

Le potentiel électrostatique

La notion de potentiel permet de décrire l'évolution d'un système. c'est un concept très général que l'on retrouve en physique (potentiel électrostatique, objet de ce chapitre, potentiel de pesanteur, potentiel hydrique *etc.*), en chimie (potentiel chimique, potentiel redox, *etc.*). Un système évolue spontanément vers les états de bas potentiel ce qui permet de représenter et de quantifier de manière exacte mais très visuelle l'évolution de phénomènes physico-chimiques complexes vers un éventuel état d'équilibre.



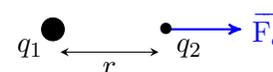
Le potentiel électrostatique est associé à l'énergie potentielle électrostatique que nous définirons en début de chapitre. On peut alors généraliser cette notion et l'exprimer en fonction du champ électrostatique. L'unité du potentiel électrostatique est le volt (V). Dans un circuit électrique, on mesure des différences de potentiel à l'aide d'un voltmètre par exemple. Les lignes haute tension (225 000 V ou 400 000 V) transportent un signal électrique depuis un site de production (barrage hydroélectrique, centrale nucléaire, parc d'éoliennes) vers un poste de transformation (abaissement de la tension) en fonction des utilisations (industrie, train, habitation, *etc.*). Le flux d'informations le long d'une fibre nerveuse (axone) est aussi un signal électrique provenant d'une différence de potentiel électrostatique (potentiel membranaire). Enfin, le condensateur est un composant électronique important, il

est constitué de deux armatures de charges opposées et séparées par un isolant. Les applications des condensateurs sont nombreuses : filtrage de signaux électriques, stockage d'énergie, *etc.*

I. Énergie potentielle électrostatique

1 - Cas d'une charge ponctuelle

Considérons un système de deux particules chargées positivement, situées à une distance a l'une de l'autre. Ce système possède une certaine énergie potentielle électrique. En effet, si on lâche les particules, elles se repoussent et s'éloignent l'une de l'autre : elles acquièrent de l'énergie cinétique. On peut donc leur associer une énergie potentielle (électrostatique) qui est convertie en énergie cinétique lorsque les particules accélèrent sous l'effet de la force de répulsion.



Supposons que la particule 1 est maintenue immobile et que la particule 2 est lâchée sans vitesse initiale (par exemple la particule 1 est beaucoup plus lourde

que la particule 2 et donc demeure pratiquement immobile). La force électrique répulsive que la particule 1 exerce sur la particule 2 effectue un travail positif (moteur) au cours du déplacement de la particule 2. C'est ce travail qui est responsable du transfert d'énergie potentielle du système en énergie cinétique. A un moment quelconque du mouvement de la particule 2, on note r la distance qui la sépare de la particule. La force exercée par 1 sur 2 s'écrit d'après de la loi Coulomb

$$\vec{F}_e = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

L'énergie potentielle est définie par travail de la force électrique :

$$\begin{aligned} E_p(M) - E_p(\infty) &= -W_{\infty \rightarrow M}(\vec{F}_e) = -\int_{\infty}^M \vec{F}_e \cdot d\vec{l} = -\int_{\infty}^a \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ &= \left[-\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} \right]_{\infty}^a = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 a} \end{aligned}$$

L'énergie potentielle étant définie à une constante près, on assigne une énergie potentielle nulle au système $E_p(\infty) = 0$ lorsque les 2 particules sont très éloignées l'une de l'autre.

Définition :

L'énergie potentielle d'une paire de charges q_1, q_2 distante de r est définie par :

$$E_P = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

2 - Associations de charges ponctuelles

Propriété :

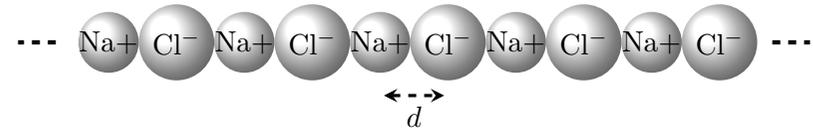
Pour un ensemble de N charges q_i ($i = 1, \dots, N$), l'énergie potentielle se généralise selon

$$E_{p,elec} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

Le facteur $1/2$ assurant ne pas compter deux fois l'interaction $q_i q_j$ et r_{ij} étant la distance entre les charges q_i et q_j .

