

Bases d'optique géométrique

I. Modèle de l'optique géométrique

1 - Milieu optique

Lorsque la lumière se propage dans un milieu (air, eau, verre...), elle interagit avec celui-ci. Ce dernier modifie les propriétés de la lumière. Il peut changer sa vitesse, lui prendre de l'énergie (plus rare, lui en donner).

Dans la suite, ce cours se limitera à l'étude des milieux homogènes transparents et isotropes.



Propriété :

Dans un milieu homogène, en l'absence d'obstacle, les rayons lumineux sont représentés par des droites rectilignes.

La plupart des « expériences » d'optique que l'on peut rencontrer dans la vie courante, peuvent s'expliquer en utilisant la notion de **rayons lumineux**.

On peut imaginer ces derniers comment étant la « trajectoire » des photons évoluant de manière rectiligne depuis la source dans un milieu homogène.



FIGURE 1.1 – Pointeur laser

On représente simplement ces rayons lumineux à l'aide d'un crayon et d'une règle car dans un milieu homogène, les rayons lumineux se propagent en ligne droite.

Dans les milieux non homogènes, l'indice peut varier d'un point à un autre. Le trajet de la lumière n'est alors pas en ligne droite. Dans la figure 1.2, une solution non mélangée présentant une concentration en sel plus élevée dans le fond du récipient permet de dévier les rayons lumineux vers le bas.



Définition :

Un milieu est **transparent** lorsque l'amplitude de la lumière n'est pas atténuée. Il est dit **homogène** lorsque ses propriétés sont les mêmes en tout point de l'espace. Il est dit **isotrope** lors que ses propriétés sont les mêmes dans toutes les directions.

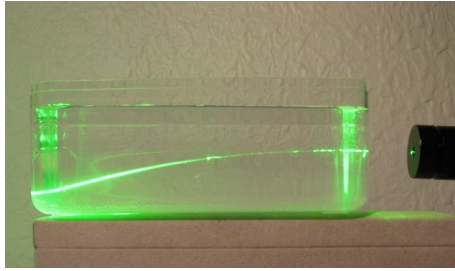


FIGURE 1.2 – Déviation d'un faisceau laser , d'après <https://fr.science-questions.org>

Milieu	indice
vide	1
air	1,000 3
eau	1,33
Plexiglas	1,49

TABLE 1.1 – Indices de matériaux usuels pour $\lambda = 589 \text{ nm}$

2 - Les dioptres

Remarque 1 :

En réalité, la lumière possède également une nature ondulatoire dont les effets, comme la diffraction, sont négligés dans ce chapitre. On suppose que la taille des objets rencontrés par un pinceau lumineux est très supérieure à la longueur d'onde.



Définition :

Un **dioptre** est la frontière entre deux milieux d'indice différent. Un rayon frappant un dioptre peut être réfracté (transmis dans le milieu suivant) ou réfléchi.

Propriété :

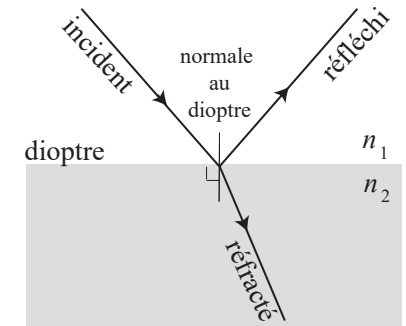
Un milieu optique homogène est principalement défini par son **indice optique** noté n . L'indice du milieu est le rapport de la vitesse de la lumière dans le vide sur sa vitesse v dans le milieu.

$$n = \frac{c}{v}$$

La vitesse dans un milieu étant toujours inférieure à celle dans le vide, n est toujours supérieur à 1 (cf. table 1.1).

L'amplitude lumineuse de chacun des rayons dépend de la longueur d'onde, de l'indice, de l'angle... Sa détermination nécessitant l'utilisation des équations de Maxwell sort du cadre de première année.

Par convention, les angles utilisés en présence d'un dioptre sont mesurés par rapport à la normale au dioptre. Le rayon incident et cette normale définissent alors le **plan d'incidence**, c'est-à-dire le plan de la feuille que vous utilisez.



Remarque 2 :

Les indices optiques dépendent de la longueur d'onde et peuvent également dépendre de la pression et de la température pour les fluides.



Définition :

Le **plan d'incidence** est le plan défini par la normale au dioptre et le rayon incident.

II. Les lois de Descartes

1 - Loi de la réflexion

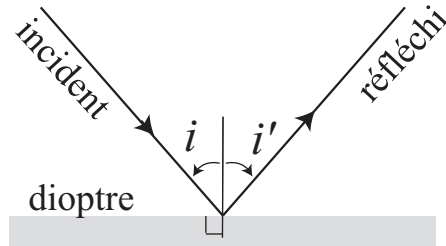


FIGURE 1.3 – Loi de la réflexion

Un rayon est réfléchi partiellement s'il rencontre un milieu d'indice différent ou (quasi-)totalement pour une surface métallique polie.

d'un miroir plan de hauteur H . Déterminer la taille minimale d'un miroir pour qu'il puisse se voir en entier ? Le résultat dépend-il de la distance d'observation D ?

Pour s'observer dans un miroir, il faut que l'observateur puisse voir ses pieds et sa tête. En prenant des points issus des extrémités, on obtient donc le tracé des rayons suivants :

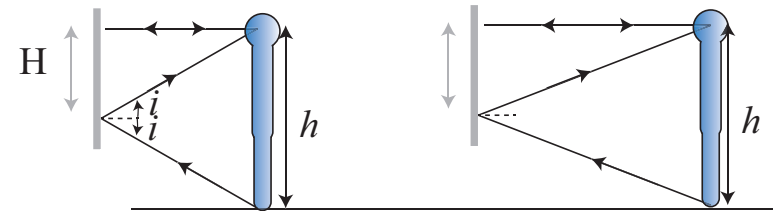


FIGURE 1.4 – REVOIR FIGURE

Les rayons partant du pied forment un triangle isocèle, on en déduit que

$$H = h/2$$

Cette relation est indépendante de la distance D entre l'observateur et le miroir.

2 - Loi de la réfraction

Lorsqu'un rayon lumineux frappe un dioptré, il ne continue pas dans la même ligne droite mais il est dévié. Cette déviation dépend de l'écart d'indice entre les deux milieux. Le rayon réfracté se rapproche de la normale au dioptré lorsqu'il arrive dans un milieu d'indice plus élevé (on parle alors de milieu plus réfringent). Il s'éloigne de la normale au dioptré si le milieu est moins réfringent. Dans l'exemple ci-dessous (cf.fig. 1.5), lorsque le milieu (2) est plus réfringent que le milieu (1) soit $n_2 > n_1$, le rayon se rapproche de la normale au dioptré, il s'en éloigne si $n_2 < n_1$. Dans ce dernier cas, le rayon n'est pas toujours réfracté (cf. section 3 -).

