

Champ électrostatique

L'électrostatique est le domaine de la physique qui décrit les interactions entre des charges électriques dans le régime indépendant du temps. Nous verrons qu'il y a de fortes analogies entre la force électrostatique et l'interaction gravitationnelle. Les effets électrostatiques sont courants dans la vie quotidienne. Par exemple la foudre correspond à une décharge électrique entre des nuages chargés électriquement et la terre. La soudure à l'arc utilise un arc électrique pour faire fondre et assembler deux pièces métalliques. Les photocopieuses sont aussi un exemple d'applications technologiques de l'électrostatique : l'encre est chargée négativement et est déposée sur les zones activées chargées positivement. De même, les fabricants automobiles utilisent de la peinture chargée négativement et chargent la carrosserie positivement. La peinture se colle donc à la carrosserie ce qui diminue considérablement le gaspillage de peinture. Les écrans tactiles les plus récents (dits capacitifs) reposent sur la modification du champ électrique à proximité du doigt. Et bien évidemment, un circuit électrique en régime continu est le siège d'un champ électrostatique qui permet de faire fonctionner différents composants (lampe torche, circuit électronique, *etc.*).



I. Charge électrique

1 - Électrisation d'un corps

a) Charge par friction - triboélectricité

À l'échelle microscopique, la matière est constituée d'atomes, eux-mêmes constitués de proton (chargés positivement), d'électrons (chargés négativement), et de neutrons. Les atomes sont neutres mais on peut trouver la matière sous forme d'ions (cations positifs ou anions négatifs). À l'échelle macroscopique, différentes méthodes sont possibles pour modifier la charge d'un objet.

On peut provoquer un transfert d'électrons lorsque l'on frotte deux objets (dont l'un au moins est un isolant). L'objet qui gagne des électrons devient chargé négativement tandis que celui qui a perdu des électrons se charge positivement. Cette charge par friction, appelée triboélectricité intervient dans la formation des éclairs dans les nuages (cf. fig. 1.1). On retrouve également ce phénomène lorsqu'on se coiffe avec une brosse contenant du polyester, la brosse se charge négativement et les cheveux se chargent positivement. Les cheveux se repoussent car portent des charges de mêmes signes. De même, il apparaît des charges électriques lorsque l'on porte dans la journée un pull contenant de la laine frottant sur une chemise ou un t-shirt contenant du polyester. Lorsqu'on enlève le pull, on a donc deux objets de charges opposées séparés par de l'air.

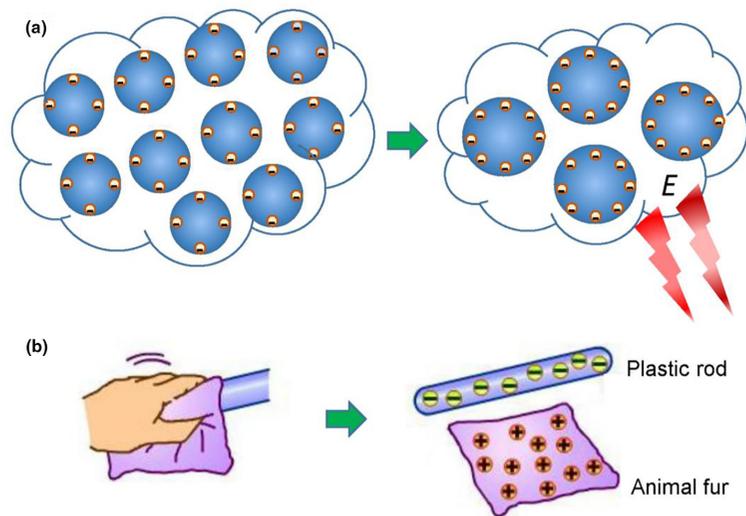


FIGURE 1.1 – Charge par friction. a) A l’intérieur du nuage d’orage, les courants ascendants (air chaud) et descendants (air froid) font s’entrechoquer les particules d’eau et de glace. Ces frictions finissent par électriser le nuage. b) Friction d’une fourrure sur une baguette plastique. D’après *On the origin of contact-electrification*; Wang, *Materials Today* **30**, 34 (2019).

On peut alors observer de petits éclairs (courant électrique qui se produit si la tension est au-dessus de la tension de claquage de l’air). Il est possible de classer les matériaux en séries triboélectriques suivant leur propension à se charger plus ou moins positivement ou négativement (cf. fig. 1.2).

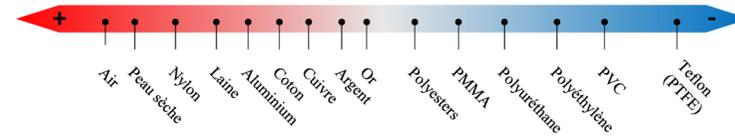


FIGURE 1.2 – Exemple de série tribologique. D’après *Récupération d’énergie mécanique pour vêtements autonomes connectés*; M. Geller, thèse Université Grenoble (2017).



Remarque 1 :

Des travaux récents ont montré l’intérêt de la triboélectricité pour réaliser des textiles intégrant des sources de tension capable d’alimenter différents capteurs comme un électrocardiographe (cf. fig. 1.3).

b) Electrification par influence et charge par contact

Dans un conducteur, il existe des électrons libres de se déplacer. Si on approche un corps chargé négativement d’un objet métallique, les électrons libres du métal migrent le plus loin possible des charges négatives que l’on approche (réciproquement si on approche un objet chargé positivement, les électrons libres du métal s’approchent de ces charges positives). La répartition des charges dans le conducteur est alors déséquilibrée avec un côté chargé positivement et un côté chargé négativement, même si l’ensemble est globalement neutre. Le conducteur est alors dit polarisé, il présente une face chargée positivement devant le corps chargé négativement et il y a attraction (cf. fig.1.4.a). Si on éloigne l’objet chargé, les électrons retrouvent leur position d’équilibre. Par contre, si il y a contact, il peut y avoir transfert d’électrons de l’isolant chargé négativement vers le métal (ou du métal vers l’isolant si l’isolant est chargé positivement) et

Après avoir frotté une tige de plastique avec un morceau de laine, on mesure une charge positive Q de l'ordre de 10^{-12}C . Bien que faible, cette charge correspond à un déplacement de plusieurs millions d'électrons ($n_e = Q/e = 6 \cdot 10^6$ électrons enlevés de la tige par friction) laissant un surplus d'autant de charges positives. À l'échelle macroscopique qui nous intéresse, on peut se contenter de modéliser la tige chargée par une distribution continue de charge au lieu de tenir compte de la distribution discrète de 6 millions de charges élémentaires.

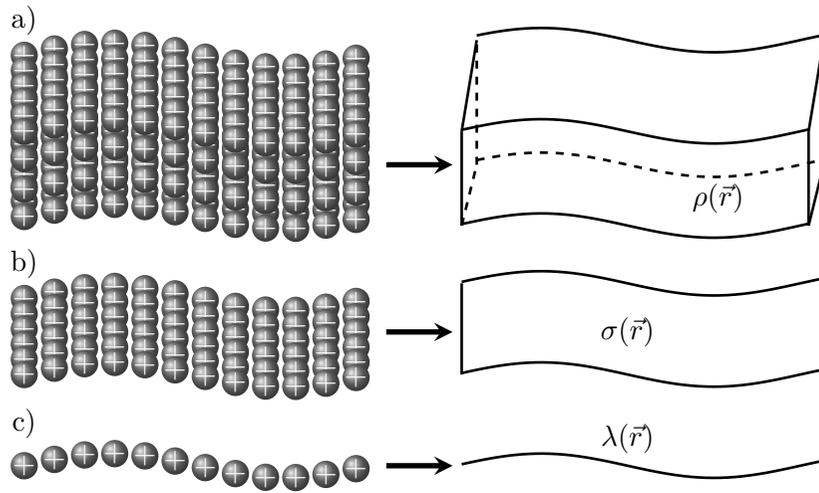


FIGURE 1.5 – Modélisation continues de distributions de charges. a) Charges réparties en volumes remplacées par une distribution volumique de charges ρ . b) Charges confinées en surface assimilées par une distribution surfacique de charges σ . c) Charges réparties le long d'un fil assimilées par une distribution linéique de charges λ .

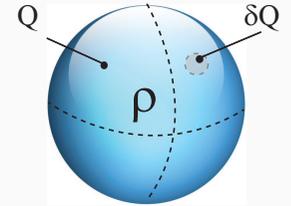
Selon la répartition des charges dans l'objet (à la surface ou dans le volume de l'objet, ou encore le long d'un fil), on peut modéliser la distribution physique discrète de charges par trois types de distributions idéalisées continues de charges (cf. fig. 1.5).

Définition :

Pour un matériau chargé en volume, on décrit la charge par la distribution volumique $\rho(\vec{r})$ telle que sur un élément de volume $d^3\tau$, la charge élémentaire vaut

$$\delta Q = \rho(\vec{r})d^3\tau$$

avec $[\rho] = \text{C} \cdot \text{m}^{-3}$.



La charge complète s'obtient par intégration sur le volume \mathcal{V} contenant la charge :

$$Q = \iiint_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r})d^3\tau$$

L'objet n'est pas nécessairement uniformément chargé, la distribution de charge peut dépendre de la position \vec{r} dans l'objet.

Propriété :

Lorsque la distribution volumique de charge est **uniforme** : $\rho(\vec{r}) = \text{C}^{\text{te}}$, la charge volumique est liée à la charge totale Q et au volume \mathcal{V} de l'objet chargé : $Q = \rho \times \mathcal{V}$.



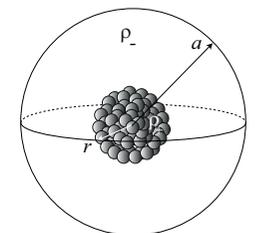
Exemple

Un noyau de Plomb contient 82 protons répartis sur une sphère de rayon $r = 7 \text{ fm}$, le rayon atomique vaut $a = 180 \text{ pm}$.