Exemple 1

Considérons un cristal ionique $Na^+ Cl^-$. Pour simplifier, on suppose qu'il s'agit d'un cristal linéaire à 1 dimension. On sélectionne un ion de référence Na^+ .



1 - Définir l'énergie potentielle associée aux deux plus proches voisins Cl^- distants de d ? et celle associée aux deux voisins suivants Na^+ distants de $2d$?

2 - En sommant les différentes contributions, établir que l'énergie potentielle associée à un ion Na^+ se met sous la forme

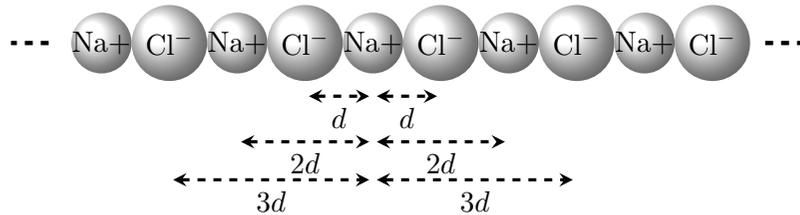
$$E_p = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d} \times 2 \times \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right)$$

3 - En utilisant la série $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots$, mettre l'énergie potentielle sous la forme $E_p = -M \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d}$ où M est appelée constante de Madelung et caractérise les interactions électrostatiques dans le cristal. Exprimer et calculer M .

- 4 - Comparer l'énergie potentielle de l'ion Na^+ dans la chaîne infinie à celle d'une seule paire ($\text{Na}^+ ; \text{Cl}^-$). Conclure sur la stabilité du cristal.
 5 - La constante de Madelung d'un arrangement 3D s'obtient de façon analogue et vaut $M = 1,748$. La distance $d = 281,0 \text{ pm} = 281,0 \cdot 10^{-12} \text{ m}$. Calculer l'énergie d'une mole de cristal 3D. La comparer à l'énergie réticulaire mesurée (énergie nécessaire pour décomposer une mole d'un solide cristallisé en ses ions). $E_{ret} = -770 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Pour s'entraîner : exercice ??

- 1 - Par définition, $E_{p,\text{Cl}-\text{Cl}} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d}$ et $E_{p,\text{Na}-\text{Na}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 2d}$
 Ainsi, pour deux plus proches voisins : $E_{p,\text{Cl}} = -2\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d}$ et $E_{p,\text{Na}} = 2\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 2d}$
 2 - Pour une chaîne infinie, évaluons les distances séparant les ions :



on aura donc

$$E_p = -2 \left[\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 2d} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 3d} \dots \right] = -\frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 d} \times \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right)$$

L'énergie potentielle de deux charges ponctuelles q, q' s'écrit

- 3 - On reconnaît $\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots$ d'où la constante de Madelung $M = 2 \ln(2) = 1,386$.

- 4 - L'énergie potentielle du cristal infinie est 1,4 plus basse que celle d'une seule paire ($\text{Na}^+ ; \text{Cl}^-$). Donc le cristal est la forme stable.
 5 - Le cristal 3D présente une énergie plus basse que le cristal linéaire et est donc la forme stable du sel NaCl . On calcule pour une mole

$$E_p = -\frac{1.748 \times (1,6 \cdot 10^{-19})^2 \times 6,02 \cdot 10^{23}}{4 \times \pi \times 8,85 \cdot 10^{-12} \times 281 \cdot 10^{-12}} = -862 \cdot 10^5 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} = -862 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Cette valeur assez proche de l'énergie réticulaire mesurée. La différence est due au fait que l'énergie réticulaire est la somme de l'énergie potentielle électrostatique et de l'énergie de répulsion des nuages électroniques qui n'est pas pris en compte ici.