Définition :

Lorsqu'un rayon lumineux rencontre une surface réfléchissante, le rayon réfléchi, le rayon incident et la normale (au dioptré) sont contenus dans le plan d'incidence ; les angles incidents i et réfléchis i' définis positivement sont égaux.

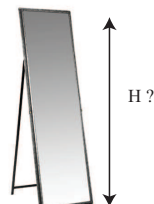
Remarque 3 :

Les conventions d'orientation (trigonométrique ou non) peuvent changer l'expression des angles définis ici de façon positifs. S'ils sont orientés positifs dans le sens trigonométrique, on écrit alors : $i = -i'$.



Exemple

Un observateur de taille h se place à une distance D



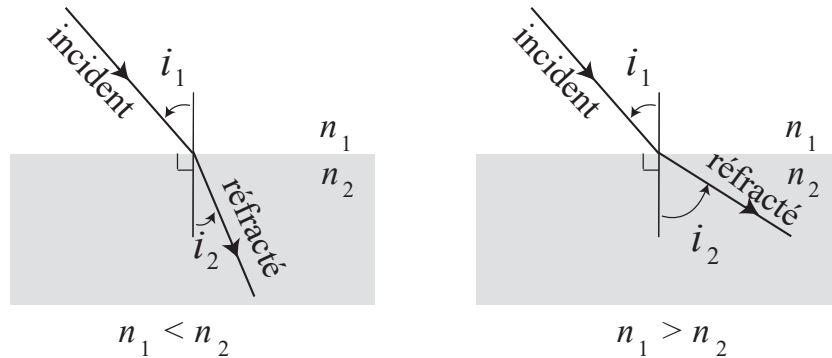


FIGURE 1.5 – Loi de la réfraction

rayon lumineux rasant se réfractant en I.

2 - On est capable de mesurer l'angle θ du rayon émergent correspondant au rayon d'incidence rasante (voir figure).

Montrer que l'angle θ satisfait la relation :

$$\sin \theta = \sqrt{N^2 - n^2}$$

Calculer numériquement θ .

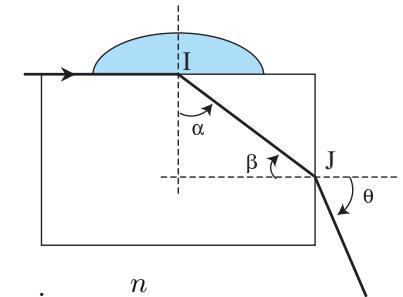
3 - Quelle est la valeur minimale de l'indice de réfraction d'un liquide qu'on peut mesurer avec ce réfractomètre ?

1 - La configuration étudiée exige que l'eau soit un milieu moins réfringent que le verre soit $n < N$.

Dans ce cas, on obtient la marche suivante :

En J, il y a passage d'un milieu plus réfringent à un milieu moins réfringent. Ainsi, le rayon réfracté, s'il existe, s'écarte de la normale au dioptre.

2 - La loi de Descartes pour la réfraction appliquée en I conduit à :



$$N \cdot \sin \alpha = n \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \quad \text{soit} \quad \sin \alpha = \frac{n}{N}$$

et

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

donc

$$\sin \beta = \cos \alpha$$

En appliquant la loi de Descartes pour la réfraction en J, on en déduit :

$$\sin \theta = N \cdot \sin \beta$$

Et comme les angles ont leurs valeurs comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$

alors

$$\sin \theta = N \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = N \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{n}{N} \right)^2}$$

$$\sin \theta = \sqrt{N^2 - n^2}$$

A.N. :

$$\sin \theta = 0,934$$

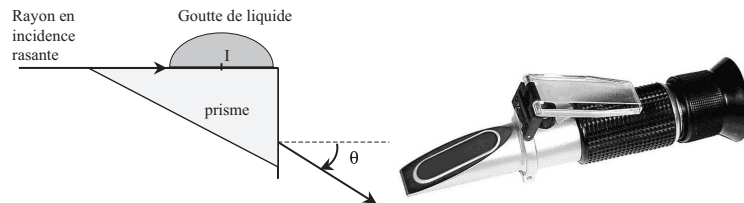
Définition :

Lorsqu'un rayon est réfracté, le rayon incident et la normale (au dioptre) sont contenus dans le plan d'incidence ; les angles incident i_1 et réfracté i_2 vérifient :

$$n_2 \sin i_1 = n_1 \sin i_2$$

Exemple 2

En viticulture, la quantité de sucre dans un raisin peut être déterminer en mesurant l'indice de réfraction d'un liquide par le principe du réfractomètre de Pulfrich. On dépose une goutte de ce liquide sur la face supérieure d'un prisme d'angle au sommet 90° . On éclaire cette goutte en lumière monochromatique en prenant bien soin qu'elle soit éclairée en **incidence rasante**. Grâce à un oculaire, on observe derrière l'autre face du prisme.



1 - L'indice de réfraction du verre est $N = 1,625$. Dessiner la marche du

3 - La loi de Descartes appliquée en J lors de la réfraction conduit à :

$$N \cdot \sin \beta \leq 1 \quad \text{soit} \quad 0 \leq N \cdot \cos \alpha \leq 1$$

soit $N^2 \cdot (1 - \sin^2 \alpha) \leq 1$

d'où $N^2 \leq 1 + N^2 \sin^2 \alpha$

On en déduit alors :

$$n \geq \sqrt{N^2 - 1}$$

A.N. : $n \geq 1,28$

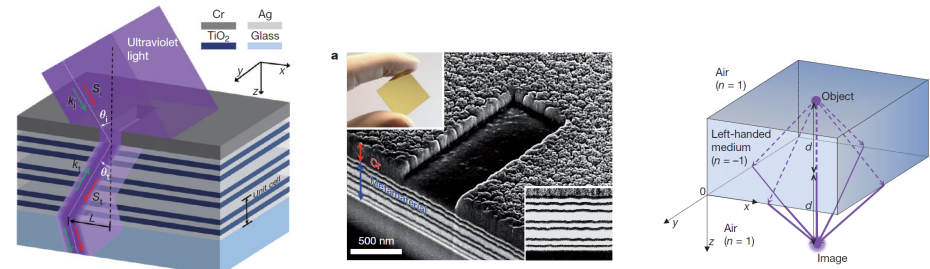


FIGURE 1.6 – Métamatériau à indice négatif. tiré de *All-angle negative refraction and active flat lensing of ultraviolet light*, Nature 2013

Remarque 4 :

En sculptant la matière à des échelles inférieures à la longueur d'onde, on obtient des métamatériaux aux propriétés intéressantes. Ainsi en 2013, une équipe de l'université du Maryland (USA) a réalisé un milieu d'indice négatif dans le domaine ultraviolet. Le matériau est constitué d'un sandwich de couches d'argent et d'oxyde de Titane dévie la lumière selon les lois de Descartes... mais avec un indice négatif (cf. fig. 1.6).