1 - En supposant la répartition de charges uniformes, déterminer la densité volumique de charge ρ_+ dans le noyau.

2 - De même, estimer la densité volumique de charge dans le nuage électronique notée ρ_- .

Données : $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.



1 - Par définition, pour une charge volumique uniforme, la densité volumique est donnée par :

$$\rho_+ = \frac{82 \times e}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 9 \cdot 10^{24} \text{ C} \cdot \text{m}^{-3}$$

2 - On obtient de même : $\rho_- = -\frac{82 \times e}{\frac{4}{3}\pi a^3} = -5 \cdot 10^{11} \text{ C} \cdot \text{m}^{-3}$.

Remarque 2 :

Des modèles de répartition de charge dans les noyaux sont utilisés pour comprendre les réactions nucléaires et les interactions entre le noyau atomique et les électrons. La densité de charge n'est pas uniforme (cf. fig. 1.6) et traduit les phénomènes complexes présents au sein du noyau. Le modèle classique de Gamow dit de la « goutte liquide » a donné des résultats précieux dans les années 1930 sur le comportement des noyaux. L'ajout de modèles quantiques prévoit l'existence de noyaux « super-lourds » non encore découverts à ce jour.

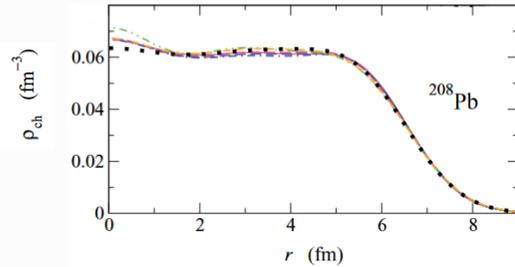


FIGURE 1.6 – Dépendance radiale de la densité de charge dans un atome de Plomb. D'après *Theoretical study of elastic electron scattering off stable and exotic nuclei*, *Phys. Rev. Let.* 2008.

Lorsque la partie chargée possède au moins une dimension très inférieure aux autres, on modélise la distribution de charge par une distribution soit surfacique, soit linéique.

Définition :

- Pour une distribution surfacique σ , la charge contenue sur une surface infinitésimale est donc donnée par : $\delta Q = \sigma d^2S$ avec $[\sigma] = \text{C} \cdot \text{m}^{-2}$.
- Pour une distribution linéique λ , la charge contenue sur un segment infinitésimale $d\ell$ est donnée par $\delta Q = \lambda d\ell$ avec $[\lambda] = \text{C} \cdot \text{m}^{-1}$.



Selon la distribution, la charge s'obtient par intégration sur la surface ou la longueur du dispositif :

$$Q_{\text{tot}} = \iint_S \sigma d^2S \quad \text{ou} \quad Q_{\text{tot}} = \int_{\mathcal{L}} \lambda d\ell$$

Le lecteur trouvera en annexe XXX, les expressions des surfaces et volumes infinitésimaux dans les géométries usuelles.

II. Champ électrostatique

1 - Loi de Coulomb

a) Force électrostatique

La force de l'interaction électrique entre deux particules chargées électriquement a été étudiée expérimentalement par C.-A. Coulomb à la fin du XVIII^e siècle. La formule qui en découle est appelée loi de Coulomb et énoncée ci-dessous.

Définition :

La force exercée par une charge q_1 sur une charge q_2 à une distance r de q_1 est donnée par la loi de Coulomb :

$$\vec{F}_{1/2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

où $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^4 \cdot \text{A}^2$ est appelée permittivité du vide, \vec{e}_r est un vecteur unitaire dirigé de 1 vers 2 (cf. fig. 1.7).

Forces répulsives ($q_1 q_2 > 0$). **Forces attractives** ($q_1 q_2 < 0$).

Charges de mêmes signes. Charges de signes opposés.

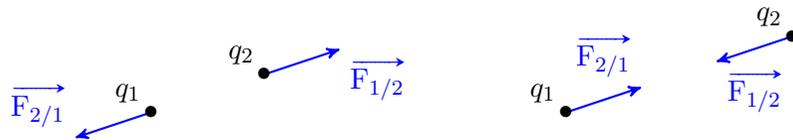


FIGURE 1.7 – Forces exercées sur des charges ponctuelles.

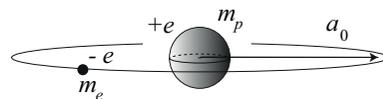
Propriété :

Si les charges sont de même signes, la force est répulsive. Si les charges sont de signes opposés, la force est attractive (cf. fig. 1.7).

Par principe d'action réaction, la force exercée par q_2 sur q_1 est $\vec{F}_{2/1} = -\vec{F}_{1/2}$. Cette force agit sur des charges proches en raison de sa décroissance rapide en $1/r^2$.

Exemple 2

Comparer (en norme) la force électrostatique et la force de gravitation entre le proton et l'électron dans l'atome d'hydrogène. On assimilera la distance entre



le proton et l'électron au rayon de Bohr a_0 .

Données : constante de gravitation $\mathcal{G} = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ S} \cdot \text{I} \cdot$; $a_0 = 5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m}$; masse du proton $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$; masse de l'électron $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$; charge élémentaire $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Pour s'entraîner : exercices ??

Par définition, la force gravitationnelle vaut

$$F_g = \mathcal{G} \frac{m_p m_e}{a_0^2} = F_g = 3,6 \cdot 10^{-47} \text{ N}$$

Pour la force électrostatique, on obtient :

$$F_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0^2} = 8,2 \cdot 10^{-8} \text{ N} \ll F_g$$

À l'échelle atomique, la force gravitationnelle est négligeable devant la force électrostatique.

Remarque 3 :

Dans un milieu différent du vide, l'expression de la force de Coulomb devient

$$\vec{F}_{1/2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r r^2} \vec{e}_r$$

où ϵ_r est une constante, appelée permittivité diélectrique relative, qui caractérise les propriétés électrostatique du milieu. Le tableau ci-dessous donne quelques exemples de permittivité *statique*. Nous généraliserons la notion en régime variable lors du chap. ??.

matériau	air sec	plexiglass	bakélite	éthanol	eau
ϵ_r	1,0006	3,5	3,6	24	78,5

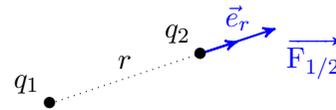
L'air sec peut donc être assimilé au vide en première approximation. L'eau présente une constante très élevée ce qui indique que les forces de Coulomb entre des ions en solution aqueuse seront faibles. Ceci est à l'origine du fort pouvoir de solvation de l'eau. Par exemple, la solubilité de NaCl est de $358,5 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$ dans l'eau et seulement $0,65 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$ dans l'éthanol.

2 - Notion de champ

a) Expression

Considérons la force exercée par une charge q_1 sur une charge q_2 placée à une distance r

$$\vec{F}_{1/2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r = q_2 \times \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$



La charge q_2 est donc soumise à une force due à la charge q_1 dépendant uniquement de sa position relative à q_1 . Cela conduit à définir un champ électrique \vec{E} créé par la charge q_1 telle que la force exercée sur q_2 soit de la forme

$$\vec{F}_{1/2} = q_2 \vec{E}(\vec{r}) \quad \text{avec} \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

La notion de champ vectoriel a déjà été vu en mécanique, pour définir le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ où \vec{g} est le *champ* de pesanteur terrestre. Le champ électrique peut être construit avec cette analogie.

◆ Définition :

Le champ électrique créé en un point M (repéré par le vecteur $\vec{OM} = r\vec{e}_r$ dans le repère sphérique) par une charge ponctuelle q placée en O est

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

L'unité du champ électrique est le volt par mètre ($V \cdot m^{-1}$).

A ce stade, la notion de champ apparaît comme un outil mathématique pouvant simplifier l'écriture de forces qui serait la seule observable physique. Toutefois, la formulation moderne de l'électromagnétisme par James Maxwell à la fin du XIX^e siècle a bouleversé l'approche de la physique. Ainsi, la loi de Coulomb qui décrivait les interactions électrostatiques en termes de "force à distance" avant l'avènement de la notion de champ, n'est rigoureusement vraie que dans une approximation statique, c'est-à-dire, lorsque les sources du champ sont fixes et produisent un champ invariable au cours du temps. Sinon, on pourrait penser que q_1 exerce *instantanément* une force sur q_2 . La notion de propagation

du champ électrique¹, et donc des interactions électriques est abordé avec les équations de Maxwell chapitre ??.

1. Dans le cadre de la relativité générale, on prend aussi en compte la vitesse de propagation des interactions gravitationnelles. Le champ gravitationnel acquiert donc une réalité physique intrinsèque semblable à celle du champ électromagnétique.

b) Ordre de grandeur

Le champ électrostatique d'une charge décroît très vite avec la distance, en $\sim 1/r^2$ (cf. Tableau 1.1). En revanche, la présence de nombreuses charges à la surface de la Terre impose un champ électrique dont l'ordre de grandeur est de $100 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$ par beau temps à $20 \text{ kV}\cdot\text{m}^{-1}$ par temps orageux. Le champ maximal dans l'air, appelé champ disruptif de l'air correspond à la valeur limite pour lequel celui-ci devient conducteur : $E \sim 3,6 \cdot 10^6 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$. Pour un champ aussi important, les électrons des molécules d'air peuvent être arrachés et sont accélérés par le champ électrique. Il est alors possible d'observer des éclairs (cf. fig. 1.8).



FIGURE 1.8 – Éclair à Belfort (90), cliché de Thomas Bresson  .

- 1 - Pour un fil de soie de longueur $\ell = 80 \text{ cm}$, portant une charge linéique uniforme $\lambda = 1 \cdot 10^{-9} \text{ C}\cdot\text{m}^{-1}$, estimer la force de Coulomb s'exerçant sur un fil d'araignée placée en haut d'un arbre (cf. figure ci-dessus).
- 2 - Comparer au poids d'un araignée de masse $m = 1 \text{ mg}$. Conclure.