Remarque 1 :

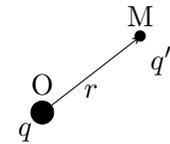
La constante de Madelung dépend de la charge des ions et de leur arrangement cristallographique (qui définit la période entre les différents ions).

ions).	cristal	structure	M
	NaCl	cubique à faces centrées	1,748
	CsCl	cubique centré	1,763
	CaF ₂	cubique faces centrées et sites tétraédriques	5,039

II. Potentiel électrostatique

1 - Énergie potentielle

$$E_p = q' \times \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$



Ainsi, de la même façon que le champ électrique est déduit de la force électrostatique selon $\vec{F}_e = q\vec{E}$, le potentiel électrostatique V d'une charge q est relié à l'énergie potentielle électrostatique d'une charge test q' selon $E_{p,elec} = q'V$. On peut donc définir le potentiel créé par la charge q à l'endroit M de la charge q' par

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Définition :

L'énergie potentielle d'une charge q' placée en M, plongée dans le potentiel $V(M)$ vaut

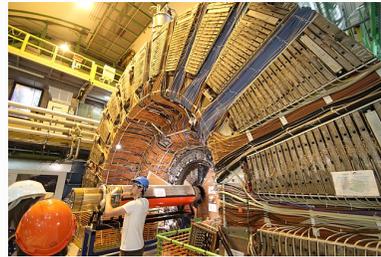
$$E_p = q'V(M)$$

L'unité du potentiel est le volt (V).

Pour mieux appréhender le potentiel électrostatique, il est utile d'effectuer l'analogie avec le potentiel de pesanteur. Rappelons que l'énergie potentielle de pesanteur d'une masse m à l'altitude z vaut mgz . Ainsi, le potentiel de pesanteur serait $V_{pesanteur} = mgz/m = gz$. Le potentiel de pesanteur est donc proportionnel à l'altitude. Par analogie, si une masse à une altitude donnée dans le champ de pesanteur tombe vers les positions de faibles altitudes, une particule chargée tend à se déplacer vers les zones de faibles potentiels.

Remarque 2 :

Dans les accélérateurs de particules (cf. fig. ci-contre, accélérateur de particule du CERN, Genève, image sous licence ) , l'énergie cinétique est définie en électronvolt (eV), elle correspond à l'accélération d'un électron d'une charge élémentaire $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C par une différence de potentielle de 1 V.



2 - Potentiel et champ électrostatique

Nous nous intéressons ici au lien entre le potentiel et son champ électrique. Pour le déterminer, nous utilisons à nouveau les relations entre énergie potentielle, potentiel et travail de la force électrostatique. La force électrostatique subit par une charge q dans un champ électrique \vec{E} s'écrit $\vec{F}_e = q\vec{E}$. On en déduit l'expression de la variation d'énergie potentielle entre les deux positions

A et B.

$$E_p(B) - E_p(A) = -W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_e) = - \int_A^B \vec{F}_e \cdot d\vec{l} = - \int_A^B q\vec{E}(M) \cdot d\vec{l}$$

Or, $E_p(A) = qV(A)$ et en B $E_p(B) = qV(B)$ par définition du potentiel électrostatique (voir le § précédent). On en déduit la relation

$$E_p(B) - E_p(A) = - \int_A^B q\vec{E}_e \cdot d\vec{l} = q[V(B) - V(A)]$$

On peut simplifier par la charge q .