Ces matériaux pourront être utilisés pour réaliser des « capes d'invisibilité » (pour une longueur d'onde...) ou des lentilles parfaites.

3 - La réfraction limite

Lorsque l'on passe d'un milieu d'indice faible (milieu moins réfringent) à un milieu d'indice plus fort (milieu plus réfringent), la loi de Descartes indique le rayon s'éloigne de la normale. La valeur maximale de l'angle de sortie est $\pi/2$. Pour des angles incidents plus important, il n'y a plus de réfraction (la loi de réfraction n'est alors plus valide), le rayon est intégralement réfléchi.

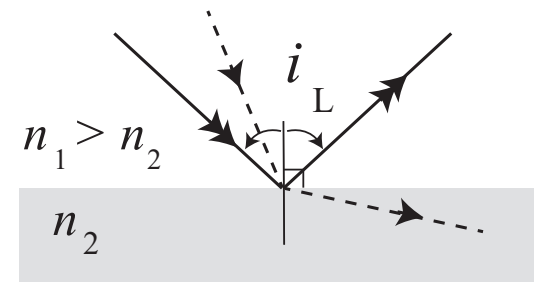


FIGURE 1.7 – Loi de la réfraction limite

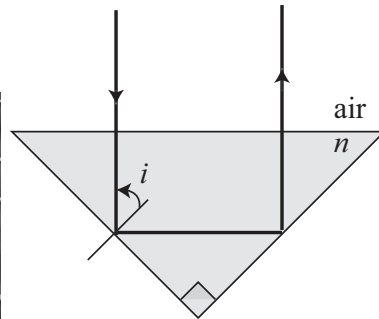
Définition :

À la traversée d'un milieu plus réfringent (n_1) vers un milieu moins réfringent ($n_2 < n_1$), l'angle de réfraction limite est donné par

$$\sin i_L = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{avec} \quad n_2 < n_1$$

pour $i > i_L$, le rayon est totalement réfléchi.

Exemple 3 Les catadioptrés sont des dispositifs de sécurité utilisés pour réfléchir la lumière dans la direction incidente. Ils sont constitués d'une succession de coins de cube en plastique.



On considère un rayon émis dans l'air (d'indice 1) arrivant en incidence normale sur un coin cubique en plastique d'indice $n = 1,5$.

- 1 - Justifier que le rayon n'est pas dévié à la traversée du dioptré air-plastique.
- 2 - On note i l'angle d'incidence pour le dioptré plastique-air. Justifier que le rayon est totalement réfléchi.

- 1 - Le rayon arrivant en incidence normale ($i = 0$), les lois de Descartes imposent que l'angle réfracté (i_r) est également nul :

$$1 \times \sin(0) = n \sin(i_r) \quad \text{soit} \quad i_r = 0$$

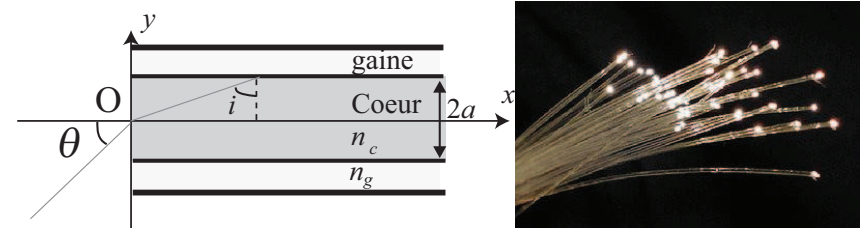
- 2 - L'angle de réfraction limite est donné par :

$$i_L = \arcsin \frac{1}{n} = 0,73 \text{ rad} = 42^\circ$$

Pour un coin de cube, le rayon arrive avec un angle $i = 45^\circ$. On en déduit que $i > i_L$, le rayon est totalement réfléchi.

Exercice 1*D'après CCP 07*

Une fibre à saut d'indice, représentée sur la figure ci-dessous, est formée d'un cœur cylindrique en verre d'axe Ox , de diamètre $2a$ et d'indice n_c , entouré d'une gaine optique d'indice n_g légèrement inférieur à n_c . Un rayon situé dans le plan Oxy entre dans la fibre au point O avec un angle d'incidence θ .



- 1 - À quelle condition sur i , angle d'incidence à l'interface cœur/gaine, le rayon reste-t-il confiné à l'intérieur du cœur ?

On note i_L l'angle d'incidence limite.

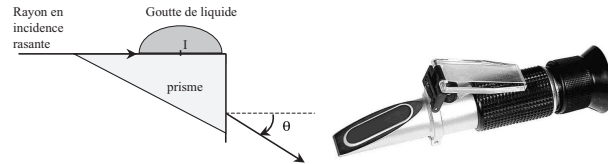
Faire un dessin du trajet ultérieur du rayon en faisant apparaître plusieurs réflexions.

- 2 - Montrer que la condition précédente est vérifiée si l'angle d'incidence θ est inférieur à un angle d'incidence θ_L tel que $\sin \theta_L = n_c \cos i_L$.
- 3 - En déduire l'expression de l'ouverture numérique O.N de la fibre définie par $\text{O.N} = \sin \theta_L$ en fonction de n_c et n_g uniquement.
- 4 - Donner la valeur numérique de O.N pour $n_c = 1,500$ et $n_g = 1,470$.

Exercice 2

En viticulture, la quantité de sucre dans un raisin peut être déterminée en mesurant l'indice de réfraction d'un liquide par le principe du réfractomètre de Pulfrich. On dépose une goutte de ce liquide sur la face

supérieure d'un prisme d'angle au sommet 90° . On éclaire cette goutte en lumière monochromatique en prenant bien soin qu'elle soit éclairée en **incidence rasante**. À l'aide d'un oculaire, on observe derrière l'autre face du prisme.



- 1 - L'indice de réfraction du verre est $N = 1,625$. Dessiner la marche du rayon lumineux rasant se réfractant en I.
- 2 - On est capable de mesurer l'angle θ du rayon émergeant correspondant au rayon d'incidence rasante (voir figure). Montrer que l'angle θ satisfait la relation :

$$\sin \theta = \sqrt{N^2 - n^2}$$

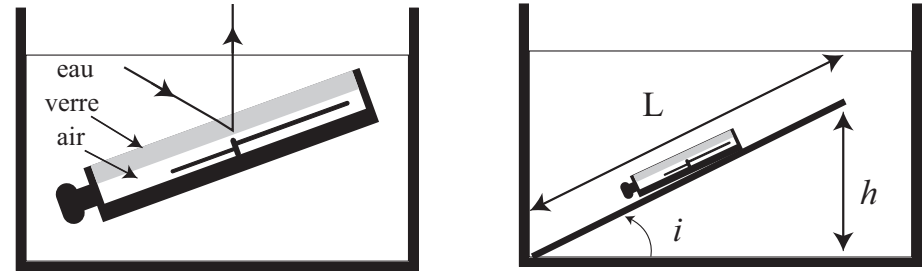
Calculer numériquement θ .