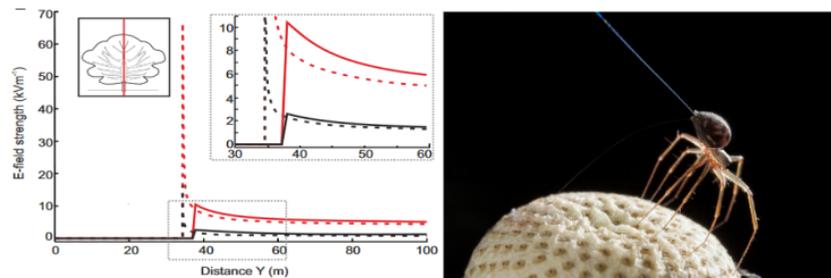
Pour s'entraîner : exercice

- 1 - Au sommet de l'arbre, la simulation montre un champ électrique de $10 \text{ kV}\cdot\text{m}^{-1}$. La charge portée par le fil est donnée par : $q = \lambda\ell = 0,8 \text{ nC}$. Par définition, la force de Coulomb est $F = qE = 8 \mu\text{N}$
- 2 - Le poids de l'araignée vaut $P = mg = 10 \mu\text{N}$. On obtient le même ordre de grandeur que la force de Coulomb, l'utilisation de plusieurs fils de soie chargés permet de compenser le poids.

e^- à 1 cm	e^- à 1 m	terrestre	champ disruptif de l'air
$1,4 \cdot 10^{-5} \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$	$1,4 \cdot 10^{-9} \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$	$100 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$	$1,6 \cdot 10^6 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$

TABLE 1.1 – Quelques valeurs du champ électriques.

 **Exemple 3** Des travaux récents suggèrent que certaines araignées (appelées araignées montgolfières-balloning spider en anglais) pourraient décoller et voler sur de longues distance en utilisant des fils de soie chargés, soumis au champ électrique de l'atmosphère.



Simulation du champ électrique sur un chêne. D'après *Electric Fields Elicit Ballooning in Spiders, Current Biology, 2018*

Remarque 4 :

Les phénomènes de triboélectricité interviennent sur de nombreux insectes, on a évalué à 50 pC la charge présente sur les ailes de mouche aussi bien que celles des abeilles et pourraient avoir une influence sur les conditions de vol. Pour les araignées volantes, la présence de vent joue aussi un rôle important. Des recherches seront encore nécessaire pour comprendre les effets de la turbulence sur les fils ou encore le dépôt de charge le long des soies d'araignée. Ci-contre, vidéo du décollage d'une araignée (<https://physics.aps.org/articles/v15/31>)



3 - Lignes de champs

Pour représenter le champ électrique, il est possible de représenter les vecteurs \vec{E} en différents points du plan d'observation (cf. fig. 1.9.a). Plus communément, on visualise le champ électrique par des lignes de champs (voir les figures 1.9, b et c).

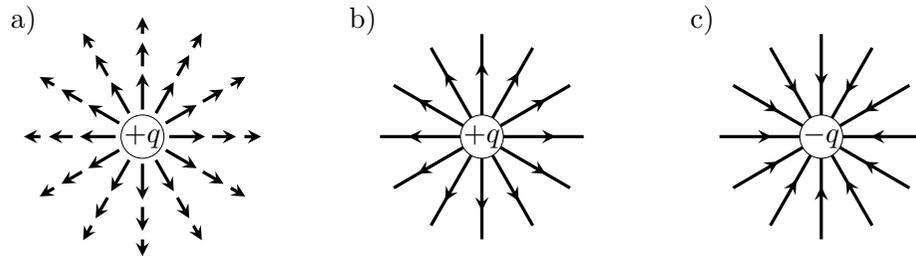


FIGURE 1.9 – a) Champ électrostatique généré par une charge $q > 0$. b) Lignes de champs correspondantes. c) Lignes de champs pour une charge $-q < 0$. Le champ est orienté vers la charge négative.

Propriété :

- Le champ est tangent aux lignes de champ.
- Les lignes de champs sont orientées par le champ électrique.

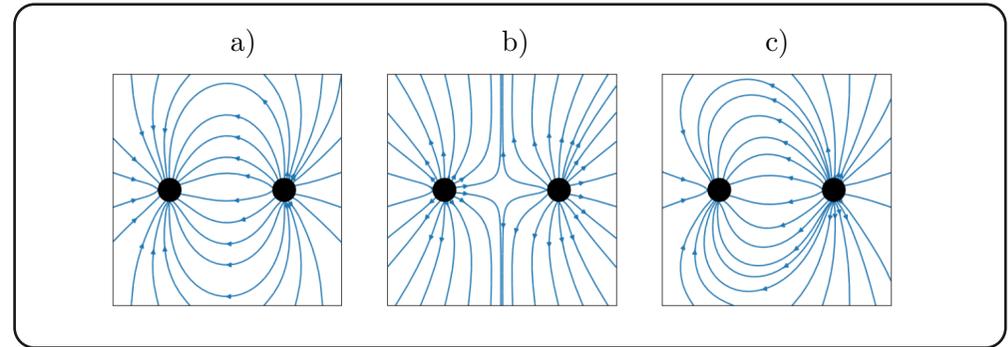
La figure 1.9.a représente le champ électrique créé par une charge positive. Le champ, de la forme $\vec{E} = q/4\pi\epsilon_0 r^2 \vec{e}_r$ est radial et sa norme décroît avec la distance à la charge source. Les lignes de champ associées 1.9.b sont donc des droites issues de la charge et orientées vers l'extérieur. Dans le cas d'une charge négative (cf. fig. 1.9.c), les lignes de champ sont orientées vers la charge.

Propriété :

- Une particule de charge positive est le point de départ d'une ligne de champ, tandis qu'une particule de charge négative est le point d'arrivée d'une ligne de champ).
- Le nombre de lignes de champs qui débutent ou se terminent sur un corps chargé est proportionnel à la valeur absolue de sa charge.

Exemple 4

Dans les figures ci-dessous, identifier les charges positives des charges négatives et les comparer en valeur absolue.



Pour s'entraîner : exercice ??

On repère sur chaque figure les charges positives pour lesquelles les lignes de champ partent. Pour la figure a), la charge positive est à droite. Dans la figure b), les deux charges sont positives. Figure c), la charge positive est également à droite. De la même manière, on repère les charges négatives lorsque les lignes de champ pointent vers elles. Les figures a et b étant symétriques, les charges sont identiques en valeur absolue. En revanche, sur la figure c, le nombre de ligne de champ est plus important à droite qu'à gauche. On en déduit que la charge de droite donc plus importante.

Remarque 5 :

On peut visualiser les lignes de champ en déposant des grains de semoule dans de l'huile. En présence d'un champ électrique, les grains s'orientent le long des lignes de champ par leur comportement dipolaire (cf. chap. ??). Le lien QR-code ci-contre propose une vidéo d'expériences d'électrostatique effectuée à l'école Polytechnique Fédérale de Lausanne.



III. Théorème de Gauss

1 - Notion de Flux

a) Flux du champ électrique au travers d'un plan

Le flux du champ électrique quantifie le champ qui traverse une surface. Si le champ est uniforme et perpendiculaire à la surface, le flux est simplement donné par $\phi = E \times S$ où E est l'amplitude du champ électrique et S l'aire de la surface traversée (voir Fig. 1.10a).

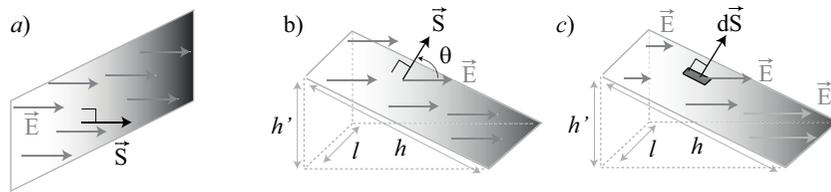


FIGURE 1.10 – Flux du champ électrique a) Champ uniforme et surface perpendiculaire au champ. b) Surface non perpendiculaire au champ. c) champ non uniforme.

Si la surface n'est pas perpendiculaire au champ (cf. fig. 1.10), on constate que le flux est aussi donné par le champ électrique traversant la surface verticale S' : $\phi = E \times S' = E \times lh'$. Or $h' = h \cos \theta$. On peut donc faire apparaître la surface $S = ab$ qui nous intéresse $\phi = E \times lh \cos \theta = E \times S \cos \theta$ qui donne le flux au travers de la surface inclinée. En remarquant que θ est aussi l'angle entre les vecteurs \vec{E} et \vec{S} , il est possible de donner un expression plus condensée en définissant le vecteur surface \vec{S} tel que sur les figures 1.10.b) (vecteur perpendiculaire à la surface et de norme égale à l'aire de la surface). Le flux du champ électrique au travers de la surface inclinée est alors donné par le produit scalaire

$$\phi = \vec{E} \cdot \vec{S}$$

Si le champ est non-uniforme sur la surface (cf. fig. 1.10.c), il est possible de définir un flux infinitésimal en découpant la surface S en éléments de surface $d\vec{S}$ selon : $d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{S}$. Le flux global sur la surface s'obtient par intégration.

Les différentes surfaces infinitésimales usuelles (plan, cylindre, sphères) sont décrites en annexe XXX.