Définition :

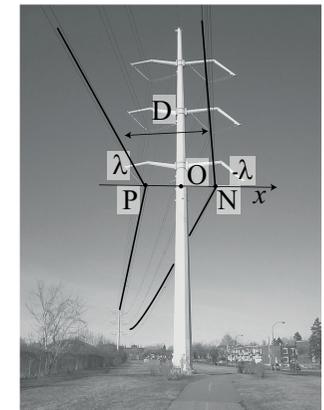
La variation de potentiel dans un champ électrique

$$V(B) - V(A) = - \int_A^B \vec{E}_e \cdot d\vec{l}$$

Cette intégrale est appelée **circulation du champ électrique** car elle correspond à l'accumulation du champ électrique le long du chemin allant de A à B. Cette forme justifie que l'unité du champ électrique est $V \cdot m^{-1}$.

Exemple 2

En France, le réseau électrique est constitué de lignes triphasées dans lesquelles circule un courant alternatif à 50 Hz. Afin de simplifier les calculs, on ne considère qu'une ligne monophasée, constituée de deux cables cylindriques parallèles N et P, supposés de longueurs infinies, séparés d'une distance D. On modélise la ligne électrique d'un point de vue électrostatique. avec λ la densité de charge linéique du cable P, le cable N portant une densité de charge opposée $-\lambda$. Le champ entre les deux



fil suit l'expression (admise, cf. ex. ??)

$$\vec{E}_{tot}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{D/2+x} + \frac{1}{D/2-x} \right) \vec{e}_x$$

1 - Les câbles de rayon R ont pour potentiel à leur surface V_P et V_N , respectivement aux points P et N. Montrer que la différence de potentielle $V_P - V_N$ vaut

$$V_P - V_N = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{D-R}{R}$$

2 - En déduire la valeur de λ pour une différence de potentielle de 400 kV.
Données : $D = 3,00$ m ; $R = 3,00$ cm ; $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ F · m⁻¹

Pour s'entraîner : exercices ?? et ??

1 - La différence de potentielle se calcule par la circulation du champ électrique entre P d'abscisse $x_P = -D/2 + R$ et N ($x_N = D/2 - R$). Avec $\vec{dl} = dx\vec{e}_x$, il vient

$$\begin{aligned} V_N - V_P &= - \int_P^N \vec{E} \cdot \vec{dl} = - \int_{x_P}^{x_N} E(x) \cdot dx \\ &= - \int_{x_P}^{x_N} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{D/2+x} + \frac{1}{D/2-x} \right) dx \\ &= - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln(D/2+x) - \ln(D/2-x) \right]_{x=-D/2+R}^{D/2-R} \\ &= - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln \frac{D-R}{R} - \ln \frac{R}{D-R} \right] \\ &= - \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{D-R}{R} \end{aligned}$$

2 - En inversant la formule, on obtient :

$$\lambda = \pi\epsilon_0 \frac{V_P - V_N}{\ln \frac{D-R}{R}} = 2,42 \cdot 10^{-6} \text{ C} \cdot \text{m}^{-1}$$

Remarque 3 :

Si le champ électrique est connu, on peut établir la forme du potentiel électrostatique par circulation du champ. Réciproquement, il est possible de déterminer le champ électrique à partir du potentiel électrostatique.

Considérons une circulation sur un contour infinitésimal \vec{dl} :

$$dV - \vec{E}_e \cdot \vec{dl} = -E_x dx - E_y dy - E_z dz$$

Par définition de la différentielle :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

Ainsi, par identification, on obtient les relations

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad \text{et} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Propriété :

Pour une distribution de charge statique^a, le champ électrique est relié au potentiel par :

$$\vec{E} = -\text{grad } V$$

où grad l'opérateur gradient, défini dans un repère cartésien^b par :

$$\text{grad } V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{e}_z$$

a. Nous verrons au chapitre ?? que cette relation doit être aménagée dans le cas des régimes variables temporellement.

b. Cet opérateur prend des formes différentes selon la géométrie utilisée.

3 - Représentation du potentiel

▲ Définition :

On appelle surface équipotentielle l'ensemble des points de l'espace vérifiant $V(M) = C^{te}$.