- 3 - Quelle est la valeur minimale de l'indice de réfraction d'un liquide qu'on peut mesurer avec ce réfractomètre ?

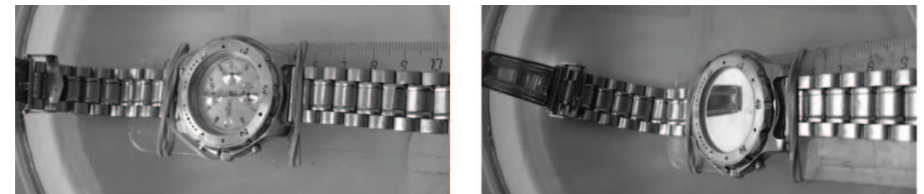
Exercice 3

La mesure d'un indice de réfraction de l'eau peut s'effectuer en plongeant une montre dans l'eau. On dispose alors de deux interfaces :

- un dioptre eau-verre au niveau du verre de montre
- puis d'un dioptre verre-air dans l'espace où se situent les aiguilles.



Considérons une montre accrochée à une règle de longueur L plongée dans une bassine remplie d'eau. Lorsqu'on incline la montre d'une hauteur h , il apparaît un angle i pour lequel la vision du cadran disparaît subitement : le dispositif est alors incliné de sorte que l'angle des rayons lumineux dans le verre par rapport à la normale au dioptre est celui de la réflexion totale.



- 1 - Justifier qu'au regard des indices, le dioptre verre-air est propice au phénomène de réflexion totale.
- 2 - Effectuer un schéma des rayons qui subissent une réflexion totale.
- 3 - En appliquant les lois de Snell-Descartes, montrer que l'angle d'inclinaison de la montre vérifiant la réflexion totale permet d'obtenir l'indice de l'eau.
- 4 - On mesure :

$$L = 21,2 \pm 0,1 \text{ cm et } h = 16,1 \pm 0,5 \text{ cm}$$

Déterminer puis calculer l'indice de l'eau.

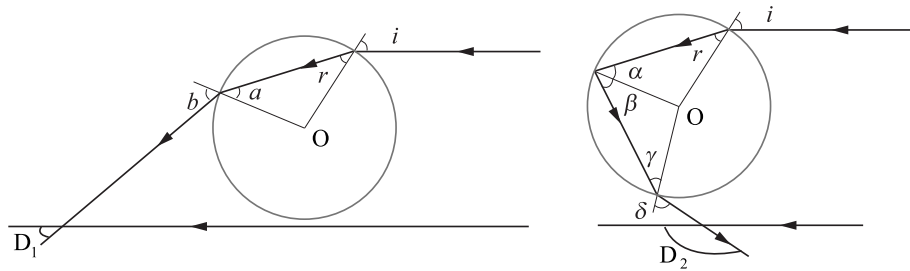
Données : $n_{\text{air}} = 1,0$, $n_{\text{verre}} = 1,5$ et $n_{\text{eau}} \approx 1,3$.

Propagation des incertitudes : pour $n = x/y$, alors

$$\frac{\Delta n}{n} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2}$$

Exercice 4*D'après CCP 05, Oral CCP17*

Une goutte d'eau, représentée par une sphère de centre O et de rayon R , est atteinte par la lumière solaire sous des incidences variables, comprises entre 0° et 90° . Son indice, pour une longueur d'onde donnée, sera noté $n = 1,33$ tandis que celui de l'air sera pris égal à l'unité. L'indice n dépendant de la longueur d'onde, les couleurs différentes sont déviées différemment. Ce phénomène de dispersion de la lumière permet d'expliquer la formation des arc-en-ciel. Un rayon lumineux frappant cette goutte peut être réfléchi à l'intérieur de celle-ci. On aboutit donc aux deux configurations suivantes.



- 1 - Déterminer les angles a et b puis l'angle de déviation D_1 , en fonction de i et r .
- 2 - Exprimer en fonction de l'angle d'incidence i ou de l'angle de réfraction r , tous les angles marqués de lettres grecques.
- 3 - En déduire l'angle de déviation D_2 , en fonction de i et de r .
- 4 - Pour quelle valeur minimale de r , les rayons sont totalement réfléchis.

Exercice 5*D'après CCP 15*

On considère un prisme d'angle au sommet $A = 60^\circ$, fabriqué dans un verre d'indice $n = 1,5$, placé dans l'air. On étudie la trajectoire d'un rayon lumineux incident appartenant à un plan principal du prisme. Les angles i, r, i', r' et D appartiennent tous à l'intervalle $[0; 90^\circ]$. Le rayon incident est constitué d'une lumière monochromatique de longueur d'onde λ .

I - Étude de la déviation de la lumière

1 - Déterminer la relation (1) qui relie i, r et n .

2 - Déterminer la relation (2) qui relie i', r' et n .

3 - Déterminer la relation (3) entre r, r' et A .

4 - En déduire la relation (4) : $D = i + i' - A$.

5 - Déterminer l'expression de $\sin i_0$ où i_0 est la valeur de i correspondant à une disparition du rayon émergent : on exprimera i_0 uniquement en fonction de n et A . Calculer i_0 .

II - Minimum de déviation

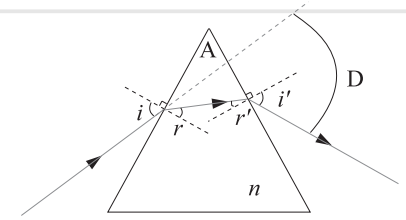
1 - À partir de (1), (2) et (3), déterminer l'expression de i' uniquement en fonction de i, n et A .

2 - Donner l'expression littérale de r_m uniquement en fonction de A . (r_m est la valeur de r obtenue lorsque la déviation D est minimale).

3 - En déduire l'expression littérale de i_m , puis celle de D_m uniquement en fonction de n et A .

4 - Déduire des questions précédentes que

$$n = \frac{\sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right)}{\sin \frac{A}{2}}$$



Les lentilles

I. Les lentilles

1 - Lentilles convergentes

a) Représentation



FIGURE 2.1 – Lentille convergente usuelle (loupe) et de travaux pratiques (sodalab)

Les lentilles convergentes sont principalement fabriquées à partir d'un verre ou d'une résine et présentent au moins une face convexe, renflée au centre

et amincie sur les bords. Les lentilles convergentes sont représentées ci-contre (cf.fig 2.2) avec leur symbole.