▲ Définition :

Pour une surface quelconque, le flux est l'intégrale du flux élémentaire sur l'ensemble de la surface :

$$\phi = \iint_S \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}$$

Par la suite, nous verrons qu'il faut surtout retenir que le flux est nul si le champ est parallèle à la surface et vaut $\phi = E \times S$ où S est la surface traversée si \vec{E} est perpendiculaire à la surface et de norme constante sur celle-ci.

b) Cas d'une charge ponctuelle

On veut déterminer le flux du champ électrique au travers d'une sphère de rayon r . On considère le champ électrique créé par une charge ponctuelle q placée en O . On a vu que le champ à la distance r de q est donné par

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

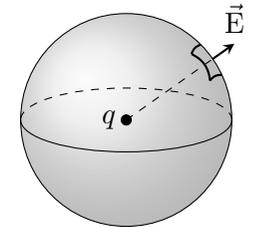
Ce champ est donc radial. Il est donc orthogonal à la sphère en tout point de celle-ci. De plus, son amplitude est la même en tout point de la sphère. On en déduit que le flux prend la forme

$$\phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r) \times S_{\text{sphère}} = E(r) \times 4\pi r^2$$

En remplaçant l'expression du champ électrique, il vient :

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \times 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Nous montrons ainsi que le flux à travers une sphère contenant une charge est indépendant du rayon de la sphère. On peut s'en convaincre en observant les lignes de champs (voir la figure 1.9). Le nombre de ligne de champ traversant une sphère ne dépend pas de la taille de la sphère.



c) **Énoncé du théorème de Gauss**

Le champ électrique est linéaire, le champ généré par plusieurs distributions de charges est la somme des champs générés par chaque distribution de charges. Il est possible de généraliser le flux à travers une sphère contenant des charges à toute distribution.

Propriété :

Le flux du champ électrique au travers d'une surface **fermée** quelconque vaut

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

où Q est la quantité de charge contenue dans cette surface et la surface est orientée vers l'extérieur.

Ce théorème permet de calculer facilement le champ électrique créé par des distributions de charges dans quelques cas simples. Bien sûr, le calcul sera facilité en choisissant une surface fermée adaptée à la symétrie du problème.

2 - Propriétés du champ électrique

a) **Principe de Curie**

Le champ électrique est un champ dit vectoriel, c'est à dire qu'à chaque point M de l'espace de coordonnées (x,y,z), on lui attribue 3 composantes (E_x,E_y,E_z) par exemple en coordonnées cartésiennes. Chacune de ces composantes dépend de la position du point M, il s'agit donc de fonctions à 3 variables. Le champ électrique s'écrit donc a priori :

$$\vec{E}(M) = \begin{pmatrix} E_x(x,y,z) \\ E_y(x,y,z) \\ E_z(x,y,z) \end{pmatrix}$$

Devant la complexité d'écrire d'un tel champ, le calcul du flux de champ électrique peut vite s'avérer complexe. Pour des systèmes présentant de nombreuses symétries, il est fort heureusement possible de simplifier grandement

son expression à l'aide de l'analyse des symétries et invariance de la distribution de charge.

Propriété :

Le principe de symétrie de Pierre Curie affirme que « Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits. »

Ainsi si la distribution de charge est invariante par rotation ou translation, le champ électrique crée par cette distribution doit également est invariante par rotation ou translation. Il en va de même pour la symétrie, un plan de symétrie des charges est également un plan de symétrie du champ électrique.

b) **Propriétés de symétrie**

Considérons une distribution de charges présentant un plan Π de symétrie. D'après le principe de Curie, si ce plan Π est un plan de symétrie de la distribution de charge, alors le champ $\vec{E}(M')$ en M' symétrique de M'' est le symétrique du champ électrique $\vec{E}(M'')$ en M'' (cf. fig. 1.11).

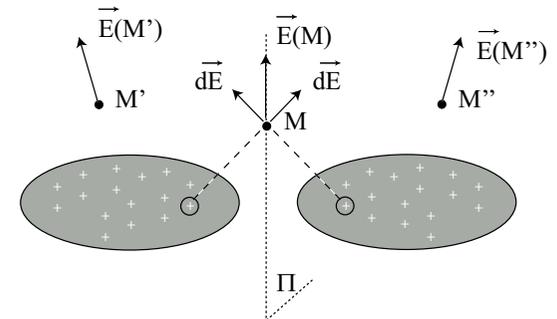


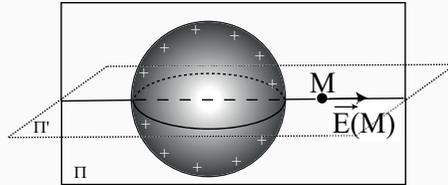
FIGURE 1.11 – Propriétés de symétrie du champ électrique pour une distribution de charge présentant un plan de symétrie.

Pour un point M du plan Π, les contributions des charges sont regroupées par paires et conduisent à un champ dans le plan de symétrie.

Propriété :

- Si le plan Π est un plan de symétrie de la distribution de charge, alors le champ électrique \vec{E} est dans ce plan

- Deux plans de symétrie différents (Π et Π') passant par un même point M permettent de déterminer l'orientation de $\vec{E}(M)$. Le champ est selon l'intersection de ces deux plans. \checkmark


Exemple 5

Dans une boule plasma, objet déco des années 80, la sphère centrale possède un grand nombre de charges. Grâce à un champ supérieur au champ disruptif du gaz piégé dans la sphère extérieure, les éclairs suivent principalement des droites de la sphère intérieure à celle extérieure. En admettant que les éclairs sont orientés selon le champ électrique, par un choix judicieux du système de coordonnées, justifier que celui-ci est radial



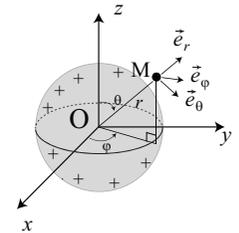
Pour s'entraîner : exercice

Utilisons les coordonnées sphériques, pour un dispositif central sphérique, tous les plans contenant O et M , donc le vecteur \vec{e}_r sont des plans de symétrie de la distribution de charge. On en déduit que le champ électrique est porté par ce vecteur : $\vec{E}(M) = E(M) \vec{e}_r$.

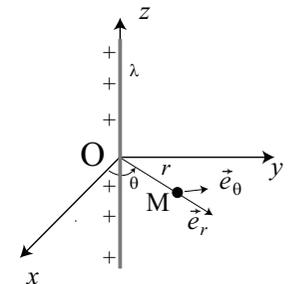
c) Propriété d'invariance
Propriété :

D'après le principe de Curie, si la distribution de charge responsable du champ électrique est invariante par rotation ou translation selon une coordonnée, alors le champ \vec{E} l'est aussi et ne dépend pas de cette coordonnée.

En géométrie cylindrique ou sphérique, si une distribution de charges ne dépend pas d'une coordonnée polaire (θ ou ϕ) alors elle est invariante par rotation selon cette coordonnée. Dans l'exemple ci-contre, une sphère uniformément chargée en volume est décrite par une distribution de charge ne dépendant ni de θ ni de ϕ . On en déduit que la norme du champ électrique créée par cette distribution ne dépendra pas de ces variables.



Lorsque la distribution de charge peut être considérée comme infinie selon une direction, par exemple lorsqu'une de ces dimensions est largement supérieure à la distance d'observation, alors la distribution de charge est invariante par translation selon la coordonnée d'espace correspondante. Le champ électrique ne dépendra pas de cette coordonnée. Dans l'exemple ci-contre, un fil infini selon l'axe Oz , uniformément chargé, présente une distribution de charge invariante par translation selon l'axe Oz . Le champ électrique créé par cette distribution ne dépendra pas de la variable z .


3 - Applications du théorème de Gauss
a) Méthodologie

Le théorème de Gauss permet d'exprimer le champ électrique généré par des systèmes chargés comportant de nombreuses symétries. Pour obtenir le champ électrique en un point M quelconque de l'espace, il faut procéder par étape :

- Choisir un repère (sphérique, cartésien ou cylindrique) adapté à la distri-

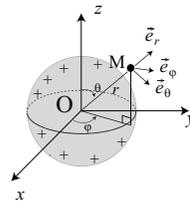
bution de charge.

- Définir la forme générale du champ :
 - de quelle coordonnée dépend-il (cf. propriété d'invariance) ?
 - quelle est son orientation (direction et sens, cf propriété de symétrie) ?
- Choisir une surface de Gauss constituée d'une surface fermée, passant par M, sur laquelle le calcul du flux est simple, où le vecteur surface $d\vec{S}$ est perpendiculaire ou parallèle au champ électrique.
- Calculer le flux au travers de la surface de Gauss.
- Appliquer le théorème de Gauss pour relier le flux à la charge contenue dans la sphère.

b) Sphère uniformément chargée

Exemple 6

Le modèle de Thomson de l'atome d'hydrogène modélise un proton par une boule de rayon R uniformément chargée. On note ρ la densité volumique de charge supposée uniforme. L'électron se déplace alors dans cette « gelée » positive.



- 1 - Déterminer l'orientation du champ $\vec{E}(M)$ en un point M quelconque de l'espace.
- 2 - Déterminer les variables dont dépend $|\vec{E}(M)|$.
- 3 - Déterminer l'expression du champ $\vec{E}(r)$ pour $r < R$ et $r > R$.
- 4 - Lorsque l'électron se déplace à l'intérieur de la boule chargée, justifier la dénomination d'électron « élastiquement lié ».

Pour s'entraîner : exercices ??

- 1 - Tout plan contenant O est plan de symétrie de la distribution de charge. En particulier les plans $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\phi)$ sont des plans de symétrie de la distribution de charge. Le champ électrique appartient à l'intersection de ces plans. On en déduit que le champ s'écrit sous la forme $\vec{E}(M) = E_r(r, \theta, \phi) \vec{e}_r$.
- 2 - Dans la base sphérique, la densité de charge est invariante par rotation autour du centre O. On en déduit que le champ électrique ne dépend ni de θ ni de ϕ .

$$\vec{E}(M) = E_r \vec{e}_r$$

Pour $r < R$, la charge contenue dans la surface de Gauss n'est qu'une partie de la charge totale définie par : $Q_{\text{int}} = 4\pi r^3 \rho / 3$. On obtient donc

$$4\pi r^2 E_r(r) = e \frac{r^3}{\epsilon_0 R^3} \quad \text{soit} \quad E_r(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

3 - Prenons une surface sphérique de rayon r constituant la surface de Gauss. Grâce aux symétries et invariance du champ, le flux de champ électrique s'écrit simplement :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \underbrace{d\vec{S}}_{dS \vec{e}_r} = E_r(r) \times 4\pi r^2$$

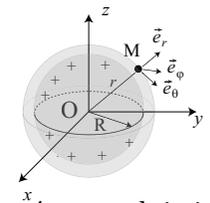
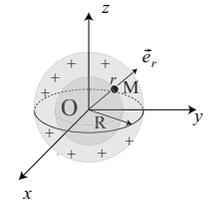
Pour $r > R$, la charge contenue dans la surface de Gauss la celle du proton. On retrouve bien le champ créé par une charge ponctuelle :

$$4\pi r^2 E_r(r) = \frac{e}{\epsilon_0} \quad \text{soit} \quad E_r(r) = E(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

4 - Pour un électron situé à l'intérieur de la sphère, la force exercée sur celui-ci est : $\vec{F} = -e \times \vec{E}(M) = -e \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r = -kr \vec{e}_r$.

