers le carré de côté a dont le centre est situé à une distance d du fil.

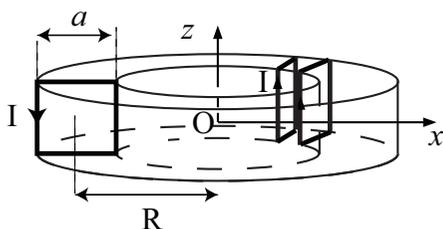
3 - En partant de la relation liant le flux à l'intensité créant ce flux, exprimer le coefficient de mutuelle M entre le fil et l'anneau.

4 - Soit N le nombre d'anneaux présent à la distance d du fil. Exprimer alors le coefficient de mutuelle M_{tot} de l'ensemble en fonction de N et M .


Exercice 3

solution p.??

Une bobine torique est constituée par un fil conducteur bobiné en spires jointives sur un tore circulaire à section carrée de côté a et de rayon moyen R . On désigne par N le nombre total de spires et par I le courant qui les parcourt. Le matériau constituant le tore est ferromagnétique, on note $\mu = \mu_0 \mu_r$ la perméabilité magnétique de ce matériau.



1 - Déterminer, à l'intérieur du tore, l'orientation du champ \vec{B} .
 2 - Soit M un point à l'intérieur du tore, déterminer le champ magnétique. $\vec{B}(M)$. *Le correcteur tiendra compte de la rigueur avec laquelle le calcul est mené.*

3 - Calculer le flux Φ_1 du champ magnétique à travers la surface d'une spire dont la normale est orientée dans le sens du champ. En déduire l'expression du flux total sur l'ensemble du circuit noté Φ_{tot} .

4 - Montrer, dans le cas où $a \ll R$, que le flux peut s'écrire sous la forme

$$\Phi_{\text{tot}} = \frac{\mu N^2 I}{2\pi R} a^2$$

5 - À l'aide des données, déterminer la valeur de la perméabilité relative μ_r du matériau utilisé pour réaliser le tore. On justifiera la formule du flux employée à l'aide des données numériques fournies.

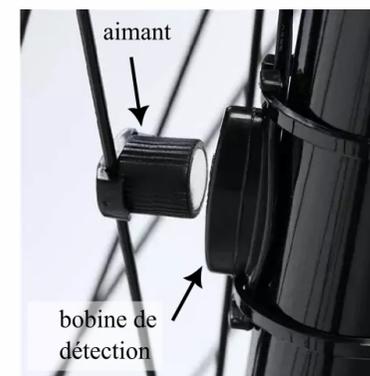
Données :

- perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$
- côté de la section du tore : $a = 12 \text{ mm}$;
- Rayon moyen : $R = 32 \text{ mm}$;
- nombre de spires : $N = 50$;
- inductance propre : $L = 12 \text{ mH}$;
- Développements limités : $\frac{1}{1-x} = 1+x+o(x)$, $\ln(1+x) = x+o(x)$.

Problème ouvert
Exercice 4

solution p.??

Un compteur de vélo utilise un aimant de diamètre $d = 1 \text{ cm}$ fixé à la roue. Lorsque le vélo avance, l'aimant passe devant un détecteur assimilé à une bobine de $N = 100$ spires de même diamètre d . On estime que le champ magnétique créé par l'aimant est voisin de $B = 10 \text{ mT}$ à proximité de la bobine.



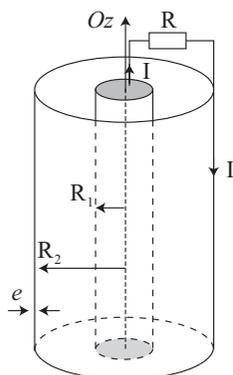
Estimer l'amplitude de la tension aux bornes de la bobine de détection lorsque l'aimant possède une vitesse de $v = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Les difficiles

Exercice 5

solution p.??