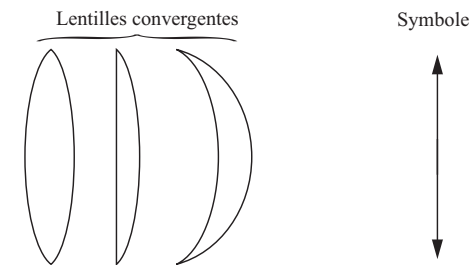


FIGURE 2.2 – Profil de lentilles convergentes et symbole

On parle de lentilles convergentes car un faisceau de lumière parallèle semble converger vers un point appelé **point focal** après traversée de la lentille (cf. fig 2.3).



Propriété :

Les lentilles sont considérées comme **minces** si leur épaisseur est négligeable devant le rayon de courbure de ces faces.

Lorsque les distances focales sont supérieures à quelques cm, l'approximation de lentille mince pourra être valide. Les lentilles minces sont représentées par

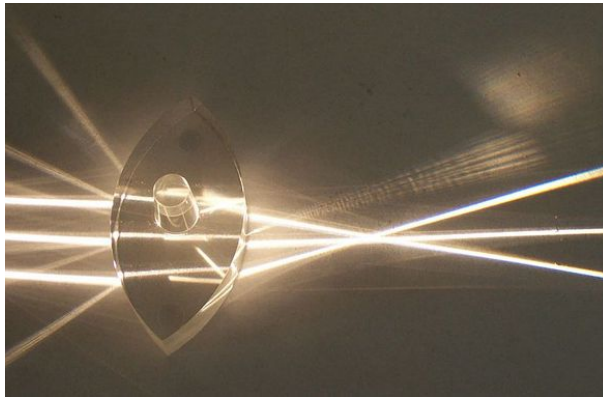


FIGURE 2.3 – Convergence d'un faisceau lumineux après une lentille convergente (source : *wikipédia*)

une double flèche, l'intersection avec l'axe optique est appelée centre optique.

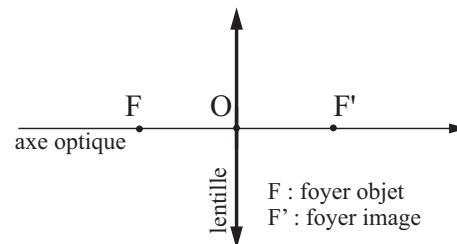
b) Tracés de rayons

En utilisant la modélisation d'une lentille mince, une lentille est caractérisée par

- son centre optique O
- son foyer image F'

La distance OF' est appelée distance focale (notée f') et est caractéristique de la lentille considérée.

On représente également le **foyer objet** noté F , symétrique de F' par rapport à O . Afin de déterminer l'image d'un objet par une lentille convergente, les rayons passant par ces points particuliers ont un comportement différent.



Propriété :

- Tout rayon parallèle à l'axe optique ressort de la lentille ou du miroir en passant par le foyer image F' ;
- Tout rayon passant par le foyer objet F , ressort de la lentille parallèlement à l'axe optique ;
- tout rayon passant par le centre de la lentille (noté O) n'est pas dévié.

Ces rayons sont à la base de tout tracé en optique géométrique avec lentille convergente (cf fig 2.4).

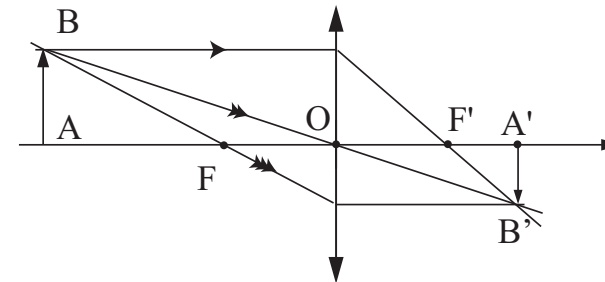
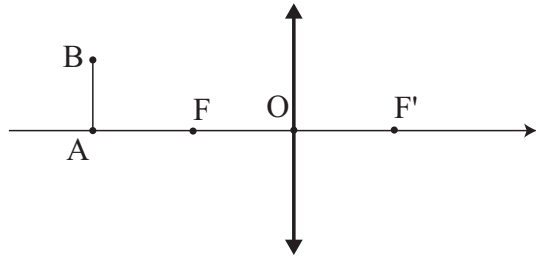


FIGURE 2.4 – Tracé des rayons remarquables pour une lentille convergente

Propriété :

- Un point B' est l'image de B par rapport à une lentille lorsque tous les rayons partant de B se croisent au point B' .

Exemple 4 On considère la configuration particulière où l'objet est situé à une distance $2f'$ du centre optique.



- 1 - Reproduire la figure et tracer les rayons lumineux issus du point B et passant par les points O, F et F'.
- 2 - En exploitant les symétries, que dire du point de convergence des rayons noté B' ? En déduire la distance AA' entre les positions sur l'axe optique de l'objet et l'image.

1 - Afin de compléter le tracé des rayons, on retient que

- le rayon passant par le centre optique n'est pas dévié ;
- le rayon parallèle à l'axe optique ressort de la lentille par F' ;
- le rayon passant par F ressort parallèle à l'axe optique.

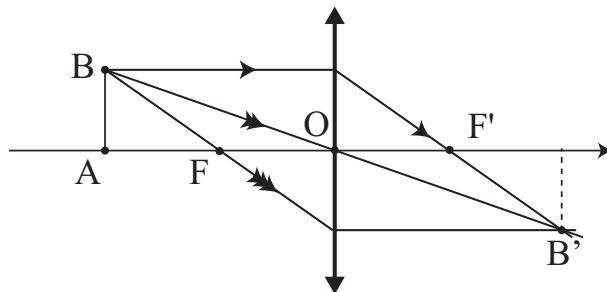


FIGURE 2.5 – Tracé des rayons dans la configuration de Silbermann

2 - On remarque que le point de convergence B' est symétrique de B par rapport à O. On en déduit que $AA' = 4f'$.

Remarque 5 :

La méthode de Silbermann est une méthode permettant de mesurer la distance focale d'une lentille en projetant un objet de sorte que son image soit de même taille et inversée. Dans ce cas, la distance entre l'image et l'objet est de $4f'$.

c) Image réelle et virtuelle

Définition :

Une image est dite **réelle** lorsqu'elle est formée après la lentille. Elle est dite **virtuelle** lorsque les rayons lumineux sortant de la lentille semblent venir d'un point situé avant la lentille.

Dans le cas où l'objet est placé avant le foyer objet (F), l'image est réelle (cf. figures précédentes). Lorsque l'objet est placé entre le foyer l'objet, l'image est virtuelle, elle est du même côté de l'objet. Le tracé des rayons s'effectue avec les mêmes rayons remarquables définis plus haut (cf. fig. 2.6).