La figure 1.1.a représente les lignes de champ et les équipotentiels pour une charge ponctuelle. Comme le potentiel ne dépend que du rayon, les surfaces de potentiel constant sont des sphères (qui se réduisent à des cercles dans le plan) :

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = C^{te} \quad \text{soit} \quad r = C^{te}$$

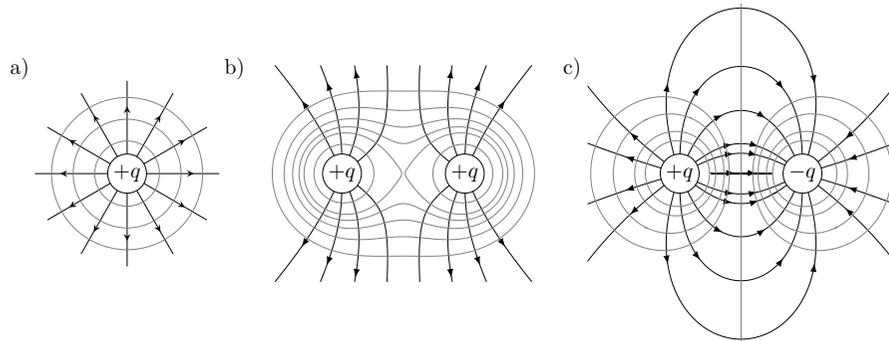


FIGURE 1.1 – Lignes de champ (noir) et équipotentiels (gris). a) Charge ponctuelle positive. b) Deux charges positives identiques. c) Deux charges de signes opposées.

On remarque également que les lignes de champs sont orthogonales aux équipotentiels. Cette propriété est générale, pour un déplacement $d\vec{\ell}$ le long d'une ligne équipotentielle quelconque AB, alors :

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \underbrace{\vec{E} \cdot d\vec{\ell}}_{=0} = 0 \quad \text{soit} \quad \vec{E} \perp d\vec{\ell}$$

■ Propriété :

Les surfaces équipotentiels sont perpendiculaires aux lignes de champ.

La figure 1.1.b et c. représente les lignes de champ et les équipotentiels pour un système de charges. On observe une déformation des lignes de champ et des équipotentiels dû à la présence d'autre charges. On vérifie bien que les équipotentiels sont perpendiculaires aux lignes de champ en tout point.

📌 Remarque 4 :

Des simulations numériques permettent de calculer le potentiel électrostatique sur des molécules complexes. Par exemple l'enzyme Uracil-DNA Glycosylase (UDG) intervient dans certains mécanismes de réparation d'ADN ayant subi une mutation. Le potentiel simulé (cf. fig. 1.2) permet de comprendre l'interaction du système ADN-enzyme. Les zones de potentiel positif (blanc) de l'enzyme attire les zones de potentiel négatif (noir) du brin d'ADN.

4 - Condensateur

a) Modèle idéal

▲ Définition :

Le condensateur est un composant électronique ou électrique élémentaire, constitué de deux armatures conductrices séparées par un isolant. Soumise à une différence de potentiel, les armatures portent des charges opposées. La charge Q est proportionnelle à la tension U aux bornes du condensateur, le coefficient de proportionnalité entre charge et tension appelé capacité électrique et exprimée en farads [F].