La gaine intérieure pleine, de rayon R_1 , du câble coaxial de hauteur $h \gg R_2$ représenté ci-contre, est parcourue par un courant I généré par un courant volumique $\vec{j}_1 = j_1 \vec{e}_z$. L'armature cylindrique de rayon R_2 et d'épaisseur e (non représentée sur le schéma), contenant la gaine extérieure, est parcourue par un courant volumique $\vec{j}_2 = -j_2 \vec{e}_z$. On négligera les effets de bord ainsi que l'énergie électromagnétique stockée dans les zones où $0 < r < R_1$ et $R_2 < r < R_2 + e$.



- 1 - Exprimer j_1 et j_2 en fonction de I , R_1 , R_2 et e .
- 2 - Déterminer le champ $\vec{B}(r, \theta, z)$ en tout point de l'espace en fonction de I , e , R_1 , R_2 et autres constantes nécessaires. Tracer l'allure de $\|\vec{B}(M)\|$.
- 3 - Déterminer le flux de champ magnétique sur le circuit électrique créée.
- 4 - Quelle est alors son inductance propre ?

Exercice 6

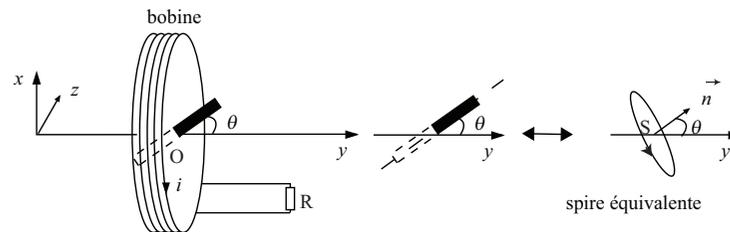
solution p.??

On peut représenter un alternateur de bicyclette de la façon suivante :

- un aimant permanent, assimilable à un dipôle magnétique de moment \vec{M} tourne dans le plan (O, y, z) en faisant avec l'axe (O, \vec{e}_y) un angle $\theta = \omega t$, avec ω constante ;
- une bobine comportant N tours de fil, chaque tour étant assimilable à une spire de rayon a , de résistance r et d'inductance L est placée dans le plan (O, x, z) , centrée en O , sa normale étant dans le sens de \vec{e}_y . Cette bobine, branchée en série avec une résistance R représentant les lampes de la bicyclette, est parcourue par un courant $i(t)$.

(On rappelle qu'un dipôle magnétique de moment \vec{M} est équivalent à

une boucle de courant $\vec{M} = I.S\vec{n}$, S étant supposé beaucoup plus petite que la surface d'une spire de la bobine, et \vec{n} est le vecteur normal à S).



L'expression du champ magnétique créé, en un point de son axe, par un bobine circulaire de rayon a , d'axe Oy , comportant N spires parcourues par le courant $i(t)$, est :

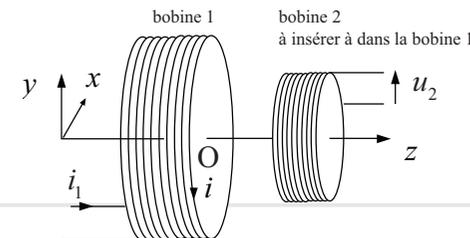
$$B(O) = \frac{\mu_0 N i(t)}{2a}$$

- 1 - Exprimer le flux Φ_B du champ magnétique créé par cette bobine à travers la spire, équivalente au dipôle magnétique, de vecteur surface \vec{S} .
- 2 - En utilisant les propriétés des coefficients d'inductance mutuelle M_{12} et M_{21} de deux circuits (1) et (2), déduire de ce qui précède le flux magnétique Φ_M envoyé par le dipôle dans la bobine de rayon a en fonction du temps t . On exprimera le résultat en fonction de N, I, a, ω, t et de la perméabilité magnétique du vide μ_0 .
- 3 - En déduire le flux total Φ traversant la bobine, puis la force électromotrice d'induction e dont la bobine est le siège, en fonction de $\mathcal{M}, N, L, a, i, \omega$ et μ_0 .
- 4 - En déduire l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$.
- 5 - En régime permanent, on pose $i(t) = I_0 \cos(\omega t + \psi)$, I étant un nombre réel positif. Déterminer les expressions de I_0 et ψ en fonction des données du problème.

Exercice 7

solution p.??