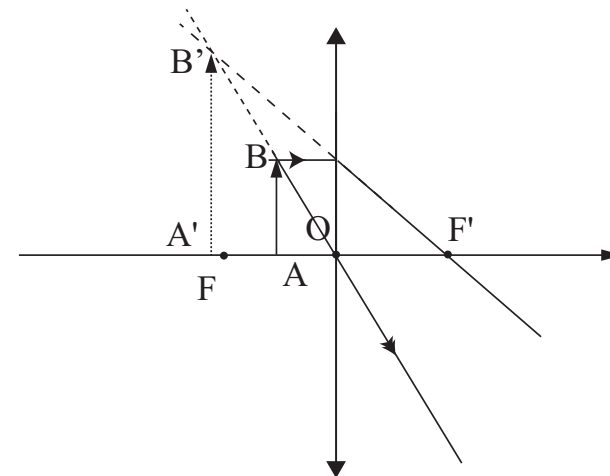


FIGURE 2.6 – Tracé des rayons avec une image virtuelle

2 - Limites de la modélisation

a) Stigmatisme



Définition :

Un système optique est dit **stigmatique** pour deux points si l'ensemble des rayons lumineux issus d'un des points et traversant le système forment d'autres rayons lumineux dont les supports passent par le second point.

Les lentilles minces modélisées précédemment sont rigoureusement stigmatiques. Malheureusement, le stigmatisme pour tout point de l'espace, dit stigmatisme rigoureux, n'est possible qu'avec le miroir plan. Des recherches avec des nanomatériaux à indice négatif permettront peut être d'obtenir des lentilles rigoureusement stigmatiques.

Les rayons parallèles à l'axe optique, venant d'un objet très éloigné, devraient tous converger au foyer image. Pour les lentilles sphériques, les rayons passant par les bords sont plus déviés que les rayons passant par le centre de la lentille et ne sont pas tous convergents au même point (cf fig. 2.7).

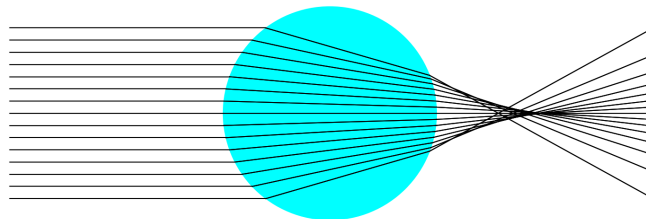


FIGURE 2.7 – Simulation de rayons pour une lentille sphérique

Certains animaux, comme le poulpe possède un cristallin sphérique dont l'indice diminue continuellement du centre sur les bords. Ainsi les rayons frappant

les bords de la lentille rencontrent un indice moins élevé et le point de convergence se rapproche des rayons frappant la partie centrale de la lentille (cf. fig.2.8). Ce dispositif optique est alors stigmatique pour une longueur d'onde. Le poulpe fait partie des espèces qui, bien que daltoniennes parviennent à distinguer les couleurs en utilisant les aberrations.

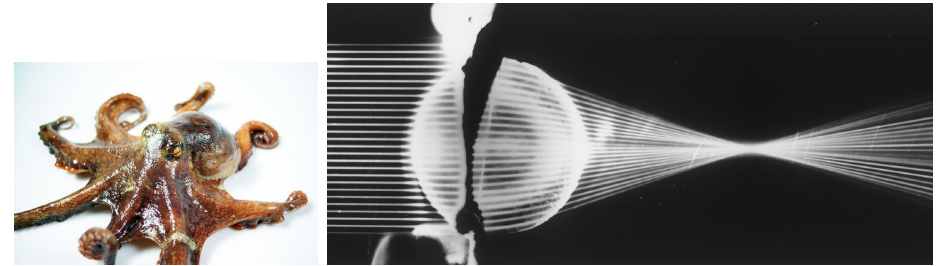


FIGURE 2.8 – Mise en évidence du stigmatisme d'un oeil de poulpe à gradient d'indice. D'après Jagger and Sands, *Vision Research* 39 (1999)

b) Conditions de Gauss

Le stigmatisme approché est obtenu en se plaçant dans les conditions de Gauss



Définition :

Les conditions dans lesquelles on peut appliquer l'approximation de Gauss sont les suivantes :

- Le système optique considéré doit être un système centré ;
- les angles d'incidence des rayons sont faibles
- le point d'incidence est proche de l'axe optique : on dit alors que l'on travaille avec des rayons paraxiaux.

Lorsque ces conditions sont respectées, on peut considérer le système optique comme approximativement stigmatique. Pour réaliser ces conditions, on peut utiliser des diaphragmes qui limitent l'étendue des faisceaux autour de l'axe optique.

La naturalistes ont recours à un système optique appelée lentille de Coddington qui permet de grossir une image avec une lentille sphérique tout en limitant les aberrations. Il s'agit d'une lentille qui a été réduite sur la partie centrale afin de ne conserver que les rayons passant au voisinage du centre optique (cf. fig 2.9). On trouve aussi des systèmes composés de plusieurs lentilles dont la coupe transversale est quasi-identique.



FIGURE 2.9 – Lentille Coddington commerciale et coupe transverse du système optique.

II. Position et taille d'une image

1 - Formules de conjugaison

Les formules de conjugaison sont les outils mathématiques indispensables pour traiter les exercices d'optique géométrique. Elles permettent de relier la position de l'objet A par rapport à l'image A' grâce aux caractéristiques de la lentille (distance focale $\overline{OF'} = f'$).

L'utilisation de valeurs algébriques (par ex. $\overline{OA}$) permet de généraliser ces formules quelque soit la position de l'objet ou de l'image par rapport au centre optique et quelque soit le type de lentille (convergente ou divergente).

FAIRE UN TOPO SUR VALEUR ALGEBRIQUES ???

FAIRE ANNEXE SUR DEMO DES RELATIONS DE CONJUGAISON

Conjugaison	
Origine au centre	$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}}$
Origine aux foyers	$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -f'^2$

TABLE 2.1 – Formules de conjugaison pour une lentille mince

Dans ces formules de conjugaison d'une lentille, on retrouve le comportement des rayons caractéristiques. Si l'on suppose l'objet à l'infini alors ($\overline{OA} \rightarrow -\infty$), la relation de conjugaison devient :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - 0 = \frac{1}{\overline{OF'}} \quad \text{soit} \quad \overline{OA'} = \overline{OF'}$$

On obtient que l'image se situe dans le plan focal image.