Cette force est proportionnelle à la distance de l'électron au centre, tout ce passe comme ci de dernier était relié à un ressort de constante de raideur

$$k = -e \frac{\rho}{3\epsilon_0} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$



Remarque 6 :

La taille d'un atome d'hydrogène est connue mais la taille d'un proton est un problème toujours d'actualité. Deux méthodes de mesure du rayon du proton donne deux valeurs différentes : en 2010 $r_p = 00,84087 \pm 0,00039$ fm et en 2018 : $r_p = 0,87 \pm 0,01$ fm !

En 2019, une équipe de l'université de Toronto a développé un dispositif complexe permettant de mesurer avec une grande précision la fréquence d'absorption entre deux niveaux d'énergie de l'électron de l'hydrogène. L'interaction

de cette élection avec un champ électromagnétique permet de déduire la taille du noyau.

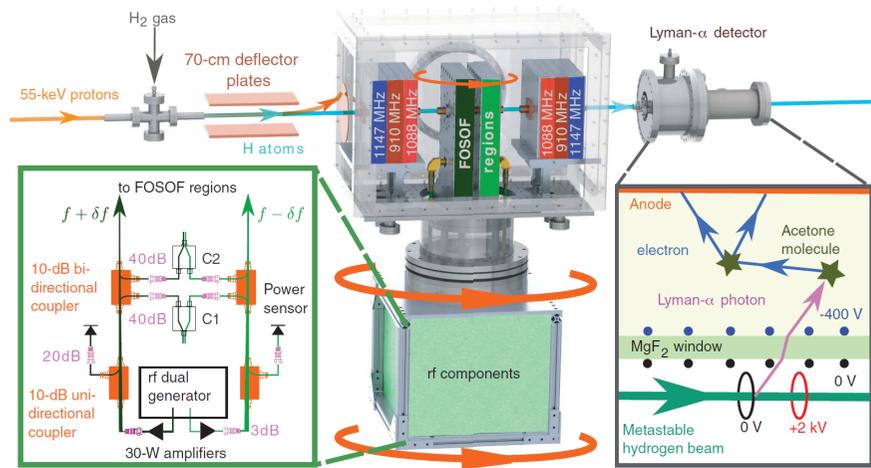


FIGURE 1.12 – Dispositif expérimental permettant la mesure du rayon du proton en utilisant la transition 2s-2p. D’après *A measurement of the atomic hydrogen Lamb shift and the proton charge radius*, Science, 2019

c) Champ créé par un fil

Exemple 7

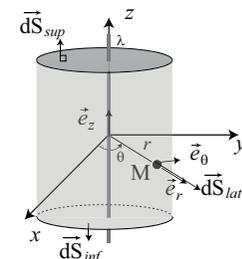
Une cheminée électrostatique permet de filtrer les particules de fumée en les plaquant contre la paroi de la cheminée grâce à l’action du champ électrique. On modélise ce dispositif par un fil chargé d’axe Oz et de hauteur h , portant une charge linéique uniforme λ , à l’intérieur d’un cylindre conducteur de rayon R telle que $R \ll h$.

- 1 - Déterminer l’orientation du champ électrique \vec{E} .
- 2 - Déterminer les invariances du champ \vec{E} .
- 3 - En déduire le champ électrique en tout point intérieur à la cheminée.

Pour s’entraîner : exercice ??

- 1 - Avec les coordonnées cylindriques (cf. fig. ci-contre), le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution de charge. Comme le fil est considéré comme infini, le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est également un plan de symétrie. Le champ $\vec{E}(\vec{M})$ étant contenu par l’intersection de ces plans, il vient : $\vec{E}(\vec{M}) = E_r(r, \theta, \phi) \vec{e}_r$.
- 2 - La distribution λ est invariante par translation selon Oz et rotation selon θ , on en conclut que $\vec{E}(\vec{M}) = E(r) \vec{e}_r$.
- 3 - Le théorème de Gauss appliqué à un cylindre de rayon r et de hauteur h s’écrit $\Phi(\vec{E}) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$. Décomposons le flux sur les surfaces supérieure, inférieure et latérale :

$$\Phi(\vec{E}) = \iint_{S_{sup}} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{sup} + \iint_{S_{inf}} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{inf} + \iint_{S_{lat}} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{lat}$$



Par orthogonalité avec les vecteurs $d\vec{S}_{sup}$, et $d\vec{S}_{inf}$, le flux est nul sur les surfaces horizontales. La norme du champ étant constante sur la surface latérale, il vient : $\Phi(\vec{E}) = 2\pi r h E(r)$. Avec l’expression de la charge intérieure $Q_{int} = \lambda h$, il vient :

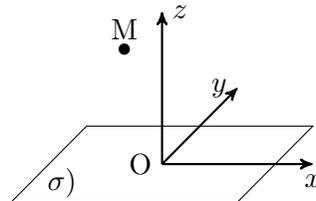
$$\vec{E}(\vec{M}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$$

d) Plan uniformément chargé

Exemple 8

On considère une plaque infiniment étendue portant une charge surfacique uniforme σ . Ce modèle est largement utilisé dès lors qu'un point d'observation est très proche d'une surface chargée.

- 1 - Déterminer l'orientation du champ électrique \vec{E} en un point M quelconque.
- 2 - Déterminer les invariances du champ \vec{E} .
- 3 - En déduire l'expression du champ électrique en un point quelconque M.



Pour s'entraîner : exercices ??, ?? et ??

- 1 - On se place dans le repère cartésien (voir schéma)². Les plans $(M, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ sont des plans de symétrie donc le champ électrique est selon \vec{e}_z :

$$\vec{E}(M) = E_z(x, y, z) \vec{e}_z$$

- 2 - La distribution de charge est invariante par translation selon x et y , elle ne dépend que de la coordonnée z donc le champ aussi : $\vec{E}(M) = E_z(z) \vec{e}_z$

- 3 - La surface chargée étant plane, on considère une surface respectant la géométrie des charges. Prenons comme surface de Gauss un parallélépipède de côté a et b arbitraires³, de hauteur $2z$ passant par M. De plus, le plan chargé étant lui même un plan de symétrie, la surface de Gauss respecte également cette symétrie. Le flux se décompose selon

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \Phi_{fond} + \Phi_{couvercle} + \Phi_{droite} + \Phi_{gauche} + \Phi_{derriere} + \Phi_{devant}$$

2. Ici, un repère cylindrique pourrait aussi convenir car la surface est infinie.
3. a et b sont des intermédiaires de calculs qui ne doivent pas apparaître dans le résultat final.

Le flux au travers chacune des faces latérales est nul car le champ électrique \vec{E} est parallèle aux faces. Le flux se simplifie sous la forme :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \Phi_{fond} + \Phi_{couvercle}$$

Comme le plan Oxy est plan de symétrie des charges donc du champ, les flux sont identiques sur la face supérieure et inférieure⁴ :

$$\Phi_{fond} = \Phi_{couvercle}$$

On en déduit que :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2\Phi_{couvercle} = 2E(z) \times ab$$

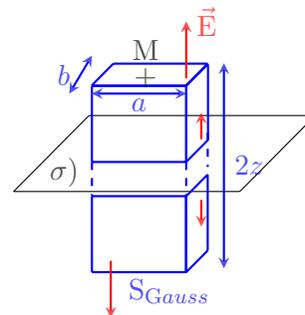
D'après le théorème de Gauss,

$$\Phi = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \text{ soit } 2E(z) \times ab = \frac{\sigma \times ab}{\epsilon_0}$$

On obtient donc $E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ pour $z > 0$. Si la norme du champ électrique est indépendante de z , son orientation en dépend. Par symétrie, on peut conclure que

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z, \text{ si } z > 0$$

$$\vec{E}(M) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z, \text{ si } z < 0$$



Remarque 7 :

Sur les panneaux solaires des robots utilisés pour aller sur Mars ou sur la Lune, le rayonnement solaire électrise les poussières qui viennent se coller sur panneaux solaires diminuant de façon importante leur efficacité. En 2014, il a fallu attendre 3 mois qu'un vent suffisant vienne décrocher les panneaux du module Opportunty. Des techniques utilisant un champ électrique sont à l'étude pour repousser ces poussières et nettoyer les panneaux sans intervention extérieure (cf. fig. 1.13).

4. Une surface de Gauss dissymétrique par rapport à Oxy ne respecterait pas la symétrie des charges et des flux différents sur le fond et le couvercle ne permettraient pas d'obtenir le champ.

