

Magnétostatique

Nous baignons naturellement dans le champ magnétique terrestre grâce auquel nous pouvons nous orienter avec une boussole. L'origine du champ magnétique terrestre est encore imparfaitement compris. L'hypothèse la plus vraisemblable appelé « effet dynamo », est que les mouvements de convection dans le noyau de la Terre, composé de fer liquide entretient le champ magnétique terrestre. Grâce à l'expérience VKS située en France à Cadarache, des chercheurs ont réussi à observer l'apparition d'un champ magnétique auto-entretenu dans du sodium liquide en rotation.

Au quotidien, les aimants permanents génèrent aussi un champ magnétique avec de nombreuses applications (jeu de construction, magnets, verrou de porte, moteur synchrone, *etc.*).

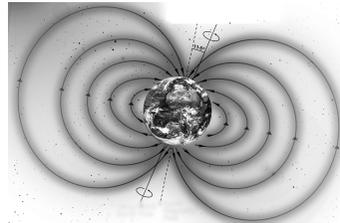


FIGURE 1 – Champ magnétique terrestre.

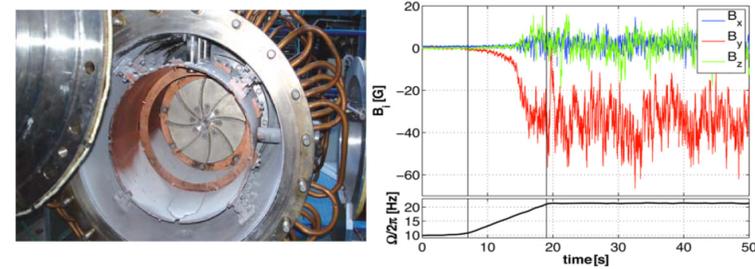


FIGURE 2 – Expérience VKS permettant la rotation de sodium (gauche) et champ magnétique créée à $t = 20$ s lorsque la vitesse de rotation Ω dépasse une valeur critique. Photo CEA et courbes issues de *The VKS experiment : turbulent dynamical dynamos, Compte rendu de l'académie des sciences, 2008*.

I. Description du champ magnétique

1 - Création et mesure d'un champ \vec{B}

Le champ magnétique noté \vec{B} est un champ vectoriel. Son amplitude a pour unité le Tesla [T]. L'aiguille d'une boussole s'oriente parallèlement au champ magnétique, dans le sens sud-nord caractérisant le caractère vectoriel du champ magnétique terrestre. Mais cela ne donne pas d'information sur sa norme (amplitude). Un champ magnétique statique peut être créé par un circuit électrique parcouru par un courant constant (voir §II) ou un aimant permanent (formés de matériaux dits ferromagnétiques). L'unité Tesla cache quelque peu la valeur du champ magnétique, un champ de quelques Tesla est un champ extrêmement intense comme celui créé grâce à des spires supraconductrices. Les valeurs usuelles comme le champ terrestre sont nettement plus faibles, de l'ordre de la dizaine de μ T (cf. tableau 1).



FIGURE 3 – Boussole commerciale

Origine	Terre	Bobines de T.P.	Aimant permanent	Bobines supra-conductrices
Ordre de grandeur	$50 \mu\text{T}$	1 mT	0,1 – 1 T	10 T
Application	boussole	transfor-mateur	Disques durs	IRM et RMN

TABLE 1 – Valeur de champs magnétiques usuels.

Remarque 1 :

Les aimants permanents utilisés dans les disques durs et les moteurs électriques des voitures actuels sont appelés aimants néodymes. Le néodyme est un élément chimique ($Z = 60$) qui, sous la forme d'un alliage avec le Fer ($\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$), donne un aimant permanent extrêmement puissant (générant un champ magnétique de l'ordre du Tesla).



La mesure d'un champ magnétique s'effectue à l'aide d'un teslamètre basé sur les interactions du champ magnétique avec les circuits électriques (cf. chap. ??-??-??). Les teslamètre usuels à effet Hall ont une sensibilité de $100 \mu\text{T}$ (cf. fig.4). On arrive désormais aux limites quantiques des magnétomètres utilisant des jonctions supra-conductrices (SQUID), la sensibilité est alors de 10^{-15}T (*Quantum noise limited and entanglement-assisted magnetometry, PRL 2010*).

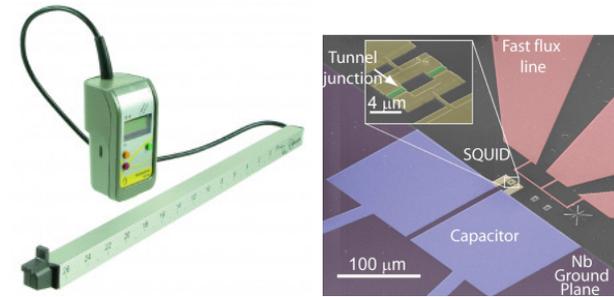


FIGURE 4 – Teslamètre commercial à but éducatif (Jeulin ©) ou utilisant la supraconductivité : SQUID (droite). D'après *Dispersive magnetometry with a quantum limited SQUID parametric amplifier, PRB 2011*.

Remarque 2 :

La sensibilité des SQUID est telle qu'il est possible de cartographier les fluctuations de champ magnétique dans le cerveau (cf. fig 5). Contrairement à l'IRM, les mesures peuvent s'effectuer quasiment en temps réel, sans effet sur le patient.

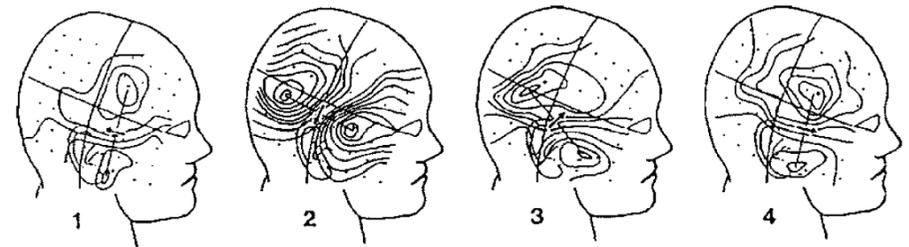


FIGURE 5 – Évolution du champ magnétique dans un cerveau d'une personne épileptique (intervalle de 20 ms environ). D'après *Superconducting quantum interference device instruments and applications, Review of Scientific Instruments, 2006*.

Des champs magnétiques de quelques Tesla sont utilisés dans les synchrotrons pour accélérer les particules chargées. L'accélération circulaire d'électrons génère un rayonnement synchrotron de l'infrarouge aux rayons X, utilisés pour des expériences de spectroscopies mais aussi pour le traitement de tumeur (hadronthérapie). Les collisions de particules dans les accélérateurs synchrotrons

permettent de générer des particules de hautes énergies (quarks, bosons de Higgs, etc) et de tester le modèle standard. La recherche en champ magnétique encore plus intense a pour enjeu également des percées en physique fondamentale. Par exemple l'électrodynamique quantique (par opposition à l'électromagnétisme classique présenté ici), prédit un léger ralentissement de la lumière en présence d'un champ magnétique très intense, appelé la *biréfringence du vide*. La création de champ magnétique supérieur à 40 T (cf. fig. 6) sur une distance de plusieurs dizaines de centimètres est un défi relevé par plusieurs laboratoires (expérience BMV pour Biréfringence Magnétique du Vide à Toulouse, MagLab en Floride, OVAL à Tokyo...).



FIGURE 6 – Bobine résistive créant un champ de 41 T au centre de recherche National High Field Laboratory (Floride, Aout 2017). Puissance nécessaire 41 MW. Image courtesy of Tim Murphy, NHL.

2 - Carte de camp magnétique

a) Représentation

Pour visualiser un champ magnétique à moindre frais, il est possible de déposer à proximité d'une source de champ \vec{B} de la limaille de fer (cf. fig. 7). Le champ

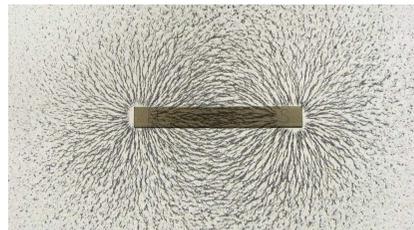


FIGURE 7 – Visualisation des lignes de champ grâce à la limaille de fer.

magnétique aura tendance à les déplacer et les orienter dans la direction du vecteur \vec{B} . Les lignes formées par la limaille de fer suivent les **lignes de champ** magnétique (mais sans pouvoir visualiser leur orientation). De même que pour le champ électrique (cf chap.??), le champ magnétique peut être présenté soit par des vecteurs, soit des lignes de champs parallèles au champ et orientées comme le champ (cf. fig. 8).



Définition :

Une **ligne de champ** magnétique est une courbe dont la tangente en tout point est donnée par le vecteur \vec{B} .

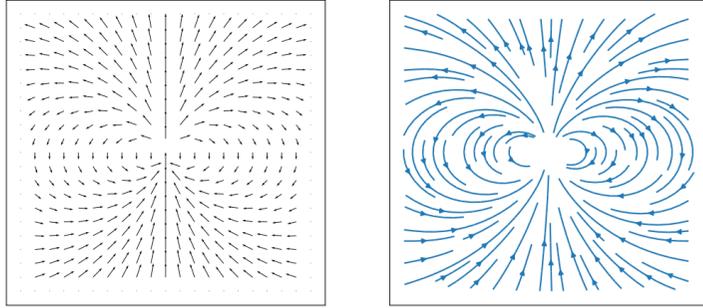


FIGURE 8 – Représentation du champ magnétique \vec{B} d'un dipôle placé au centre, soit par une collections de vecteurs (gauche) ou soit par ligne de champ (droite).