On place deux bobines cylindriques assez longues de telle sorte qu'elles aient le même axe de révolution. La bobine la plus grande de résistance R_1 et d'auto-inductance



L_1 est alimentée par un générateur de tension sinusoïdale de force électromotrice $e_g = e_m \cos(\omega t + \phi)$ et de résistance interne $R_g = 50 \Omega$. La valeur efficace de la force électromotrice du générateur vaut $e_{eff} = 7,31$ V. Par ailleurs, un voltmètre d'impédance infinie indique la tension efficace aux bornes de la petite bobine (notée 2) située à l'intérieur de l'autre bobine.

Le tableau ci-dessous consigne des valeurs numériques de U_2 (valeur efficace de la tension aux bornes de la bobine 2) en fonction de la fréquence f imposée par le générateur.

f en Hz	31	50	78,6	110	1000	2200
U_2 en V	0,161	à,242	0,323	0,376	0,478	0,480

1 - On considère le filtre de tension d'entrée e_g et de tension de sortie u_2 . Montrer par une construction graphique à réaliser directement sur votre copie que ces résultats sont compatibles avec un comportement du premier ordre.

2 - Indiquer les valeurs numériques du gain statique H_0 dans la bande passante et de la fréquence de coupure f_1 .

Par un choix convenable de date origine, l'intensité du courant dans la bobine vaut $i_1(t) = I_m \cos \omega t$.

3 - Relier l'amplitude de l'intensité circulant dans cette bobine aux caractéristiques électriques du circuit. Exprimer de même la phase origine ϕ_e de la force électromotrice du générateur e_g .

4 - Rappeler les caractéristiques du champ magnétique dans un solénoïde suffisamment long pour que l'on puisse négliger les effets de bords sachant que la bobine de longueur l_1 comporte N_1 spires. Mettre l'expression de la composante du champ magnétique suivant l'axe de la bobine sous la forme $\underline{B}_z = f(\omega)\underline{e}_g$.

5 - La bobine de détection 2 de N_2 spires circulaires de rayon r_2 est reliée à un oscilloscope de très grande impédance d'entrée aux fréquences considérées. Exprimer en notation complexe la tension u_2 aux bornes de la bobine de détection en fonction de \underline{B}_z . On précisera sur un schéma la convention électrocinétique d'orientation retenue.

6 - En déduire l'expression de la fonction de transfert \underline{H} du filtre de

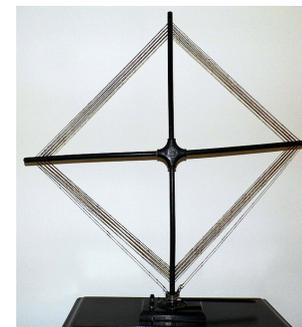
tension d'entrée e_g et de tension de sortie u_2 . On donnera l'expression du gain H_0 dans la bande passante et de la fréquence de coupure f_1 .

7 - À l'aide des données expérimentales, déterminer l'inductance L_1 de la bobine sachant que $R_1 = 11,2 \Omega$.

Exercice 8

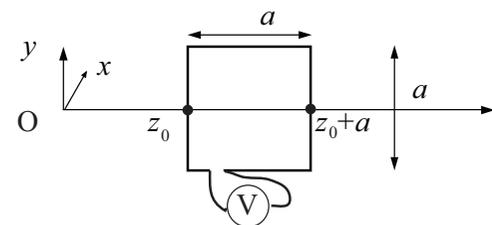
solution p.??

Au début du XX^e siècle, on détectait une onde électromagnétique à l'aide d'un cadre métallique carré (cf. figure ci-contre sous licence CC). Pour simplifier les calculs, on considère que le cadre est pivoté de 45° , le côté est noté a , le cadre est orienté par le vecteur normale $\vec{N} = \vec{e}_x$. Son centre est à l'abscisse $z_0 + a/2$ et les brins verticaux aux abscisses z_0 et $z_0 + a$. L'onde magnétique arrivant sur le cadre a pour expression :



$$\vec{B} = B_0 \cos(\omega(t - z/c)) \vec{e}_x$$

où B_0 est une constante positive, ω est la pulsation de l'onde et c la vitesse de la lumière.