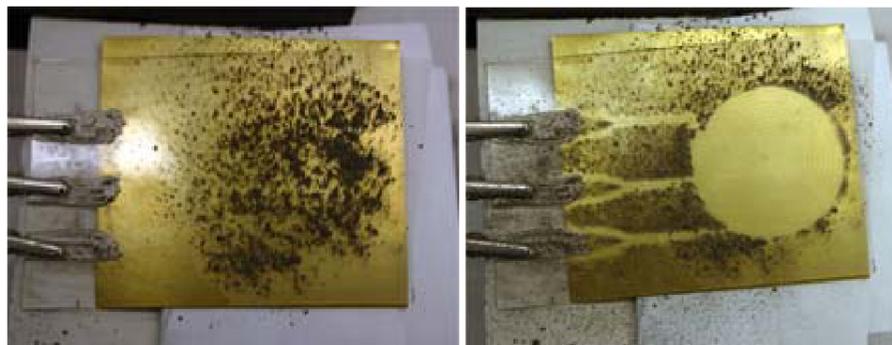


FIGURE 1.13 – Dispositif expérimental permettant le nettoyage des panneaux solaires par application d'un champ électrique. D'après *Dust Particle Removal by Electrostatic and Dielectrophoretic Forces with Applications to NASA Exploration Missions.Proc. ESA Annual Meeting on Electrostatics 2008*.

4 - Analogies avec la gravitation

La force gravitationnelle est similaire à la force électrostatique car toutes deux évoluent de la même façon ($\sim 1/r^2$) pour une charge ponctuelle ou une masse ponctuelle :

$$\vec{F}_{el} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_r \quad \text{et} \quad \vec{F}_{grav} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r$$

Si l'origine du champ électrique est la charge, la source du champ de gravitation est la masse. Il est possible de dresser un tableau de correspondance entre les différentes grandeurs (cf. tableau 1.2).

électrostatique	gravitation
$\vec{F}_{el} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$	$\vec{F}_{grav} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r$
q	m
$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	$-G$
$\vec{F}_{el} = q\vec{E}$	$\vec{F}_{grav} = m\vec{g}$

TABLE 1.2 – Grandeurs analogues électrostatique-gravitation

L'analogie formelle entre l'électrostatique et la gravitation permet d'établir un théorème de Gauss en remplaçant le champ électrique \vec{E} par le champ de gravité \vec{g} .

▲ Définition :

Le flux du champ de gravité \vec{g} à travers une surface S fermée est proportionnel à la masse contenue dans le volume délimité par cette surface. »

$$\Phi_S(\vec{g}) = \oiint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_S$$

où M_S est la masse contenue dans la surface fermée S et G la constante universelle de gravitation ($6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$).

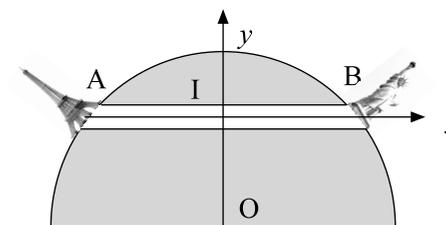
ⓘ Remarque 8 :

En théorie des champs, la particule responsable de la propagation du champ électrique est le photon. L'analogie formelle avec la gravitation pourrait permettre de définir une particule appelée « graviton », responsable du champ de gravitation. Son existence est très controversée, si cette particule apparaît en théorie des cordes, la relativité générale n' a pas besoin de le définir et le modèle standard utilise le boson de Higgs pour définir la masse.

🍃 Exemple 9

D'après CCP 04, Mines-Ponts 11, CCP 12

La terre est assimilée à une sphère homogène de centre O et de rayon R. Soit g_0 la valeur de l'accélération de la pesanteur à la surface de la terre. On ne tient pas compte de la rotation de la terre. On relie deux villes A et B par un tunnel rectiligne de longueur d et de diamètre négligeable. Un train assimilable à un point matériel M se déplace sans frottement dans le tunnel. On note



r la distance OM. Le référentiel terrestre est considéré comme galiléen, on note x l'abscisse du point M sur l'axe Ix .

1 - Déterminer $\vec{g}(r)$ l'accélération de la pesanteur au point M en fonction de g_0 , r et R . 2 - Écrire sous forme vectorielle le principe fondamental de la dynamique appliquée au point M.

3 - En déduire l'équation du mouvement du point M et déterminer le temps pour aller de A à B

Pour s'entraîner : exercices ??, ??

1 - L'accélération de la pesanteur se détermine à partir du théorème de Gauss. La distribution de masse est à symétrie sphérique donc le champ de gravitation \vec{g} est invariant par rotation selon les angles sphériques θ et ϕ et tout plan contenant le centre O est plan de symétrie de la masse volumique donc

$$\vec{g}(r) = g(r) \vec{e}_r$$

L'application du théorème de Gauss sur un surface de rayon r donne, avec M_{tot} la masse de la Terre

$$4\pi r^2 g(r) = -4\pi G M_{\text{int}} \quad \text{avec} \quad M_{\text{int}} = M_{\text{tot}} \frac{r^3}{R^3}$$

Or $g_0 = GM_{\text{tot}}/R^2$, on en déduit donc que

$$\vec{g}(r) = -g_0 \frac{r}{R} \vec{e}_r$$

2 - Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, le point M est soumis à

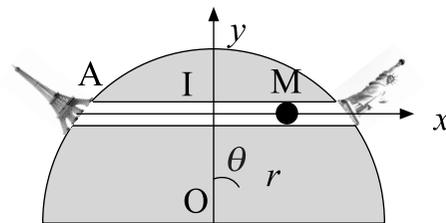
- son poids $\vec{P} = m\vec{g}(r)$;
- la réaction du tunnel $\vec{N} = N \vec{e}_y$.

Le principe fondamental de la dynamique nous permet d'écrire

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N}$$

3 - Avec $x = r \sin \theta$, la projection du principe fondamental de la dynamique suivant l'axe Ix donne

$$m\ddot{x} = -mg_0 \frac{r}{R} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_x = -mg_0 \frac{r \sin \theta}{R} = -m \frac{g_0}{R} x$$



On en déduit l'équation suivante

$$\ddot{x} + \frac{g_0}{R} x = 0$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de période

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g_0}} = 1 \text{ h}23 \text{ min}$$

On en déduit que le temps de trajet est

$$\tau = T/2 \approx 41 \text{ min}$$

Remarque 9 :

Le forage proposé est complètement irréaliste, le trou artificiel le plus profond du monde se situe dans le nord-ouest de la Russie (cf. fig. 1.14). La technologie actuelle est incapable de dépasser ses 12 km de profondeur (sur les 6400 km du rayon terrestre) ce qui correspond seulement au tiers de l'épaisseur de la croûte terrestre. La température est alors de 180°C ce qui complique le forage du fait de l'échauffement, l'acier de l'axe du forêt devient trop "mou" et ne permet plus de creuser la roche.



FIGURE 1.14 – Forage de Kola (Russie) à l'abandon de puis 2012 et trappe d'accès condamnée, image sous licence

L'essentiel

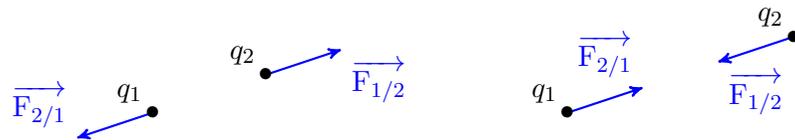
Force électrostatique (Loi de Coulomb)

La force exercée par une charge q_1 sur une charge q_2 :

$$\vec{F}_{1/2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

Forces répulsives ($q_1 q_2 > 0$). **Forces attractives** ($q_1 q_2 < 0$).

Charges de mêmes signes . Charges de signes opposés.



Champ électrostatique

• **Charge ponctuelle**

La force d'interaction électrostatique agissant sur une charge q vaut $\vec{F} = q\vec{E}(M)$. Le champ créé par une charge ponctuelle en O s'écrit

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

• **Propriétés**

Un plan de symétrie d'une distribution de charge est un plan de symétrie du circuit électrique. Si la distribution de charges est invariante par translation ou rotation, le champ \vec{E} qui en découle est également invariant et ne dépend pas de cette coordonnée.

• **Théorème de Gauss**

Le flux de champ électrique sur une surface fermée vérifie :

$$\phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

où Q est la quantité de charge contenue dans cette surface et la surface est orientée vers l'extérieur.

I. Flux du champ électrique au travers d'une surface fermée - approche qualitative

1 - Charge ponctuelle

Nous avons établi au chapitre 1 le flux du champ électrique généré d'une charge q . Le flux au travers d'une sphère est indépendant de la taille de la sphère et vaut $\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$. On a tracé sur la figure 15 les lignes de champ correspondantes. Le même nombre de lignes de champ traversent des sphères de différentes tailles mais aussi un cube ou tout autre surface fermée. Ceci permet de comprendre que le flux ne dépend pas de la taille ni de la forme de la surface. Le calcul direct du flux au travers d'un cube est compliqué car les orientations respectives du champ et des vecteurs de surfaces dépendent de la position mais il suffit de trouver une surface sur laquelle le calcul est simple.

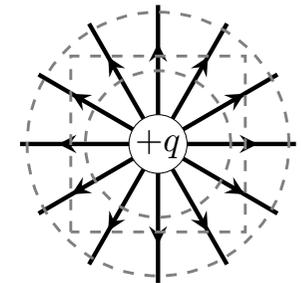


FIGURE 15

2 - Généralisation

Considérons le champ électrique créé par 2 charges de signes opposées (Fig. 16a). Le vecteur surface doit être orienté vers l'extérieur de la surface (sort du volume défini par la surface fermée). Par conséquent, le flux du champ électrique est positif si le champ sort de la surface et négatif si il entre dans la surface.