Remarque 3 :

Certains oiseaux migrateurs seraient capables de déterminer la déclinaison magnétique (angle entre le nord géographique et le nord magnétique), qui dépend de la longitude et utilisent cette information pour s'orienter (cf. fig. 9). Il est possible que cette capacité soit due à des phénomènes quantiques en faisant intervenir un couplage entre les spins électroniques et nucléaires en présence du champ magnétique terrestre.

b) Conservation du flux du champ magnétique

Propriété :

Le champ magnétique est à **flux conservatif**, c'est à dire que le flux à travers une surface fermée quelconque est nul :

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

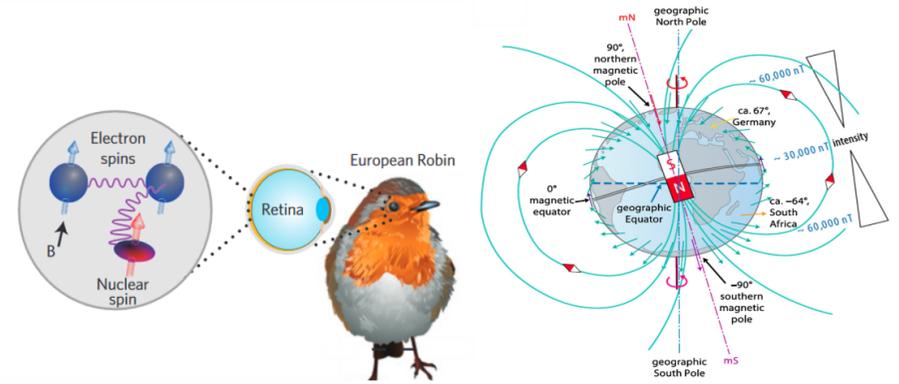


FIGURE 9 – Certains oiseaux migrateurs s'appuient sur l'orientation du champ magnétique terrestre et sa déviation par rapport au nord géographique pour s'orienter. La fréquence d'oscillations d'un système quantique présent dans la rétine des rouge-gorges dépendrait de l'inclinaison du champ magnétique. *D'après Quantum biology, Nature 2013.*

Cette propriété permet en outre de lire sur une carte de champ magnétique, les zones où le champ magnétique est plus intense. Considérons une surface fermée appelée tube de champ, constituée par un disque S_1 , une partie latérale guidée par des lignes de champ et fermée par le disque S_2 (cf. fig. 10). Le flux de champ magnétique à travers cette surface se décompose selon les parties inférieures et supérieures S_1 , S_2 et sur la surface latérale. Par définition, le flux total sur une surface fermée est nul :

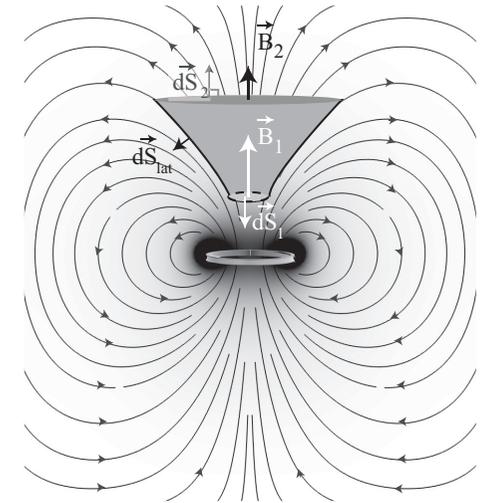


FIGURE 10 – Tube de champ

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

En décomposant la surface fermée, on en déduit que :

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \underbrace{\iint_{S_{lat}} \vec{B} \cdot d\vec{S}_{lat}}_{=0} + \iint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S}_2 = 0$$

Par construction, le flux de champ magnétique sur la paroi latérale S_{lat} est nul puisque le champ ne traverse pas cette surface. Notons \tilde{B}_1 le champ moyen sur la surface S_1 et \tilde{B}_2 le champ moyen sur S_2 . Par convention, le vecteur surface $d\vec{S}$ orientant les différentes parties de la surface fermée sont dirigés vers l'extérieur. Ainsi, sur le schéma proposé, le champ \vec{B} et le vecteur $d\vec{S}_1$ sont de sens contraire tandis que \vec{B} et $d\vec{S}_2$ sont de sens opposés. En tenant compte de l'orientation des vecteurs, il vient

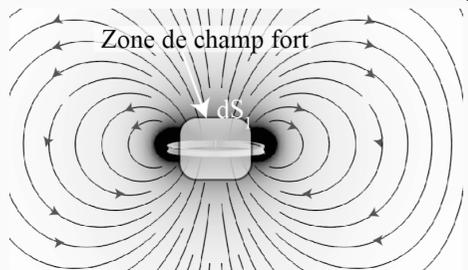
$$\iint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S}_2 \approx -\tilde{B}_1 \times S_1 + \tilde{B}_2 \times S_2 = 0$$

Ainsi $\tilde{B}_1 \times S_1 = \tilde{B}_2 \times S_2$.

Le champ \tilde{B}_1 est donc supérieur au champ \tilde{B}_2 car $S_1 < S_2$. Dans l'exemple proposé (cf. fig. 10), cela permet de conclure que le champ magnétique décroît en s'éloignant de la spire.

Propriété :

Le champ magnétique est d'autant plus intense que les lignes de champ se rapprochent.



Remarque 4 :

La conservation du flux du champ magnétique est due à l'absence de monopole magnétique qui serait l'équivalent des charges pour le champ électrique (voir le théorème de Gauss, chap.??). En effet, si la dénomination pôle nord/ pôle sud est utilisée pour les aimants, isoler un pôle semble impossible. Comme la mécanique quantique n'interdit pas leur existence, des chercheurs essaient toujours de les isoler, par exemple dans des assemblages exotiques appelés glace de spins. Certains effets peuvent être illustrés à l'aide de sphères aimantées où des "fantômes magnétiques" apparaissent (Fig. 11).

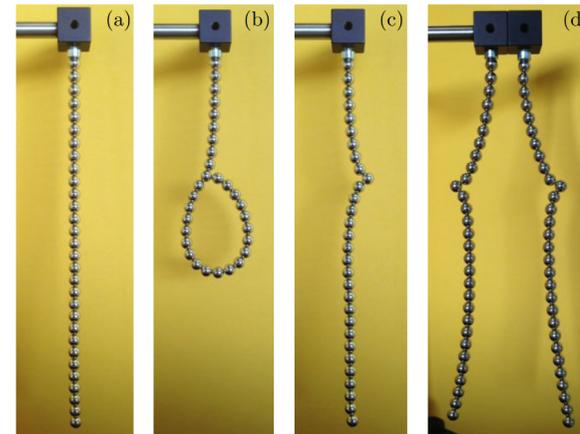


FIGURE 11 – Modifications d'une chaînes de sphères aimantées et apparition de jonctions fantômes. D'après *Magnetic ghosts and monopoles, New J. Physics, 2014*.

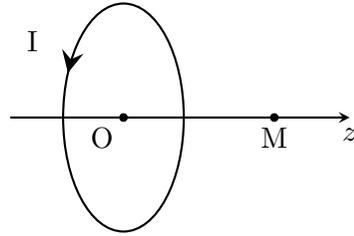
c) Principe de superposition

Les équations régissant le champ magnétique sont linéaires. On peut donc utiliser le principe de superposition pour déterminer le champ résultant d'un dispositif complexe. Le champ total est la somme des champs créée par chacun des composants.

Exemple 1

Le champ magnétique créé par une bobine plate le long de son axe est donné par (cf. annexe III) :

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z$$



1 - Représenter l'allure du champ magnétique en fonction de z .

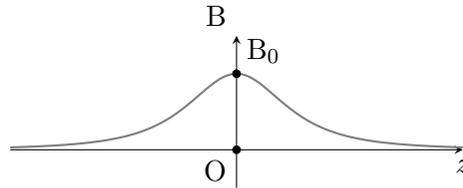
2 - Représenter le champ créé par deux bobines plates identiques assez éloignées, puis très proches. Justifier qu'il est possible d'obtenir un champ constant dans une certaine zone de l'espace.

Pour s'entraîner : exercices 8, 9

1 - La valeur au centre vaut alors :

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

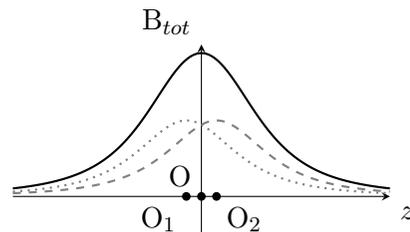
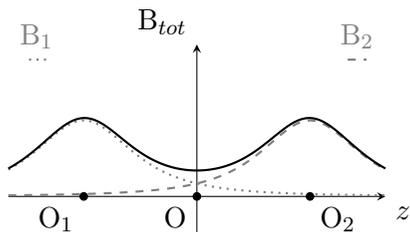
On remarque que le champ est nul loin de l'axe de la bobine :



$$B(z) \underset{z \rightarrow \pm\infty}{\sim} B_0 \frac{R^3}{z^3} \underset{z \rightarrow \pm\infty}{\rightarrow} 0$$

On en déduit l'allure ci-contre du champ magnétique.