1 - Calculer le flux Φ du champ magnétique à travers le cadre à un instant t . En déduire la f.e.m induite $e(t)$ dans le cadre. On posera

$$\phi_0 = \frac{z_0 + a/2}{c}$$

2 - Le voltmètre mesure une tension efficace U_{eff} . Déterminer son expression.

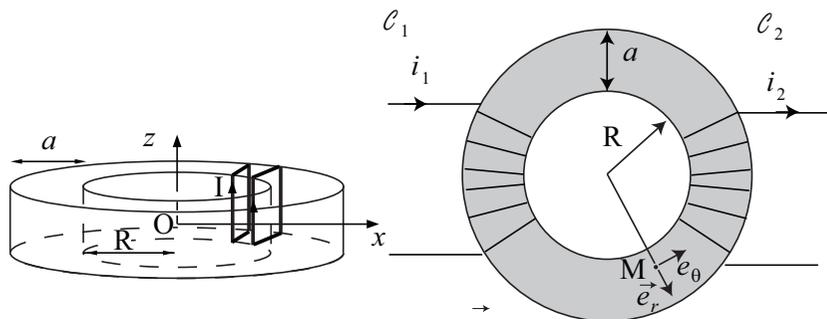
3 - La valeur de a étant donnée, montrer qu'il existe des valeurs ω_{max} et ω_{min} pour lesquelles, la valeur de la tension efficace est respectivement maximale et nulle.

Données : $\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p - q}{2} \cos \frac{p + q}{2}$

Exercice 9

solution p.??

On étudie un modèle simplifié de transformateur schématisé ci-après. Il est constitué d'un matériau magnétique torique d'axe (Oz) à section carrée de côté a et de rayon intérieur R . On suppose que le milieu magnétique est parfait. L'espace est rapporté à la base cylindrique illustrée pour un point M quelconque sur le schéma suivant.



Le bobinage dit « primaire » noté \mathcal{C}_1 est enroulé en N_1 spires autour de ce tore. Il est parcouru par un courant d'intensité i_1 . Le bobinage dit « secondaire » noté \mathcal{C}_2 est, de la même manière, enroulé en N_2 spires autour de ce tore et est parcouru par un courant d'intensité i_2 . On supposera que le tore constitué d'un matériau ferromagnétique se comporte de manière analogue au vide. Les expressions utilisant μ_0 la perméabilité magnétique du vide seront identiques dans le matériau en utilisant μ sa perméabilité.

Données : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$

- 1 - Justifier que le champ magnétique \vec{B}_1 créé à l'intérieur du tore par le courant circulant dans \mathcal{C}_1 est de la forme : $\vec{B}_1(r, \theta, z) = B_1(r, z) \vec{e}_\theta /$
- 2 - En appliquant le théorème d'Ampère à un contour soigneusement précisé, déterminer le champ magnétique créé par le circuit \mathcal{C}_1 en tout point à l'intérieur du tore.
- 3 - Établir l'expression du flux magnétique ϕ du champ magnétique à travers une spire du circuit \mathcal{C}_1 .
- 4 - En déduire le flux total Φ au travers des N_1 spires du circuit \mathcal{C}_1 .

5 - Rappeler la définition de l'inductance propre L (ou coefficient d'auto-inductance).

6 - En déduire que l'inductance propre du circuit \mathcal{C}_1 est donnée par :

$$L_1 = N_1^2 \frac{a\mu}{2\pi} \ln \frac{R+a}{R}$$

7 - Quelle est alors l'expression de l'inductance propre du circuit \mathcal{C}_2 ?

8 - Rappeler la définition du coefficient de mutuelle inductance M . Démontrer que ce coefficient M est donné par :

$$M = N_1 N_2 \frac{a\mu}{2\pi} \ln \frac{R+a}{R}$$

9 - La résistance des bobinages étant négligée, exprimer les tensions u_1 et u_2 aux bornes du primaire et du secondaire en fonction des dérivées par rapport au temps de i_1 et i_2 et des coefficients L_1 , L_2 et M .