$$Q = C \times U$$

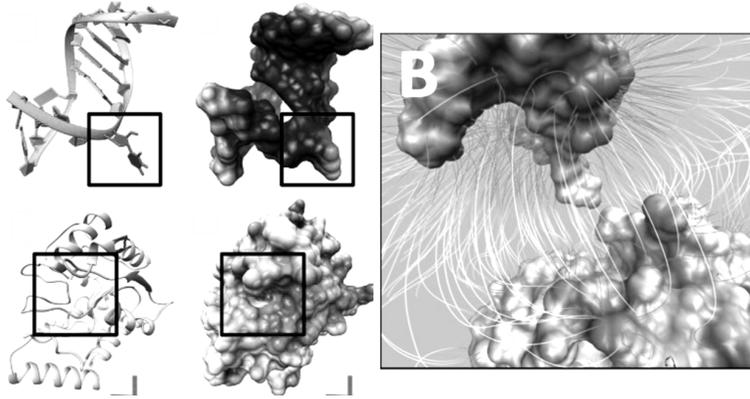


FIGURE 1.2 – Brin d’ADN et Enzyme UDG (gauche), potentiel électrostatique (milieu) et carte de champ du système ADN-enzyme. D’après *Computational Study on DNA Repair : The Roles of Electrostatic Interactions Between Uracil-DNA Glycosylase (UDG) and DNA*, *Frontiers in Molecular Biosciences* 8, 718587 (2021).

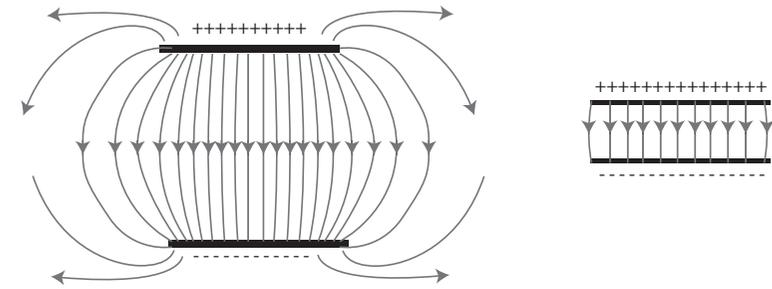


FIGURE 1.4 – Lignes de champ entre deux plaques chargées.

b) Capacité du condensateur plan

Exemple 3

Un condensateur plan est formé par deux plaques en vis-à-vis, séparées par la distance e , chargées en surface, l’une positivement $+\sigma$ (1), l’autre négativement $-\sigma$ (2).

1 - Loin des bords des plaques, le champ généré par chaque plaque peut être approximé par le champ d’une plaque infiniment étendue de norme $\sigma/2\epsilon_0$. En déduire le champ entre les plaques.

2 - Exprimer la différence de potentielle entre les deux plaques chargées.

3 - En déduire la capacité du condensateur plan. La calculer.

Données :

$S = 2,0 \text{ cm}^2 = 2,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$, séparées de $e = 1,0 \mu\text{m} = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.

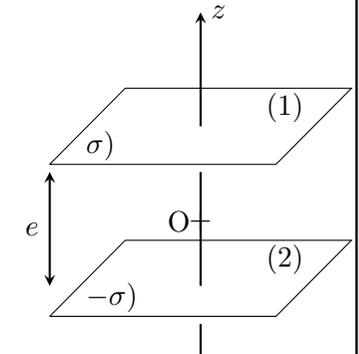
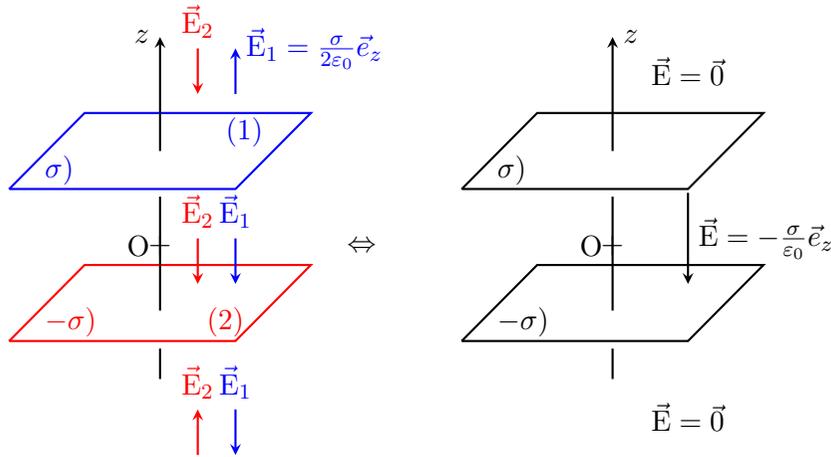


FIGURE 1.3 – Les différents types de condensateur

Le modèle d’un condensateur parfait considère que les deux armatures sont en influence totale, c’est-à-dire que toutes les lignes de champ issues d’une armature arrive sur l’autre armature (cf. fig. 1.4). L’influence totale peut être validée lorsque l’écartement entre les armatures est très faible devant leur taille.