2 - En utilisant le théorème de superposition, le champ magnétique créé par un ensemble de deux bobines plates assez éloignées (en O_1 et O_2) doit être le suivant :



Lorsque les bobines sont plus proches, le champ magnétique devient plus important entre les bobines. Une configuration particulière appelée « bobines de Helmholtz » consiste à espacer deux bobines d'une distance égal à leur rayon. On obtient alors un champ magnétique quasi-uniforme à dans l'espace entre les bobines.

Remarque 5 :

Des bobines de Helmholtz placées selon les 3 directions de l'espace (cf fig. 12) est utilisé en laboratoire pour compenser le champ magnétique terrestre et étalonner des magnétomètres comme ceux utilisés en archéologie pour détecter les anomalies très faibles de champ magnétique dans les sols.

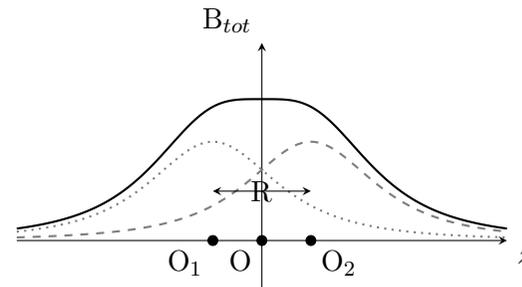


FIGURE 12 – Champ magnétique quasi-uniforme dans une configuration de type Helmholtz et bobines commerciales (Feronnato ©).

3 - Symétries et invariances

a) Plan de symétrie

Le champ magnétique suit le principe de Curie vue en électrostatique stipulant que : « Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits ». Le lien entre le champ magnétique et sources est un produit vectoriel (cf. annexe I). Aussi, les symétries sont inversées entre les sources du champ magnétique et le champ lui-même. On retiendra la propriété suivante :

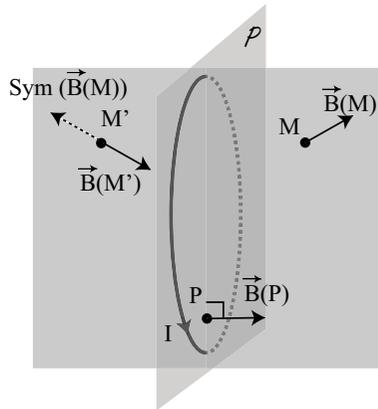
Propriété :

Si \mathcal{P} est un plan de symétrie des sources de \vec{B} alors \mathcal{P} est un plan d'antisymétrie de \vec{B} .

Cela signifie que si M' est le symétrique de M par rapport au plan de symétrie \mathcal{P} , alors le champ en ce point est l'opposé du symétrique (cf. figure ci-contre)

$$\vec{B}(M' = \text{Sym}_{\mathcal{P}}(M)) = -\text{Sym}_{\mathcal{P}}(\vec{B}(M))$$

En particulier, si M est dans le plan de symétrie, le champ magnétique est nécessairement perpendiculaire à ce plan. Cette propriété est très utile pour déterminer rapidement l'orientation du champ \vec{B} .



Propriété :

Si M est un point d'un plan de symétrie des courants, le champ $\vec{B}(M)$ est perpendiculaire à ce plan :

$$\vec{B}(M \in \mathcal{P}) \perp \mathcal{P}$$

Exemple 2

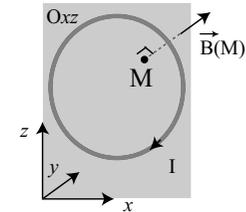
Dans les dispositifs d'imagerie médicale par résonance magnétique (IRM), le patient est placé au milieu d'une spire supraconductrice verticale (plan Oxz) comme indiqué dans la figure ci-contre.



- 1 - En utilisant les coordonnées cartésiennes, représenter la spire dans le plan Oxz parcourue par un courant I .
- 2 - Préciser la direction du champ magnétique $\vec{B}(M)$ en un point M du plan Oxz .

Pour s'entraîner : exercice 1

- 1 - Considérons le plan vertical Oxz contenant la spire. L'orientation arbitraire du courant n'influe pas sur la direction du champ magnétique mais sur son sens.



- 2 - Le plan Oxz est un plan de symétrie pour la spire puisqu'il la contient. Le champ magnétique pour tout point du plan Oxz est donc perpendiculaire à ce plan, selon Oy ici.

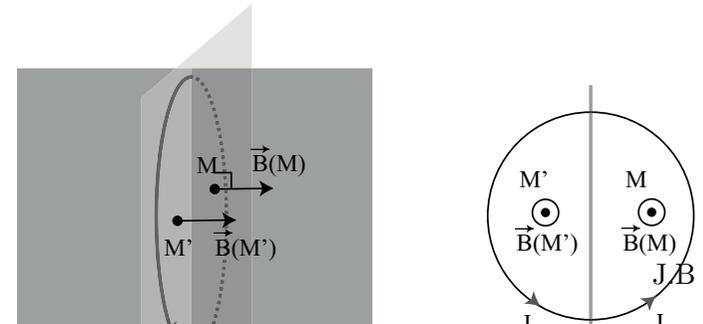
$$\vec{B}(M \in Oxz) = B(x,y,z) \times \vec{e}_y$$

b) Plan d'antisymétrie

Définition :

Un plan d'antisymétrie d'une distribution de courant est un plan de symétrie du circuit électrique sans changement de signe du courant à la traversée de ce plan.

Dans la figure ci-contre, le plan \mathcal{Q} coupe la spire en deux parties. Il s'agit d'un plan de symétrie du circuit



électrique, comme le courant traverse ce plan sans modification, il s'agit d'un plan d'anti-symétrie de la distribution de courant (le courant "descend" dans la partie gauche et "monte" dans la partie droite). En raison de la nature pseudo-vectorielle du champ magnétique, un plan d'anti-symétrie du courant devient un plan de symétrie du champ magnétique.

Propriété :

Si \mathcal{Q} est un plan d'antisymétrie des sources de \vec{B} alors \mathcal{Q} est un plan de symétrie de \vec{B} .

En particulier, pour un point du plan d'antisymétrie, cela impose que le champ soit contenu dans ce plan.

Propriété :

Si M est un point d'un plan d'antisymétrie \mathcal{Q} de la distribution de courant, alors le champ $\vec{B}(M)$ appartient à ce plan :

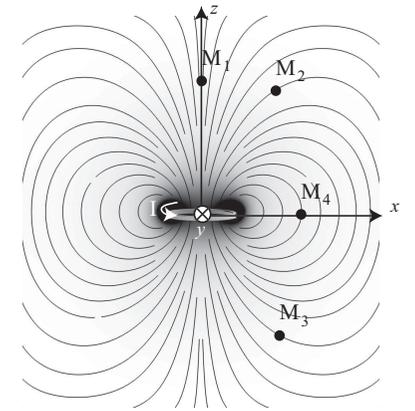
$$\vec{B}(M \in \mathcal{Q}) \subset \mathcal{Q}$$

Ainsi, il suffit de déterminer **deux** plans d'antisymétrie de la distribution de courant pour connaître la direction de \vec{B} en tout point à l'intersection de ces plans.

Exemple 3

Considérons une spire parcourue par un courant I (cf. fig. ci-contre).

- 1 - Que représentent les plans Oxy , Oxz et Oyz pour la distribution de courant ?
- 2 - Justifier l'orientation du champ magnétique au point M_1 .
- 3 - Justifier l'orientation du champ magnétique au point M_4 .
- 4 - Représenter les champs magnétiques aux points M_2 et M_3 . Quelle propriété géométrique relie ces deux vecteurs ?



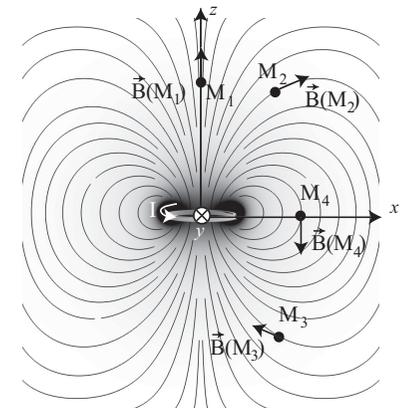
Pour s'entraîner : exercice 1

- 1 - Le plan Oxy est le plan qui contient la spire. Il s'agit d'un plan de symétrie pour la distribution de courant, donc d'un plan d'anti-symétrie pour le champ magnétique. Les plans Oxz et Oyz sont des plans de symétrie du circuit électrique mais ils coupent la spire en deux. Il s'agit de plan d'anti-symétrie pour la distribution de courant, donc d'un plan de symétrie pour le champ magnétique.

- 2 - Les plans Oxz et Oyz sont des plans de symétrie pour le champ magnétique, le champ magnétique est donc contenu dans ces plans. Comme M_1 appartient à ces plans, le champ magnétique est porté par l'intersection de ces plans : $\vec{B}(M_1) = B_z(M_1) \vec{e}_z$.