En observant les lignes de champs sur la figure, on constate que

- le flux au travers d'une surface entourant uniquement $+q$ est positif $\phi > 0$ (toutes les lignes de champs sont sortantes)
- le flux au travers d'une surface entourant uniquement $-q$ est négatif $\phi < 0$ (toutes les lignes de champs sont entrantes)
- le flux au travers de la surface (1) est nul $\phi_1 = 0$ (compter les lignes de champs entrantes et sortantes)
- le flux au travers de la surface (2) est nul $\phi_2 = 0$ (compter les lignes de champs

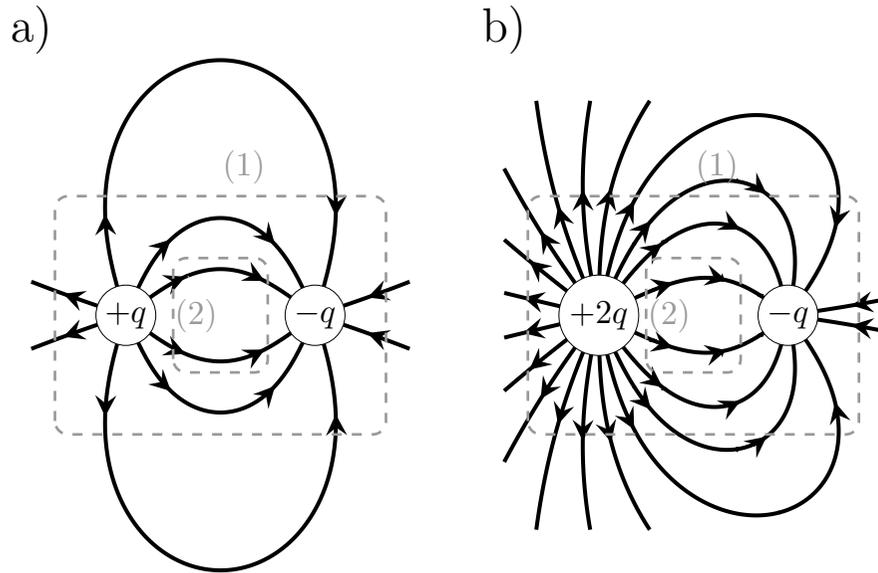


FIGURE 16 – Lignes de champs et flux au travers de différentes surfaces fermées. a) Charges opposées. b) Charges $2q$ et $-q$.

entrantes et sortantes)

De manière similaire, en observant les lignes de champs sur la figure Fig. 16b), on constate que

- le flux au travers d'une surface entourant uniquement $+2q$ est positif $\phi_{2q} > 0$ (toutes les lignes de champs sont sortantes, 20 lignes de champs)
- le flux au travers d'une surface entourant uniquement $-q$ est négatif $\phi_q < 0$ et deux fois plus faible en valeur absolue (toutes les lignes de champs sont entrantes et sont deux fois moins nombreuses)
- le flux au travers de la surface (1) est positif $\phi_1 > 0$ (20 lignes de champs sortantes et 10 entrantes) et à la même valeur absolue que $\phi_q < 0$ (un bilan de 10 lignes concernées)
- le flux au travers de la surface (2) est nul $\phi_2 = 0$ (compter les lignes de champs entrantes et sortantes)

Il apparaît finalement que le flux au travers d'une surface fermé ne dépend que de la quantité de charge contenue à l'intérieur de cette surface. Cela conduit au théorème de Gauss énoncé au chapitre 1.

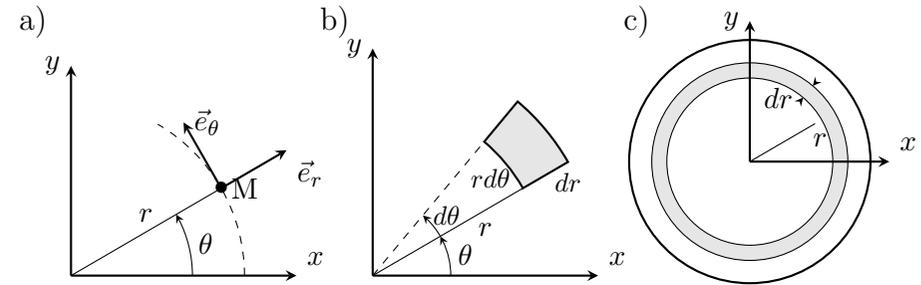


FIGURE 17 – a) Coordonnées polaires (r, θ) . b) Variations infinitésimales $(dr, d\theta)$. c) Lanière infinitésimale d'épaisseur dr .

II. Calcul d'intégrales multiples - aire d'une surface, volume d'un objet

On peut généraliser le calcul intégral aux fonctions de plusieurs variables. Cela dépasse largement le cadre de cours mais nous pouvons donner quelques exemples qui permettent de se familiariser avec cette notion.

1 - Aire d'une surface

Pour calculer l'aire d'une surface, on peut la découper en portions infinitésimales.

Disque Considérons l'aire d'un disque pour comprendre la signification concrète du calcul (Fig. 17). Il est naturel de considérer les coordonnées polaires (r, θ) . Un déplacement infinitésimal radial dr et azimutal $d\theta$ décrit un élément de surface $dS = dr \times r d\theta$ puisque l'arc de cercle porté par l'angle $d\theta$ vaut $r d\theta$. Les coordonnées vérifient $0 \leq r \leq R$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$ pour décrire le disque. Les variables r et θ sont indépendantes et on admet qu'alors l'intégrable double est simplement le produit des intégrales selon r et θ Ainsi, l'aire du disque s'obtient selon

$$\begin{aligned}
 S &= \iint_{\text{disque}} dS = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} dr \times r d\theta \\
 &= \int_{r=0}^R r dr \times \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \\
 &= \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R \times [\theta]_0^{2\pi} \\
 &= \frac{R^2}{2} 2\pi = \pi R^2
 \end{aligned}$$

5

Sphère Pour décrire une sphère, nous nous plaçons dans un repère sphérique. L'élément de surface s'exprime (voir la figure 18a)

$$dS = R d\theta \times R \sin \theta d\varphi = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

Un point de la sphère est décrit par ses coordonnées (r, θ, φ) avec ⁶ $r = \text{cte} = R$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

D'où la surface de la sphère

$$\begin{aligned}
 S &= \iint_{\text{sphère}} dS = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\
 &= R^2 \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta d\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \\
 &= R^2 [-\cos \theta]_0^{\pi} \times [\varphi]_0^{2\pi} \\
 &= R^2 \times 2 \times 2\pi = 4\pi R^2
 \end{aligned}$$

2 - Volume d'une boule

Comme exemple d'applications d'intégrale triple, on peut exprimer le volume d'une boule en procédant de manière analogue.

5. Par symétrie, on peut parfois se ramener directement à une intégrale simple. Ainsi, dans le cas du disque, on peut le découper en ruban d'épaisseur dr (Fig. 17c). Le périmètre de cette lanière vaut $2\pi r$ et donc son aire infinitésimale est $dS = 2\pi r dr$. Alors, $S = \int_{r=0}^R 2\pi r dr = \pi R^2$.

6. On a fait attention à choisir les domaines de θ et φ pour décrire toute la sphère et tels que la surface infinitésimale $dS > 0$.

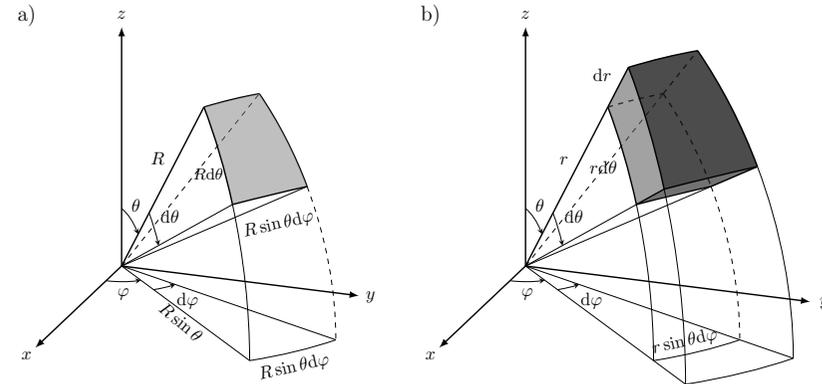


FIGURE 18 – Coordonnées sphériques - variations infinitésimales. a) Élément de surface. Le rayon $r = R$ est constant. L'élément de surface peut être assimilé à un rectangle de côtés $Rd\theta$ et $R \sin \theta d\varphi$. $Rd\theta$ correspond à la longueur de l'arc de cercle décrit par le rayon de la sphère lorsque l'angle θ varie de $d\theta$. $R \sin \theta d\varphi$ est la longueur de l'arc de cercle décrit par le segment de longueur $R \sin \theta$ (projection du rayon dans le plan (xy)) lorsque l'angle φ varie de $d\varphi$. b) Élément de volume. Le rayon varie et $dV = r d\theta \times r \sin \theta d\varphi \times dr = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$.

Un point de la boule est repéré par ses coordonnées (r, θ, φ) avec $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. L'élément de volume s'exprime (voir la figure 18b)

$$dS = dr \times r d\theta \times R \sin \theta d\varphi = r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$$

(Remarque : on vérifie que c'est bien homogène à un volume) D'où le volume de la boule

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_{\text{boule}} dV = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi \\
 &= \int_{r=0}^R r^2 dr \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta d\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \\
 &= \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R \times [-\cos \theta]_0^{\pi} \times [\varphi]_0^{2\pi} \\
 &= \frac{R^3}{3} \times 2 \times 2\pi = \frac{4}{3}\pi R^3
 \end{aligned}$$