De même, si l'on suppose l'objet sur le plan focal objet alors ($\overline{OA} = \overline{OF} - f'$), la relation de conjugaison devient :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} + \frac{1}{f'} = \frac{1}{f'} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{\overline{OA'}} = 0$$

Le point image A' doit donc se situer à l'infini. En effet, le rayon passant par F se retrouve après la lentille, parallèle à l'axe optique.

Exemple 5 On désire former l'image réelle d'un objet réel par une lentille convergent de distance focale f' . On note p la distance lentille-objet et p' la distance lentille-image.

1 - Montrer que la relation de conjugaison s'écrit :

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$$

2 - On note D la distance entre l'objet et son image $D = p + p'$. Montrer que la distance p vérifie : $p^2 - pD + Df' = 0$

3 - En déduire que distance objet-image doit être plus grande qu'une longueur caractéristique dépendant de f' .

1 - Pour une image réelle, l'objet réel si situe derrière le foyer objet et donc avant le centre optique. On en déduit que la grandeur algébrique vérifier :

$$\overline{OA} = -p$$

La relation de conjugaison devient :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$$

2 - Faisons apparaître la distance objet-image :

$$\frac{1}{D-p} + \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$$

Ecrivons l'équation en p en multipliant cette équation par $p(D-p)f'$:

$$pf' + (D-p)f' = p(D-p)$$

On obtient alors :

$$p^2 + pD - Df' = 0$$

3 - Le discriminant de cette équation du second degré est :

$$\Delta = D^2 - 4Df' = D(D - 4f')$$

Cette équation du second degré admet deux solutions si :

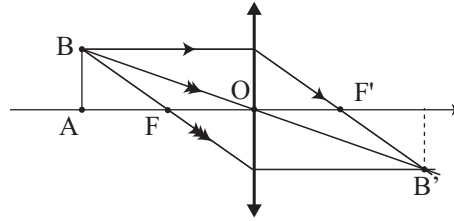
$$\Delta \geq 0 \quad \text{soit} \quad D \geq 4f'$$

Remarque 6 :

Ainsi, lors des séances de travaux pratiques, en utilisant une lentille de distance focale 20 cm, il faut au moins une distance de 80 cm entre l'objet à projeter et l'écran.

2 - Formules de grandissement

Les formules de grandissement permettent de déterminer la taille transversale de l'image ($\overline{A'B'}$) grâce la position de l'objet ($\overline{OA}$) ou de l'image ($\overline{OA'}$) ainsi que des caractéristiques de la lentille ($\overline{OF'}$).



Grandissement	$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$
Origine au centre	$\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$
Origine aux foyers	$\gamma = \frac{f'}{fA} = -\frac{F'A'}{f'}$

TABLE 2.2 – Formules de grandissement pour une lentille mince



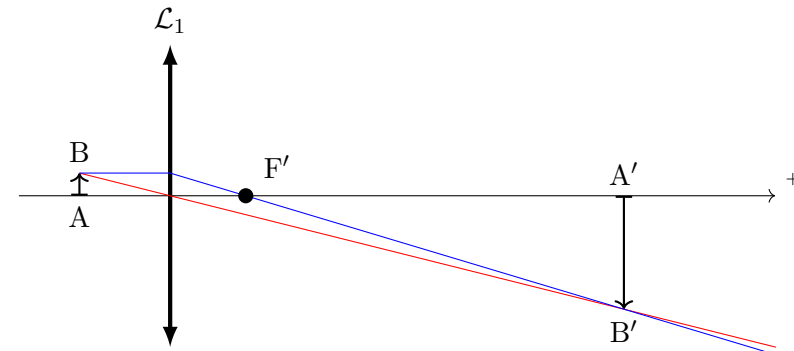
Exem

Dans une salle de cinéma de 20 m de long, une lentille mince convergente donne, d'un objet, une image réelle sur un écran agrandie 100 fois.



- 1 - Effectuer un schéma en représentant l'objet (le film à projeter), la lentille et l'écran. En déduire le signe du grandissement.
- 2 - Justifier que l'objet se situe au voisinage du plan focal objet.
- 3 - Calculer la distance focale image de la lentille pour réaliser une telle projection.

1 - L'objet est ici beaucoup plus petit que l'image. On peut effectuer le schéma suivant :



L'image est inversée par rapport à l'objet, le grandissement est négatif.

2 - La distance lentille-image (20 m) est beaucoup plus grande que la distance focale (taille de l'appareil). On en déduit que l'image peut être considérée à l'infini, soit que qu'objet est dans le plan focal objet.

3 - En utilisant la relation de grandissement avec origine que autre centre :

$$\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \approx -\frac{D}{f'}$$

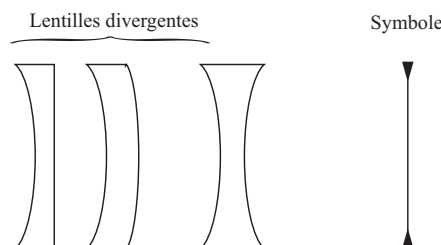
D'après la première question, l'image est inversée par rapport à l'objet. On obtient alors :

$$f' \approx \frac{D}{|\gamma|} \approx 20 \text{ cm}$$

3 - Lentille divergente

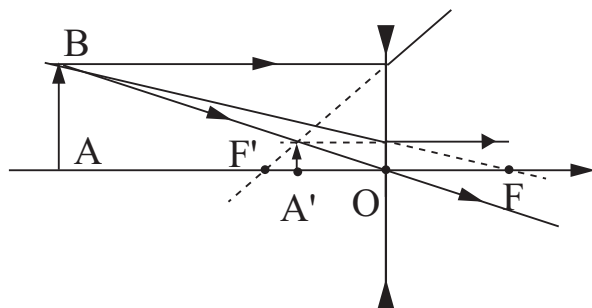
a) Représentation

Les lentilles divergentes sont représentées ci-dessous avec leur symbole.

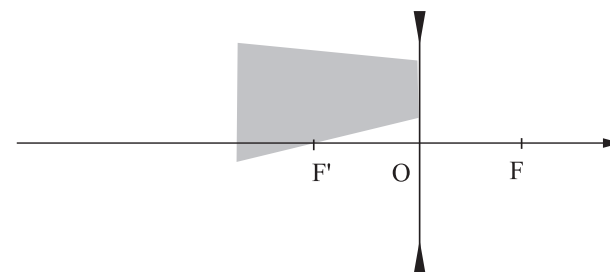


b) Tracés de rayons

Pour les lentilles divergentes, les règles de tracé sont les mêmes que pour les lentilles convergentes. Il ne faut pas oublier de continuer les rayons en pointillé à gauche de la lentille puisque l'image est souvent virtuelle (c'est-à-dire à gauche de la lentille).