- 3 - Le point M_4 appartient au plan Oxy , plan de symétrie du courant donc d'antisymétrie pour le champ magnétique. On en déduit que le champ magnétique est perpendiculaire à ce plan : $B(M_4) = B_z(M_4) \vec{e}_z$

- 4 - Les points M_2 et M_3 sont symétriques par rapport au plan Oxy , plan d'antisymétrie pour \vec{B} , on en déduit que : $\vec{B}(M_3) = -Sym_{Oxy}(\vec{B}(M_2))$.



c) Invariances

Le principe de Curie s'applique également sur les invariances, c'est à dire sur les transformations géométriques (rotation et translation par exemple) qui transforment à l'identique les sources.

Propriété :

Si la distribution des courants est invariante par une translation ou une rotation, le champ \vec{B} qui en découle est également invariant par rapport à cette transformation.

L'intérêt de la recherche des invariances est de limiter les variables dont dépend le champ magnétique. Ainsi une invariance par translation selon l'axe Oz permet de conclure que le champ magnétique ne dépend pas de la variable z .

Exemple 4

On considère un fil quasi-infini parcouru par un courant I .

1 - Déterminer le système de coordonnées le plus adapté à la description du champ magnétique.

2 - En utilisant les symétries, donner la direction du champ magnétique en un point M quelconque de l'espace.

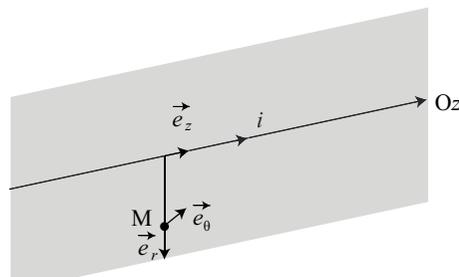
3 - En exploitant les invariances du courant, proposer une écriture pour le champ magnétique en un point M quelconque de l'espace.



Pour s'entraîner : exercice 1

1 - Les coordonnées cylindriques sont les plus adaptées en prenant Oz l'axe du fil.

2 - Soit un point $M(r, \theta, z)$, le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, z)$ est un plan de symétrie du



courant, on en déduit que le champ magnétique est perpendiculaire à ce plan : $\vec{B}(M) = B(r, \theta, z) \vec{e}_\theta$.

3 - Le courant I est invariant par translation selon z et par rotation selon θ . On peut donc conclure que le champ \vec{B} ne dépend pas de ces coordonnées ; $B(r, \theta, z) = B(r)$ ainsi, : $\vec{B}(r, \theta, z) = B(r) \vec{e}_\theta$.

Remarque 6 :

Dans les années 2000, une grande inquiétude s'empare du grand public concernant l'effet des champs électromagnétiques sur la santé humaine. De nombreuses études ont montré que le champ magnétique créé par les lignes haute tension est près de dix fois plus faible que le champ magnétique terrestre (cf. 13). Aucun effet notable sur l'homme n'a cependant pu être démontré jusqu'à aujourd'hui.

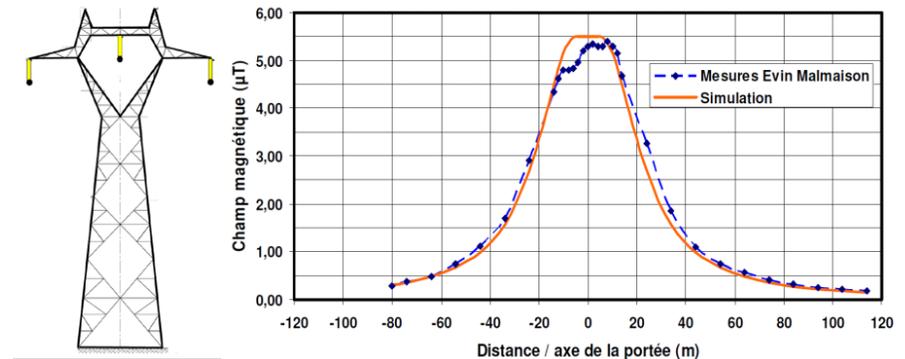


FIGURE 13 – Comparaison de la simulation à la mesure de champ magnétique sur le site d'Evin Malmaison *D'après Etude du champ magnétique (induction magnétique) à proximité de la ligne 400 kV Avelin-Gavrelle (mars 2014).*

II. Théorème d'Ampère

1 - Circulation du champ magnétique

▲ Définition :

Un **contour orienté** est une ligne fermée dont on définit le sens de parcours. Ce contour est associé à une surface dont le vecteur normal est orienté de manière directe (par la règle de la main droite (cf. fig. 14)).

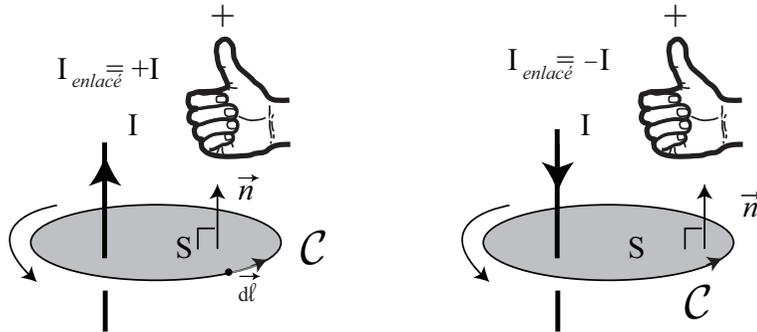


FIGURE 14 – Orientation du courant « enlacé ».

Les doigts de la main droite oriente le contour \mathcal{C} . Le pouce indique l'orientation du vecteur surface $\vec{S} = S\vec{n}$, perpendiculaire à la surface générée par le contour fermé. Les courants enlacés par le contour sont comptés positivement lorsqu'ils traversent la surface dans le même sens que le vecteur surface, (négativement dans le cas contraire).

Le théorème d'Ampère, outil rapide et puissant, permet de trouver le champ magnétique pour une distribution de courant possédant de très nombreuses symétrie. Le cas échéant, on pourra utiliser la loi de Biot et Savart présenté en annexe II.

▲ Définition :

La circulation d'un vecteur \vec{B} sur un contour fermé \mathcal{C} est définie par

$$C_{\mathcal{C}}(\vec{B}) = \oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$

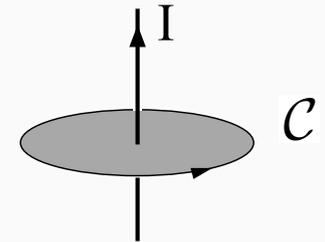
où $d\vec{\ell}$ est un vecteur unitaire orienté dans le même sens que \mathcal{C} .

▲ Propriété :

En régime quasi-permanent ou permanent, dans le vide, le théorème d'Ampère relie la circulation sur une courbe fermée du champ magnétique engendré par une distribution de courant à leur somme orienté :

$$C_{\mathcal{C}}(\vec{B}) = \oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide définie par $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2}$.



La notation $I_{\text{enlacé}}$ fait référence au fait que l'on ne considère que les courants entourés par le contour \mathcal{C} . Ce dernier est un contour fermé et orienté définissant une surface également orientée par son vecteur normal. Le courant est compté positivement s'il traverse la surface générée par le contour fermé dans le même sens que le vecteur normal et négativement s'il est opposé.

Remarque 7 :

Ce théorème est valable si le courant est constant. On peut étendre le domaine de validité de ce théorème pour des courants dits « lentement » variables. Cette approximation appelée Approximation des Régimes QuasiStationnaires (ARQS) consiste à supposer que la distance entre les courants et le point d'observation est très inférieure à la même distance parcourue par la lumière durant le temps caractéristique d'évolution du courant :

$$L \ll c\tau$$

Pour des distributions de courants infinies avec de nombreuses symétrie, l'orientation du champ \vec{B} est connue dans tout l'espace. On choisit un contour d'Ampère \mathcal{C} permettant l'application du théorème vérifiant les conditions suivantes :

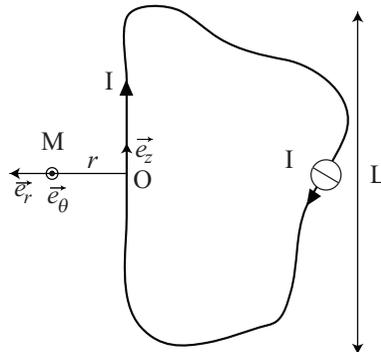
- \mathcal{C} passe par le point M où l'on veut calculer le champ ;
- $\mathcal{C} // \vec{B}$ ou $\mathcal{C} \perp \vec{B}$;
- \mathcal{C} doit entourer des courants.

2 - Fil infini

Exemple 5

On considère un fil étiré sur une longueur L parcouru par un courant I . On cherche à connaître le champ à une distance r du fil en utilisant les coordonnées cylindriques associées à la partie rectiligne.

- 1 - À quelle condition sur la position de M, le fil pourra être considéré comme infini.
- 2 - Déterminer dans ce cas, l'orientation du champ magnétique créé par ce fil.
- 3 - Déterminer les variables dont dépend le champ magnétique.



4 - Enfin, établir l'expression du champ magnétique créé par ce fil supposé infini.

5 - Représenter la norme du champ magnétique en fonction de r et en déduire l'allure des lignes de champ.