10 - Le fonctionnement d'un transformateur est-il possible pour des signaux continus ? Justifier votre réponse.

Corrigés

I. Théorème de Neumann

SCHEMA AVEC LES NOTATIONS

Par définition, le flux d'inductance mutuel est donné par :

$$\Phi_{12} = M_{12}i_1 = \iint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2$$

Le champ magnétique créé par le circuit 1 en un point M peut s'écrire en terme du potentiel vecteur :

$$\vec{B}_1(M) = \text{rot } \vec{A}_1 \quad \text{et} \quad \vec{A}_1(M) = \mu_0 \oint_{C_1} \frac{i_1 d\vec{\ell}_1}{P_1 M}$$

Pour un point P₂ situé sur le circuit C₂, il vient :

$$\vec{A}_1(P_2) = \mu_0 \int_{C_1} \frac{i_1 d\vec{\ell}_1}{P_1 P_2}$$

En utilisant le théorème de Stokes, il est possible d'écrire le flux mutuel à l'aide du potentiel vecteur :

$$\Phi_{12} = \iint_{S_2} \text{rot } \vec{A}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \oint_{C_2} \vec{A}_1(P_2) \cdot d\vec{\ell}_2$$

En remplaçant le potentiel vecteur, il vient :

$$\Phi_{12} = \oint_{C_2} \left[\oint_{C_1} \frac{i_1 d\vec{\ell}_1}{P_1 P_2} \right] \cdot d\vec{\ell}_2 = i_1 \times \underbrace{\oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{P_1 P_2}}_{M_{12}}$$

Un calcul analogue sur le flux du circuit 2 sur le circuit 1 donne :

$$\Phi_{21} = i_2 \times \underbrace{\oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{\ell}_2 \cdot d\vec{\ell}_1}{P_1 P_2}}_{M_{21}}$$

La permutation des intégrales permet de valider l'égalité des coefficients d'inductance mutuelle (sous réserve de garder la même orientation de parcours) :

$$M_{12} = \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{P_1 P_2} = \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{\ell}_2 \cdot d\vec{\ell}_1}{P_1 P_2} = M_{21}$$

II. Couplage parfait

Soit Φ_1 le flux reçu par le circuit 1 contenant N₁ spires, alors, le flux par spire du circuit 1 est donné par :

$$\phi_1 = \frac{\Phi_1}{N_1} = \frac{L_1 i_1 + M i_2}{N_1}$$

De même, le flux par spire du circuit 2 est donné par

$$\phi_2 = \frac{\Phi_2}{N_2} = \frac{L_2 i_2 + M i_1}{N_2}$$

Dans le cas du couplage parfait, il n'y a aucune fuite de flux de champ magnétique entre les circuits, on peut donc écrire que

$$\phi_1 = \phi_2 \quad \text{soit} \quad \frac{L_1 i_1 + M i_2}{N_1} = \frac{L_2 i_2 + M i_1}{N_2}$$

Dans le cas où $i_1 = 0$, on obtient $M/N_1 = L_2/N_2$. De même, si $i_2 = 0$, il vient : $L_1/N_1 = M/N_2$. On obtient alors :

$$M^2 = L_1 L_2 \quad \text{soit} \quad |M| = \sqrt{L_1 L_2}$$

Cette valeur est un majorant de l'inductance mutuelle. En effet, l'énergie magnétique contenue dans un circuit couplé est donné par :

$$\mathcal{E}_{mag} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

Factorisons par i_2^2 , posons $x = i_1/i_2$, il vient :

$$\mathcal{E}_{mag} = i_2^2 \left[\frac{1}{2} L_1 x^2 + \frac{1}{2} L_2 + M x \right]$$

L'énergie magnétique étant positive ou nulle, l'équation $\mathcal{E}_{mag} = 0$ ne doit pas avoir de solution ou une unique solution double, c'est à dire que le discriminant de l'équation $\frac{1}{2} L_1 x^2 + M x + \frac{1}{2} L_2 = 0$ doit être négatif ou nul :

$$\Delta = M^2 - L_1 L_2 \leq 0 \quad \text{soit} \quad |M| \leq \sqrt{L_1 L_2}$$