Pour s’entraîner : exercices ??, ??,?? et ??

1 - Le champ généré par une plaque est obtenu via le théorème de Gauss (cf. ??) et s’oriente selon la nature de la charge. On en déduit le champ généré par chaque plaque :



2 - La différence de potentielle entre les deux plaques se calcule selon

$$U = V_1 - V_2 = - \int_2^1 \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{z=-e/2}^{e/2} -\frac{\sigma}{\epsilon_0} dz = \int_{-e/2}^{e/2} \frac{\sigma}{\epsilon_0} dz = \frac{\sigma}{\epsilon_0} e$$

3 - En faisant apparaître la charge portée par chaque plaque : $Q = \sigma S$, on détermine la capacité C du condensateur ($Q = CU$)

$$C = \frac{Q}{U} = \sigma S \times \frac{\epsilon_0}{\sigma e} = \frac{\epsilon_0 S}{e} = 1,8 \text{ nF}$$

c) Influence du diélectrique

La capacité très faible obtenue dans l'exemple précédent peut être modifiée, en changeant le matériau entre les armatures du condensateur. La modification est proportionnelle à la permittivité relative du diélectrique (ϵ_r sans unité) répertorié dans le tableau 1.1. En présence d'un matériau diélectrique, la capacité du condensateur plan est augmentée du facteur ϵ_r :

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{e}$$

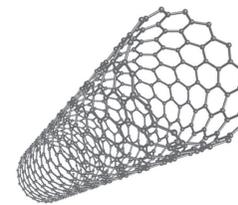
Substance	vide	air sec	eau	verre	nylon	huile	Plexiglas
ϵ_r	1	1.0006	78.5	5 - 7	3.5	2.2	2-4

TABLE 1.1 – Permittivité électrique de différentes matières.

Remarque 5 :

Le stockage d'énergie dans des condensateurs de grande capacité, appelée supercondensateur, nécessite d'avoir des permittivités très importantes pour concurrencer les batteries chimiques en terme de densité énergétique. L'utilisation de nanotubes de carbones est une piste explorée pour obtenir des capacités suffisantes.

L'image tech de l'ingénieur passe pas... pour les droits, je crois que c'est mort



Carbone NanoTub

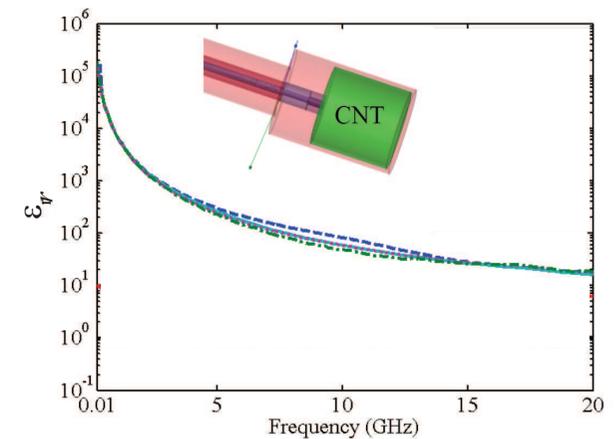


FIGURE 1.5 – Mesure expérimentale de la permittivité de Nanotubes de Carbone (CNT).

D'après *Rigorous Characterization of Carbon Nanotube Complex Permittivity over a Broadband of RF Frequencies, 2012*