6 - Calculer le champ magnétique à 1,0 cm d'un un fil infini parcouru par un courant de 1 A.

Données : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$

Pour s'entraîner : exercice 5

1 - On peut considérer le fil comme infini si $r \ll L$ et M loin des extrémités des bords du fil selon z .

2 - Le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie pour I, on en déduit que

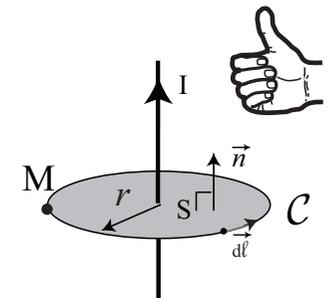
$$\vec{B}(M) = B_\theta(M) \vec{e}_\theta$$

3 - Le courant est invariant par translation selon z et par rotation selon θ , on en déduit que

$$\vec{B}(M) = B_\theta(r) \vec{e}_\theta$$

4 - On considère comme contour d'Ampère un cercle \mathcal{C} de rayon r d'axe Oz enlaçant le courant, on en déduit que :

$$\underbrace{\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}}_{2\pi r B_\theta(r)} = \mu_0 I \quad \text{soit} \quad B_\theta(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



5 - Le champ magnétique décroît en $1/r$ lorsqu'on s'éloigne du fil (cf. fig. ci-contre). Comme le champ magnétique est porté par \vec{e}_θ , les lignes de champs sont donc des cercles centré sur le fil.

6 - Avec les valeurs numériques proposées, le champ magnétique vaut :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi \times 0,01} = 20 \mu\text{T}$$

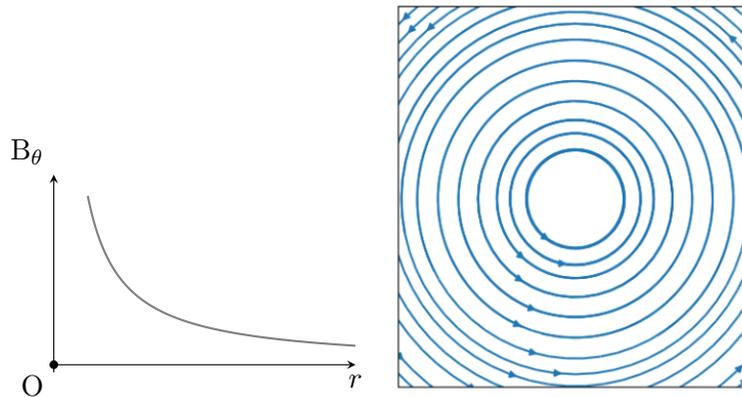
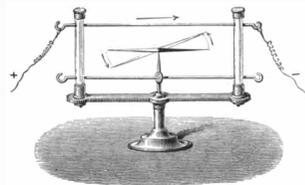


FIGURE 15 – Représentations du champ magnétique \vec{B} créée par un fil infini situé au centre.

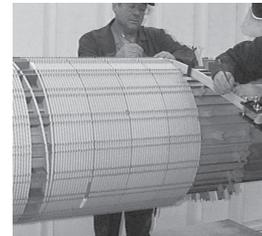
Remarque 8 :

Cette valeur est relativement faible et de l'ordre du champ magnétique terrestre. Il peut être mis en évidence par déviation de l'axe d'une boussole (cf. exercice 5). Il s'agit d'une expérience historique effectuée par Oersted en 1820 faisant le lien entre électricité et magnétisme.

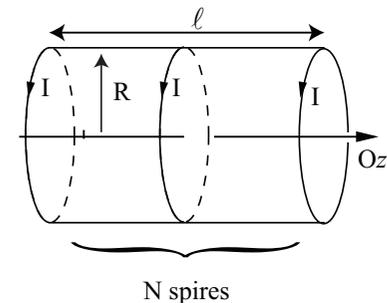


3 - Solénoïde infini

Exemple 6 Dans les transformateurs industriels, on utilise des solénoïdes. Notons ℓ sa longueur, R son rayon R et N le nombre de spires. On considère qu'elles sont toutes parcourues par un courant I . On cherche à connaître le champ dans tout l'espace



bobine de transformateur
Surplec ©



- 1 - À quelle condition le solénoïde pourra être considéré comme infini.
- 2 - Déterminer dans ce cas, l'orientation du champ magnétique.
- 3 - Déterminer les variables dont dépend le champ magnétique.
- 4 - En admettant que le champ magnétique est nul à l'extérieur du solénoïde, établir l'expression du champ magnétique.
- 5 - Calculer la valeur du champ magnétique pour une bobine contenant 1000 spires par mètre et parcouru par un courant de 10 A

Pour s'entraîner : exercices 2, 4, 6 et 8.

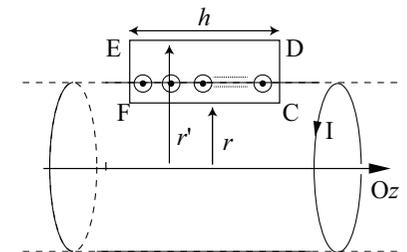
- 1 - Le solénoïde pourra être considéré comme infini pour $\ell \gg R$ et le point d'observation à l'intérieur et loin des bords du solénoïde.
- 2 - Pour un solénoïde infini, le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est un plan de symétrie pour le courant, donc le champ est perpendiculaire à ce plan : $\vec{B}(M) = B_z(r, \theta, z) \vec{e}_z$
- 3 - La distribution de courant est invariante par rotation selon θ et translation selon z , on en déduit que $\vec{B}(M) = B_z(r) \vec{e}_z$.
- 3 - Le courant est invariant par translation selon z et par rotation selon θ , on en déduit que $B(M) = B(r)$ et finalement

$$\vec{B}(M) = B_z(r) \vec{e}_z$$

- 4 - On considère comme contour d'Ampère un rectangle CDEF distant de Oz de r et r' et de longueur h . Le nombre de spire enlacé par le contour vaut : Nh/ℓ .

Le théorème d'Ampère s'écrit :

$$\oint_{CDEF} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 N \frac{h}{\ell} I$$



Détaillons le calcul de la circulation :

- la circulation sur les segments CD et EF est nulle car \vec{B} est perpendiculaire à ces segments ;
- La circulation sur le segment DE est nulle car le champ est nul à l'extérieur ;
- la circulation sur le segment FC donne : $\int_{QM} \vec{B} d\vec{\ell} = B(r) \times h$.

Le théorème d'Ampère permet de conclure que :

$$B_z(r) \times h = \mu_0 N \frac{h}{\ell} I \quad \text{soit} \quad \vec{B}_z(r < R) = \mu_0 \frac{N}{\ell} I \vec{e}_\theta$$

5 - D'après la formule : $B = \mu_0 n I = 4\pi \cdot 10^{-7} \times 1000 \times 10 \approx 12$ mT. Ce champ est comparable à celui de petits aimants en ferrite, la création de champ magnétique intense sans recourir à des matériaux ferromagnétique n'est pas aisée. Étonnamment, le champ magnétique ne dépend pas du rayon du solénoïde. En revanche, la longueur de fil utilisé augmente proportionnellement au rayon...

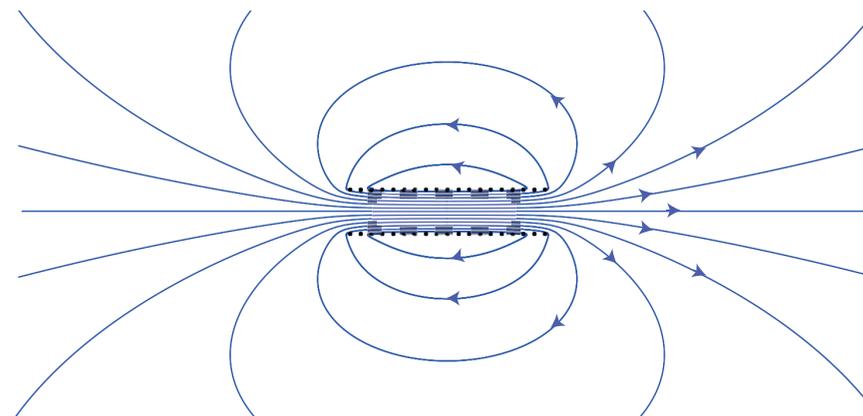


FIGURE 16 – Simulation du champ magnétique d'un solénoïde pour $\ell = 10 \times R$ et zone de validité de l'approximation du solénoïde infini (pointillés).

Remarque 9 :

Un solénoïde réel est assimilé à un solénoïde infini lorsque son rayon est 10 fois inférieur à sa longueur. On considère que la formule du champ créée par un solénoïde infini est valide pour un point à l'intérieur de la bobine et distant des extrémités d'au moins une fois le rayon (zone en pointillés cf. fig. 16). Le champ magnétique peut alors être considéré comme uniforme avec une erreur inférieure à 10%. Les lignes de champ s'écartent fortement à l'extérieur de la bobine traduisant un champ très faible.

Définition :

Dans un conducteur cylindrique de section S, parcouru par un courant I, le vecteur densité de courant \vec{j} est défini par

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

\vec{j} s'exprime en $A \cdot m^{-2}$.