III. Calcul du champ électrique

Le champ électrique généré en M par une charge q s'écrit

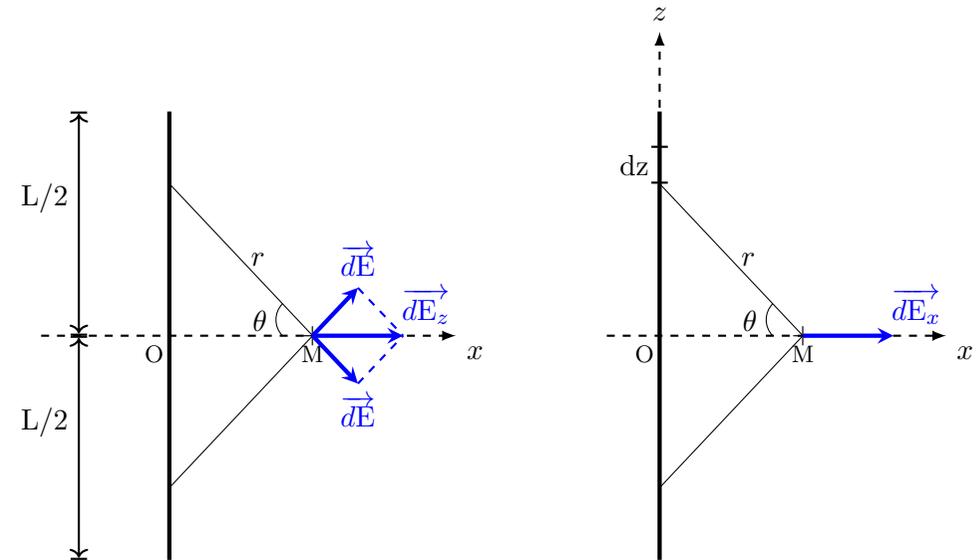
$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

où \vec{u}_r est un vecteur unitaire dirigé de la charge vers le point M. Dans le cas d'une distribution de charges, cette expression se généralise en intégrant sur la distribution de charge

$$\vec{E}(M) = \int_{distribution} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

la difficulté étant qu'il faut faire d'un vecteur qui n'est pas fixe. Nous avons utilisé le théorème de Gauss pour des distributions de charges présentant de fortes symétries. Il est aussi possible d'exprimer le champ électrostatique généré par des distributions de charges arbitraires. Nous présentons ici quelques cas où les calculs sont analytiques. Dans le cas général, seul une intégration numérique permet de déterminer le champ en tout point. Selon que la distribution de charge est linéique ($dq = \lambda dl$), surfacique ($dq = \sigma dS$) ou volumique ($dq = \rho dV$), il faudra considérer une intégrale simple, double ou triple.

IV. Champ généré par un segment de fil



Soit un fil de longueur finie L , de distribution linéique λ . On veut déterminer le champ généré par cette distribution de charges en un point M situé sur l'axe de symétrie (Ox). Par symétrie, le champ électrique est dirigé selon l'axe (Ox). Seule la composante selon (Ox) contribue au champ total. Cela conduit à

$$E_x = \int_{fil} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta$$

On intègre sur un intervalle infinitésimal du segment dz donc $dq = \lambda dz$ et

$$E_x = \int_{fil} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta dz$$

L'intégrand parcourt le fil lorsque z varie de $-L/2$ à $+L/2$ ou de manière équivalente, lorsque θ varie des deux extrémités du fil $-\theta_{max} \leq \theta \leq \theta_{max}$ avec $\tan \theta_{max} = \frac{L}{2x}$. z et θ sont interdépendants. Il faut donc écrire l'intégrale en fonction d'un seul paramètre. On écrit⁷

7. Paramétrer le problème avec la variable z peut sembler plus direct mais conduit à une

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{x}{r} ; \text{ donc } r = \frac{x}{\cos \theta} \\ \tan \theta &= \frac{z}{x} ; \text{ donc } \frac{dz}{x} = d \tan \theta = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \\ E_x &= \int_{fil} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos^2 \theta}{x^2} \frac{x \cos \theta}{\cos^2 \theta} d\theta = \int_{z=-L/2}^{L/2} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x} \cos \theta d\theta \\ &= 2 \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x} \sin \theta_{max} ; , \text{ avec } \sin \theta_{max} = \frac{L/2}{r} = \frac{L/2}{\sqrt{x^2 + L^2/4}} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x} \frac{L}{\sqrt{x^2 + L^2/4}} \end{aligned}$$

Finalement,

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x} \frac{L}{\sqrt{x^2 + L^2/4}} \vec{u}_x$$

On retrouve le résultat obtenu via le théorème de Gauss pour un fil infini en prenant la limite

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x} \vec{u}_x$$

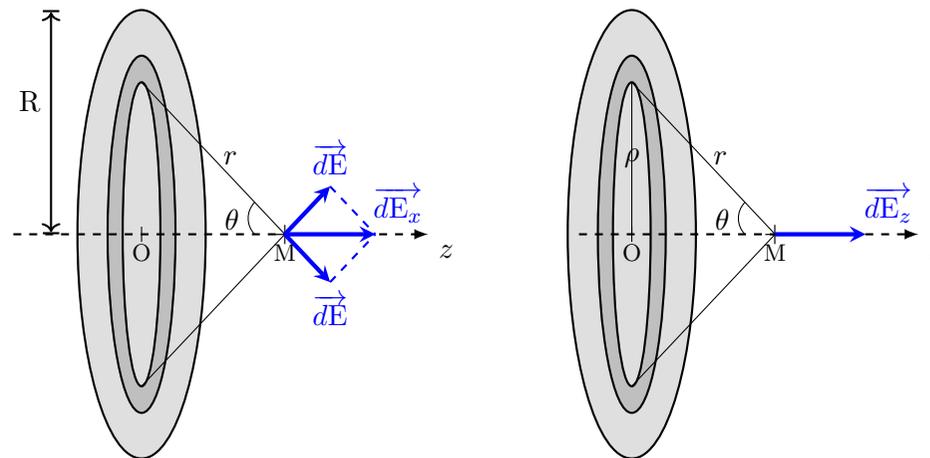
V. Champ généré à proximité de l'axe d'un disque chargé

1 - Champ généré par un disque sur son axe

On considère un disque de rayon R , chargé en surface, de distribution surfacique σ . On veut déterminer le champ généré par cette distribution de charges en un point M situé sur l'axe (Oz) .

forme intégrale plus difficile à résoudre :

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + z^2 ; \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{(x^2 + z^2)^{1/2}} \\ E_x &= \int_{fil} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta dz = \int_{z=-L/2}^{L/2} \frac{\lambda x}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + z^2)^{3/2}} dz = \frac{\lambda x}{4\pi\epsilon_0} \int_{z=-L/2}^{L/2} \frac{dz}{(x^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned}$$



Par symétrie, le champ électrique est dirigé selon l'axe (Oz) . Seule la composante selon (Oz) contribue au champ total. Cela conduit à

$$E_z = \int_{disque} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta$$

L'invariance par rotation autour de l'axe (Oz) permet d'intégrer sur une bande infinitésimale du disque $dS = 2\pi\rho d\rho$ donc $dq = \sigma 2\pi\rho d\rho$ et

$$E_z = \int_{disque} \frac{\sigma}{2\epsilon_0 r^2} \cos \theta \rho d\rho$$

L'intégrand parcourt le disque lorsque ρ varie de 0 à R ou de manière équivalente, lorsque θ varie entre 0 et le sommet du disque, tel que $\sin \theta_{max} = \frac{R}{z}$. ρ et θ sont interdépendants. Il faut donc écrire l'intégrale en fonction d'un seul paramètre. On écrit

$$\begin{aligned}
 r^2 &= z^2 + \rho^2 \\
 \cos \theta &= \frac{z}{r} = \frac{z}{(z^2 + \rho^2)^{1/2}} \\
 E_z &= \int_{\text{disque}} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 r^2} \cos \theta \rho d\rho = \int_{\rho=0}^R \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0 (z^2 + \rho^2)^{3/2}} \rho d\rho \\
 &= \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} \int_{\rho=0}^R \frac{\rho}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} d\rho \\
 &= \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{(z^2 + \rho^2)^{1/2}} \right]_{\rho=0}^R = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \\
 &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \\
 \vec{E} &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \vec{u}_z
 \end{aligned}$$

On retrouve le cas d'un plan infini pour $R \rightarrow \infty$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z$$

a) Champ à proximité de l'axe

On peut établir une expression approchée du champ à proximité de l'axe à partir de l'équation de Maxwell-Gauss en l'absence de charge à l'extérieur du disque $\text{div} \vec{E} = 0$.

Pour un point à proximité de l'axe, les propriétés de symétrie (plan de symétrie $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$) donc $\vec{E} = E_r \vec{e}_r + E_z \vec{e}_z$ et d'invariance ($\vec{E}(M) = \vec{E}(r, z)$) imposent $\vec{E} = E_r(r, z) \vec{e}_r + E_z(r, z) \vec{e}_z$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
 \text{div} \vec{E} &= 0 \\
 \frac{\partial E_r(r, z)}{\partial r} + \frac{\partial E_z(r, z)}{\partial z} &= 0 \\
 \frac{\partial E_r(r, z)}{\partial r} &= -\frac{\partial E_z(r, z)}{\partial z}
 \end{aligned}$$

On fait l'approximation

$$E_z(r, z) \approx E_z(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right)$$

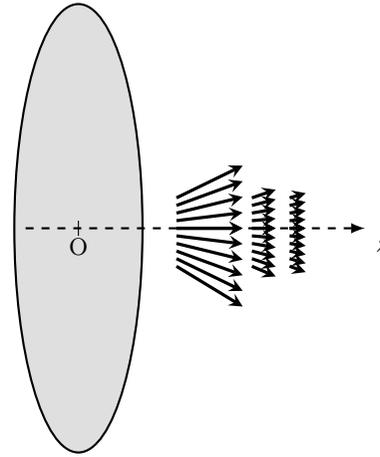


FIGURE 19 – Approximation du champ à proximité de l'axe du disque.

à proximité de l'axe ($r \ll z$).

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E_r(r, z)}{\partial r} &\approx -\frac{\partial E_z(0, z)}{\partial z} \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(\frac{\sqrt{z^2 + R^2} - z / \sqrt{z^2 + R^2}}{z^2 + R^2} \right) \\
 &\approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} - \frac{z^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \right)
 \end{aligned}$$

qui s'intègre selon

$$E_r(r, z) \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(\frac{r}{\sqrt{z^2 + R^2}} - \frac{z^2 r}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \right)$$

avec la condition $E_r(r = 0, z) = 0$ imposée par la forme du champ sur l'axe. Le champ $\vec{E} = (E_z, E_r)$ est représenté sur la figure 19. Les lignes de champs s'écartent de l'axe. Un calcul complet est indispensable pour le tracer plus loin de l'axe.