4 - Circuits non filiforme

Lorsque le diamètre du fil électrique n'est plus négligeable devant la distance d'observation, il est possible de continuer à utiliser le théorème d'Ampère en décrivant le courant sous la forme d'un flux de charges (cf. fig. 17).

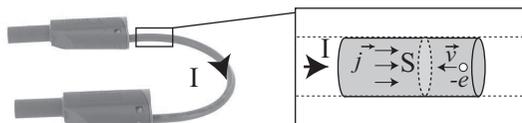


FIGURE 17 – Flux de charges dans un fil

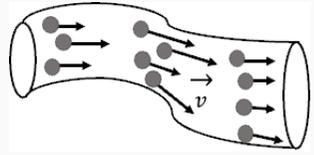
La densité de courant décrit le courant à l'échelle locale et donne une vision microscopique des déplacements de charges dans un circuit électrique, vus comme un écoulement de charges.

Propriété :

Soit n^* la densité volumique de charges q se déplaçant avec une vitesse \vec{v} , alors

$$\vec{j} = n^* q \vec{v}$$

(unité : $C \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}$).



L'intensité du courant est le flux de la densité de courant à travers une surface et correspond au débit des charges (quantité de charge par unité de temps ; ce qui transparaît si on considère son unité sous la forme : $C \cdot s^{-1}$ qui correspond à l'Ampère).

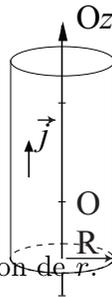
On admettra¹ qu'en régime permanent, le flux de charge est uniforme sur la section du conducteur de sorte que :

$$I = j \times S$$

Exemple 7

Un cylindre infini d'axe Oz et de rayon R est parcouru par un courant volumique uniforme et permanent de densité $\vec{j} = j \vec{e}_z$.

- 1 - Déterminer l'expression du courant circulant dans le cylindre.
- 2 - À l'aide du théorème d'Ampère, déterminer le champ magnétique créé en tout point de l'espace
- 3 - Représenter la norme du champ magnétique en fonction de r .



Pour s'entraîner : exercices 3, ??

1 - En supposant la distribution de courant volumique est uniforme, on a :

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad \text{soit} \quad I = j \times S = j\pi R^2$$

1. Une description de la densité de courant en régime dépendant du temps est proposé au chapitre ??.

2 - Le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie pour \vec{j} , on en déduit que

$$\vec{B}(M) = B_\theta(M) \vec{e}_\theta$$

Le courant est invariant par translation selon z et par rotation selon θ , on en déduit que $\vec{B}(M) = B_\theta(r) \vec{e}_\theta$.

On considère comme contour d'Ampère un cercle C de rayon r d'axe Oz enlaçant le courant, on en déduit que :

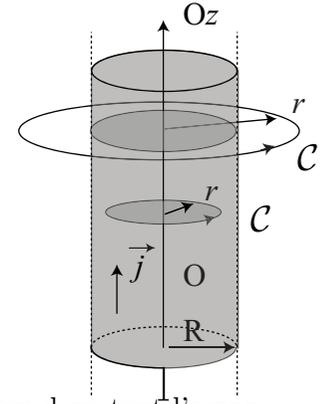
$$C_C(\vec{B}) = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

Le courant enlacé dépend du rayon du contour d'Ampère :

- pour $r > R$, $I_{\text{enlacé}} = I = j \times \pi R^2$;
- pour $r < R$, $I_{\text{enlacé}} = j \times \pi r^2$;

Le théorème d'Ampère permet donc d'obtenir le champ dans tout l'espace :

- pour $r > R$: $2\pi r B(r) = \mu_0 I$ soit $B_\theta(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$.
- pour $r < R$, $I_{\text{enlacé}} = j \times \pi r^2$: $2\pi r B_\theta(r) = \mu_0 j \pi r^2$ soit $B_\theta(r) = \frac{\mu_0 j r}{2}$.



3 - Le champ magnétique est croissant dans le cylindre et décroissant à l'extérieur. Même à proximité du fil, le champ magnétique est identique à celui d'une distribution filiforme (cf. fig. 18).

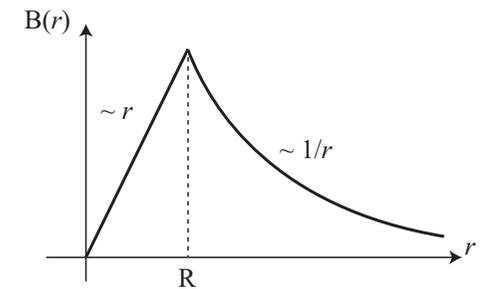


FIGURE 18 – Variation du champ magnétique pour un fil épais.

Remarque 10 :

La distribution volumique de courant est utilisée dès que l'approximation d'un circuit filiforme n'est plus valable. Par exemple, l'utilisation de conducteurs épais dans les moteurs électriques nécessite une modélisation par des courants volumiques dans le matériau (cf. fig. 19).

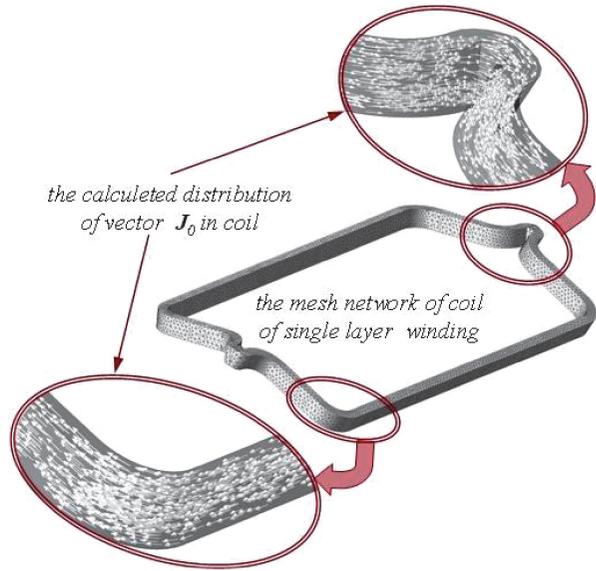


FIGURE 19 – Modélisation de la densité de courant dans une spire de moteur asynchrone. D'après *A description of the sources of magnetic field using edge values of the current vector potential*, *Archives of electrical engineering*, **67**, 17 (2018).

🔥 L'essentiel

Symétrie et invariances

- Un plan de symétrie \mathcal{P} d'une distribution de courant est un plan d'anti-symétrie pour le champ magnétique. Ce dernier est perpendiculaire en tout point de ce plan :

$$\vec{B}(M \in \mathcal{P}) \perp \mathcal{P}$$

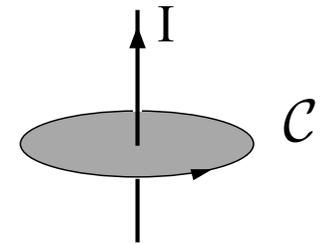
- Un plan d'anti-symétrie \mathcal{Q} d'une distribution de courant est un plan de symétrie pour le champ magnétique. Ce dernier est contenu dans le plan :

$$\vec{B}(M \in \mathcal{Q}) \subset \mathcal{Q}$$

- Si la distribution des courants est invariante par translation ou rotation selon une coordonnée d'espace, le champ \vec{B} qui en découle est également invariant par rapport à cette coordonnée.

Théorème d'Ampère

En régime quasi-permanent ou permanent, dans le vide, la circulation sur une courbe fermée du champ magnétique engendré par une distribution de courant est égale à la somme algébrique des courants qui traversent la surface définie par la courbe multipliée par la perméabilité du vide μ_0 .



$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide définie par

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2}$$

Dans le cas où le circuit est non filiforme, le courant est relié au vecteur densité de courant par :

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

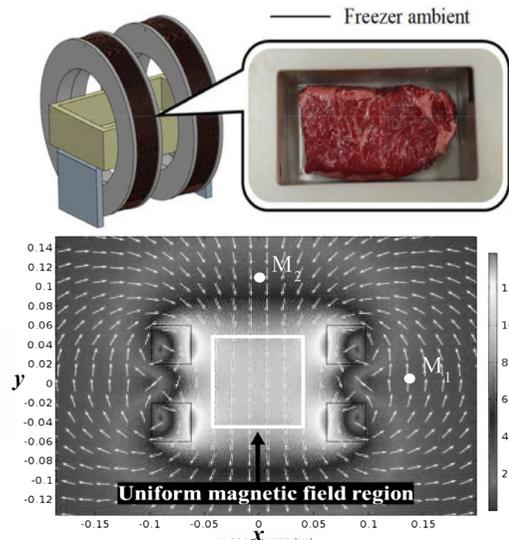
Exercices

Les classiques

Exercice 1

solution p.??

Dans le but de préserver les aliments lors de la congélation, des chercheurs ont placé des steaks dans des bobines pour étudier l'influence du champ magnétique sur l'apparition de cristaux de glace. Le dispositif est constitué de deux bobines dont l'enroulement est dans le même sens. (Image adaptée de *Effects of an oscillating magnetic field on ice nucleation*, *J. Of Food Process Engineering*, 2020). L'axe Oz , non représenté sur la figure, est en dehors de la feuille.

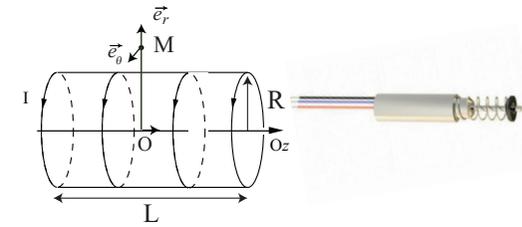


- 1 - Que représentent les plans Oxs , Oxz et Oyz pour la distribution de courant ?
- 2 - Justifier l'orientation du champ magnétique au point M_1 .
- 3 - Justifier l'orientation du champ magnétique au point M_2 .
- 4 - Les auteurs précisent que le champ magnétique est uniforme dans la région médiane. Justifier cette affirmation à partir de la forme des lignes de champ.

Exercice 2

solution p.??

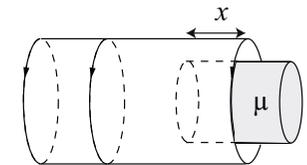
Un capteur de position inductif peut être modélisé par un solénoïde de longueur L et de rayon R dans lequel coulisser un matériau ferromagnétique de susceptibilité μ . On supposera que $L \gg R$.



On note N le nombre de spires parcourue par un courant I .

- 1 - Donner l'énoncé du théorème d'Ampère.
- 2 - Déterminer l'orientation du champ $\vec{B}(M)$ créée par le solénoïde.
- 3 - Déterminer les variables dont dépend $\vec{B}(M)$.
- 4 - Tracer l'allure des lignes de champ. Que peut on dire du champ magnétique à l'extérieur du solénoïde ?
- 5 - En appliquant le théorème d'Ampère, montrer que $\vec{B}(r < R) = \mu_0 \frac{N}{L} I \vec{e}_z$
- 6 - Déterminer l'expression littérale du coefficient d'auto-inductance L_0 du solénoïde en l'absence de matériau ferromagnétique.

On admettra que l'insertion d'un matériau sur une distance x du solénoïde conduit à une multiplication du coefficient d'auto-inductance du solénoïde de longueur x équivalent par un coefficient δ .

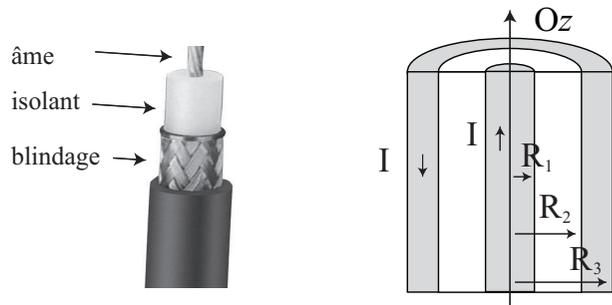


- 7 - Déterminer en fonction de N , L et x le nombre $N(x)$ de spires qui entourent le matériau ferromagnétique.
- 8 - En déduire l'inductance propre totale, en décomposant le système en deux solénoïdes de longueur x et $L - x$ connectés en série.

Exercice 3

solution p.??

Un câble coaxial est constitué de deux cylindres d'axes Oz isolés l'un de l'autre par une épaisseur $e = R_2 - R_1$ d'isolant. Le cylindre intérieur de rayon R_1 est parcouru par un courant I et celui compris entre R_2 et R_3 par un courant $-I$.

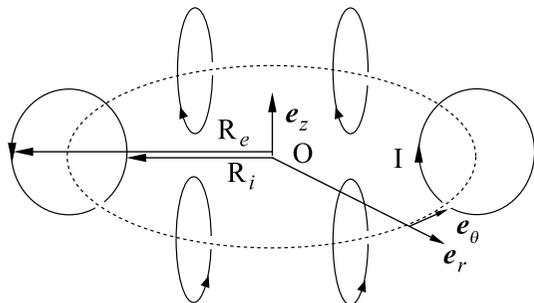


- 1 - Déterminer les vecteurs densité de courant dans le cylindre intérieur et le cylindre extérieur.
- 2 - En déduire l'expression du champ magnétique en tout point de l'espace.
- 3 - Donner l'allure de la variation du champ magnétique en fonction de la distance r à l'axe Oz .

Exercice 4

solution p.??

Le tokamak Tore-Supra est équipé de bobines supraconductrices, appelées bobines toroïdales (refroidies dans l'Hélium superfluide à 1,8 K) régulièrement réparties de façon quasi-jointive autour du tore de rayon intérieur R_i et extérieur R_e . Le tout comporte N spires circulaires parcourues par un courant permanent d'intensité I .



- 1 - Montrer par une étude des symétries du problème que le champ magnétique toroïdal peut s'exprimer sous la forme :

$$\vec{B} = B(r,z) \vec{e}_\theta$$

- 2 - Dans le plan équatorial du tore, en appliquant le théorème d'Ampère sur un cercle de rayon r et d'axe (Oz) , déterminer, en fonction de r , l'expression du champ magnétique \vec{B} créé par les bobines toroïdales. On distinguera l'intérieur de l'extérieur du tore.

- 3 - Donner l'allure de la courbe représentant $B(r)$ dans le plan équatorial.

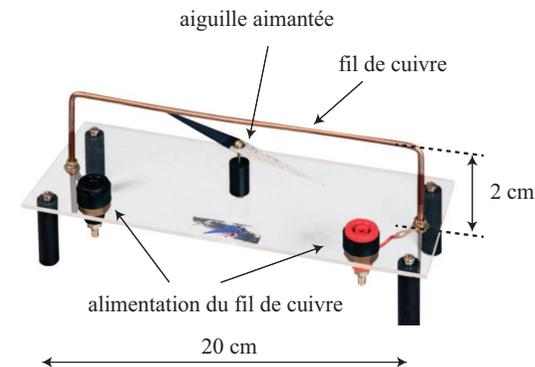
Problèmes ouverts

Exercice 5

solution p.??

On souhaite estimer la norme de la composante horizontale du champ magnétique terrestre local. On dispose

- d'une aiguille aimantée libre de pivoter sur son axe et d'un fil de cuivre relié à deux bornes.
- d'un générateur de tension continue pouvant délivrer jusqu'à 2 A ;
- d'un ampèremètre et d'un rapporteur



- 1 - Proposer une expérience à partir du matériel décrit et du principe de superposition pour mesurer le champ magnétique terrestre.
- 2 - Déterminer la(es) valeur(s) attendue(s) par votre protocole sachant que la norme du champ magnétique horizontal est de l'ordre de $B \sim 20 \mu\text{T}$.

Données : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ SI}$

Exercice 6

Au centre de recherche sur les champs magnétiques intenses de Floride, une bobine constitué de fil résistif est capable de générer un champ magnétique de de 41 T. La tension d'alimentation vaut $U = 700 \text{ V}$, l'intensité parcourant le circuit vaut alors $I = 47 \cdot 10^3 \text{ A}$. Le solénoïde mesure 1 m de hauteur pour un diamètre de 32 mm.



Solénoïde vertical réfrigéré (au centre) du National High Field Lab., Floride. Image courtesy of Tim Murphy

- 1 - Estimer le nombre de spires par unité de longueur.
- 2 - Pour un empilement de spires jointives, estimer le diamètre des fils électriques.
- 3 - Calculer la puissance électrique consommée et en déduire l'usage des canalisations présentes sur la figure-ci-contre. Le diamètre des fils vous semble-t'il pertinent ?

Données : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$

Les difficiles

Exercice 7

D'après CCP 17

On utilise un solénoïde épais (épaisseur $e = R_2 - R_1$) considéré comme la superposition de solénoïdes infinis (en réalité de longueur $L \gg R_2$) de même axe Oz. Il est

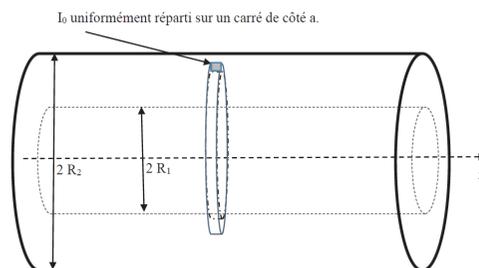


FIGURE 20 – Solénoïde épais

réalisé par un empilement jointif de spires de section carrée, de côté $a = 1,0 \text{ mm}$ enroulées sur un cylindre de longueur $L = 4,0 \text{ m}$, depuis un rayon $R_1 = 20 \text{ cm}$ jusqu'à un rayon $R_2 = 25 \text{ cm}$. Les spires sont des fils de cuivre parcourus par un courant continu I uniformément réparti, orienté dans le sens direct autour de Oz. La situation est schématisée sur la figure suivante. Les sections carrées sont dans les plans (\vec{e}_r, \vec{e}_z) c'est-à-dire en positionnement radial.

- 1 - Calculer le vecteur densité volumique de courant pour $R_2 > r > R_1$.
- 2 - Établir que l'expression du champ sur l'axe vaut $B = \mu_0 I (R_2 - R_1) / a^2$.
- 3 - Quelle est l'intensité nécessaire pour engendrer un champ de 1 Tesla ?

Données : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$

Exercice 8

solution p.??

Dans toute cette partie, on se place dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires.

En faisant abstraction des spires manquant dans la partie centrale, on considère deux solénoïdes (1) et (2) identiques, de rayon A, de grande dimension selon leur axe, disposés de sorte que leurs axes respectifs $(x'x')$ et $(y'y')$ soient perpendiculaires et concourant au point O (figure 21). Ils comportent n spires par mètre et sont parcourus par les courants respectifs $i_1(t) = I_M \cos(\omega_0 t)$ et $i_2(t) = I_M \cos(\omega_0 t + \alpha)$ où ω_0 est une pulsation constante. Le sens de parcours des courants est indiqué sur la figure 21.

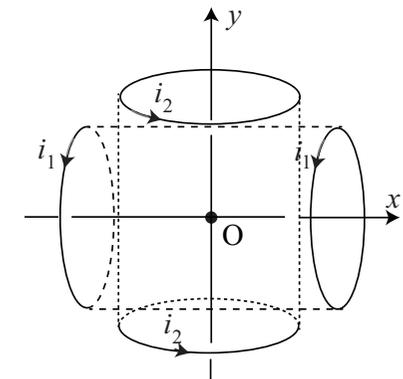


FIGURE 21 – Moteur asynchrone

On rappelle : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$.

1 - On admet que l'intensité du champ magnétique créée par un solénoïde infini est donné par $B = \mu_0 n i$. Pour une association de deux

solénoïdes (1) et (2) décrite ci-dessus figure 21, exprimer le champ magnétique $\vec{B}(O, t)$ créé en O dans les cas où $\alpha = \pi/2$ et $\alpha = -\pi/2$.

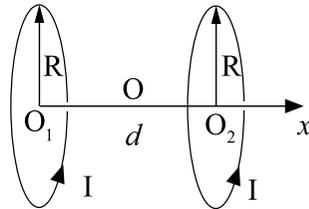
2 - Pourquoi peut-on qualifier ce champ magnétique de « champ tournant » ?

2 - Chaque solénoïde est constitué d'un enroulement de 4 rangées de spires jointives. On donne $a = 0,25$ mm le rayon du fil de cuivre utilisé, et $I_M = 1$ A. Calculer la norme du champ magnétique créé en O. Commenter.

Exercice 9

solution p.??

Soient deux bobines plates identiques, circulaires de rayon R, et parcourues par un courant I. Ces deux bobines sont placées dans deux plans parallèles. Leur axe commun est O_1O_2 , en notant O_1 le centre d'une bobine et O_2 le centre de l'autre. Soit O le point situé au milieu des deux points O_1 et O_2 . La distance entre les centres des deux bobines est d.



Soit x l'abscisse d'un point M de l'axe Ox. Nous nous proposons de montrer que, pour une distance $d = R$, le champ magnétique est « quasi-uniforme » sur l'axe au voisinage du point O.

1 - Montrer que l'expression du champ magnétique au point M peut se mettre sous la forme :

$$B(x) = f(d/2 + x) + f(d/2 - x)$$

où f est une fonction que l'on précisera.

2 - En effectuant un développement limité de B(x) au voisinage de zéro, montrer que pour $d = R$, le champ magnétique peut se mettre sous la forme :

$$B(x) = 2f(d/2) + o(x^3)$$

où $o(x^3)$ représente une fonction de x négligeable devant les termes du troisième ordre lors du développement de f(x).

3 - Représenter l'allure de B(x).

I. \vec{B} un pseudo vecteur

Si le champ électrique est défini à partir de la force électrostatique $\vec{F} = q\vec{E}$, il est possible de définir le champ magnétique à partir de la composante magnétique de la force de Lorentz exercée sur une particule q se déplaçant à la vitesse \vec{v} : $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$. Les travaux d'Ampère sur les forces exercées entre deux fils parcourus par un courant permettent alors de postuler une expression du champ magnétique créé par une charge q' en mouvement sous la forme :

$$\vec{B}_{q'}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q' \vec{v}' \wedge \vec{r}}{r^3}$$

La présence d'un produit vectoriel dans la définition du champ magnétique impose des inversions dans les plans de symétrie entre les causes et les conséquences. Considérons deux charges identiques q et q' se déplaçant à la même vitesse et dans la même direction. Le champ créé par chacune des charges peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{B}_{q'}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q' \vec{v}' \wedge \vec{PM}}{PM^3} \quad \text{et} \quad \vec{B}_q(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v} \wedge \vec{MP}}{PM^3}$$

Comme $q = q'$, $\vec{v} = \vec{v}'$, mais $\vec{PM} = -\vec{MP}$, on en conclut que :

$$\vec{B}_{q'}(M) = -\vec{B}_q(P)$$

Soit Q le plan médian, il s'agit d'un plan de symétrie pour les charges en mouvement, mais un plan d'anti-symétrie pour le champ magnétique puisque

$$\vec{B}_{q'}(M = \text{Sym}_Q(P)) = -\vec{B}_q(P)$$

2. La vitesse doit être non relativiste pour que ces expressions soient correctes.

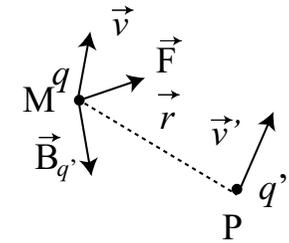


FIGURE 22 – Champ magnétique créée par une charge en mouvement.

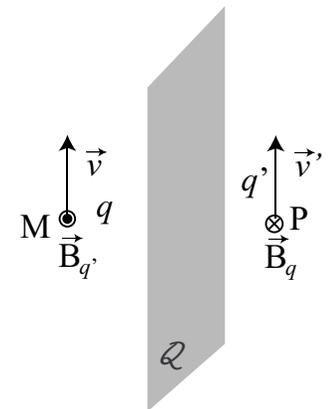


FIGURE 23 – Plan de symétrie et d'antisymétrie.

Remarque 11 :

L'expression du champ magnétique créée par une charge en mouvement donne d'excellent résultat pour des vitesses faibles mais ne permet pas de valider la 3^e loi de Newton ! En effet, pour une charge q' se déplaçant vers M, le champ magnétique créée est nul puisque $\vec{v}' \wedge \vec{r} = \vec{0}$, tout comme la force exercée sur q : $\vec{F}_q = q\vec{v}' \wedge \vec{B}_{q'} = \vec{0}$. Si la charge q ne se déplace pas vers q' , alors le champ magnétique créée par q à l'endroit de q' est non nul, il en va de même pour la force exercée par q sur q' . Ainsi : $\vec{F}_q = \vec{0} \neq \vec{F}_{q'}$. La relativité restreinte permet alors de justifier ces expressions.

II. Loi de Biot et Savart

Soit n' le nombre de charge q' par unité de volume, le champ magnétique en un point M créée par un volume infinitésimal $d\tau$ en P s'écrit :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{n'q'\vec{v}' \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} d\tau$$

En reconnaissant l'expression du vecteur densité de courant $\vec{j} = nq'\vec{v}'$ et pour des circuits de section S négligeable devant PM, le terme $n'q'\vec{v}'d\tau$ peut s'écrire sous la forme

$$n'q'\vec{v}'d\tau = \underbrace{jS}_{I} d\vec{\ell}$$

L'intégration sur un circuit filiforme \mathcal{C} conduit à la loi de Biot et Savart :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{Id\vec{\ell} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

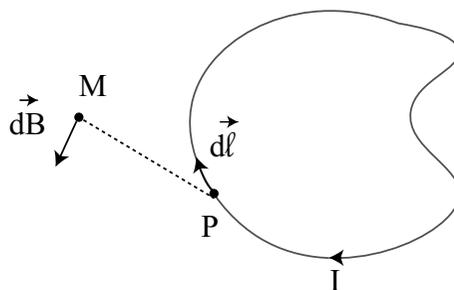


FIGURE 24 – Champ créée par un circuit filiforme.

où $d\vec{\ell}$ est orienté dans le sens du courant I. Cette formulation du champ magnétique est une approximation acceptable si la distance entre le point d'observation et le circuit est largement supérieur à la section du fil et si la vitesse des charges responsables du courant est largement inférieure à c .

III. Champ créée par une spire

Il est possible d'utiliser la loi de Biot et Savart pour déterminer le champ magnétique le long de l'axe d'une spire de rayon R parcourue par un courant I. Tout plan contenant l'axe Oz de la spire est un plan d'anti-symétrie pour le courant et donc de symétrie pour le champ magnétique. Ce dernier est donc nécessairement colinéaire à cet axe :

$$\vec{B}(M \in Oz) = B_z(r = 0, \theta, z) \vec{e}_z$$

Décomposons l'intégrale de la loi de Biot et Savart en faisant intervenir l'origine O de la spire ($\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM}$) :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\oint_{\mathcal{C}} \frac{Id\vec{\ell} \wedge \overrightarrow{PO}}{PM^3} + \oint_{\mathcal{C}} \frac{Id\vec{\ell} \wedge \overrightarrow{OM}}{PM^3} \right)$$

La seconde intégrale est nulle par symétrie. La première peut se décomposer en utilisant les coordonnées cylindriques :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{IRd\theta \vec{e}_\theta \wedge (-R \vec{e}_r)}{(\sqrt{R^2 + z^2})^3}$$

On obtient finalement :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z$$

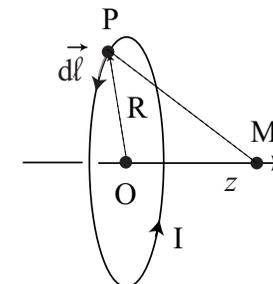


FIGURE 25 – Champ magnétique créée par une spire.