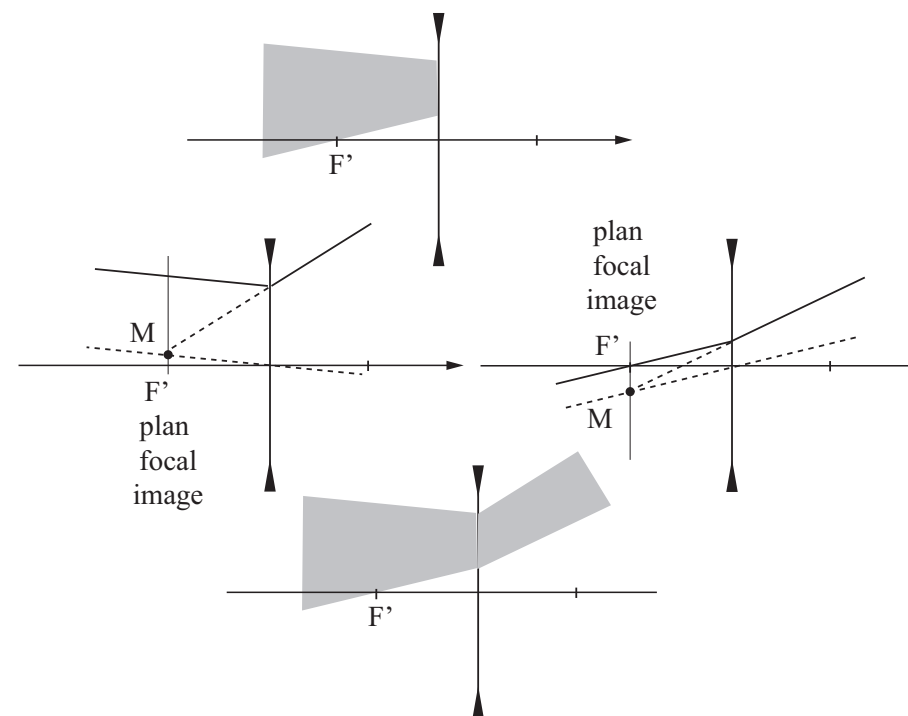


Exemple 7 On considère un pinceau lumineux convergent arrivant sur la lentille divergente de la figure suivante.



Tracer le pinceau lumineux au-delà de cette lentille.

Continuons les deux rayons extrêmes définissant le pinceau de lumière. Il s'agit de rayon quelconque dont la prolongation après la lentille s'effectue en repérant la position d'un rayon parallèle dans le plan focal image.



Exercice 6

D'après Oral CCP 11

Un système est formé de deux lentilles, la première convergente de centre O_1 , la seconde divergente de centre O_2 , séparées d'une distance de $e = 75$ mm.

On place une pellicule au point A derrière la lentille divergente. On note $f'_1 = 100$ mm et $f'_2 = -50$ mm, les distances focales des deux lentilles.



La pellicule est placée de telle manière que les images des objets provenant de l'infini soient nettes.

- 1 - Placer les foyers des lentilles et tracer un rayon provenant de l'infini pour déterminer la position du plan focal image du système optique.
- 2 - Calculer l'encombrement de l'appareil, c'est à dire la distance O_1A .
- 3 - On souhaite photographier la tour Eiffel de hauteur 324 m se situant à une distance de 2,0 km. Son image rentrera-t-elle sur le capteur optique CMOS APS-H de taille 20,2 mm $\times$ 29,2 mm ?
- 4 - En conservant le même grandissement, on souhaite s'affranchir de la lentille divergente. Calculer alors l'encombrement de l'appareil et conclure.

Données :

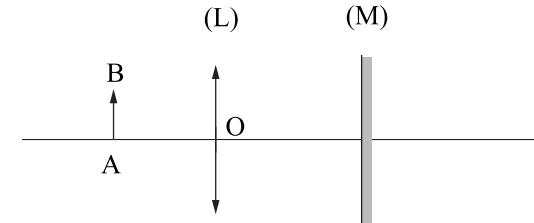
- Formules de conjugaison
 - Origine au centre $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}}$
 - Origine aux foyers $\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -f'^2$
- Formule de grandissement $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$
 - Origine au centre $\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$
 - Origine aux foyers $\gamma = \frac{f'}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'}$

Exercice 7

D'après CCP 02, 16

L'autocollimation est une méthode expérimentale permettant de placer un objet dans le plan focal d'une lentille convergente.

Soit AB est un objet, L une lentille mince convergente distant de 2 cm d'un miroir plan M dont la normale est parallèle à l'axe optique de L.



La distance focale de L est égale à 4 cm. Soit A_1 l'image donnée par la lentille L du point A, puis A_2 l'image donnée par le miroir M du point A_1 et enfin A' l'image finale que donne L de A_2 .

- 1 - Tracer le trajet de deux rayons partant du point B, pour construire son image $A'B'$. On effectuera un dessin à l'échelle pour un objet AB est de hauteur 2 cm et situé à une position $\overline{OA}$ de

$$\overline{OA} = -6 \text{ cm}, \quad \overline{OA} = -4 \text{ cm} \quad \text{et} \quad \overline{OA} = -2 \text{ cm}$$

L'utilisation d'une feuille quadrillée est préconisée.

- 2 - Retrouver dans le premier cas, à l'aide des formules de conjugaison et de grandissement, les positions et la taille de l'image. On prendra le centre optique de la lentille comme origine de l'axe optique.
- 3 - En déduire une méthode expérimentale pour placer l'objet AB sur le plan focal de L.

Exercice 8

D'après CCP 15

On étudie un viseur à frontale fixe constitué par :

- un objectif L_1 de centre O_1 , de distance focale $f'_1 = 50$ mm ;
- un réticule gradué R ;



- un oculaire modélisé par une lentille convergente L_2 de centre O_2 et de distance focale $f'_2 = 10$ mm.

L'oculaire est réglé de manière à ce que l'oeil n'ait pas besoin d'accommoder pour voir le réticule. On notera F_i le foyer objet et F'_i le foyer image de la lentille $n^\circ i$.

On règle la lunette afin d'avoir, pour l'objectif, un grandissement transversal $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -2$.

- 1 - Comment règle-t-on l'oculaire par rapport au réticule ?
- 2 - Préciser la position $\overline{F_2A}$ de l'objet visé par rapport à l'objectif en fonction de γ et f'_1 . Faire l'application numérique.
- 3 - Déterminer l'encombrement $\overline{O_1O_2}$ de la lunette en fonction de f'_1 , γ et f'_2 . Effectuer l'application numérique.
- 4 - Valider vos résultats par un tracé à l'échelle de rayons pour un objet de hauteur $AB = 2,0$ cm. Compléter la figure avec la présence du réticule R et de la lentille L_2 .
- 5 - En l'absence de viseur, sous quel angle α est vu l'objet AB pour un observateur placé en O_2 . En présence du viseur, déterminer puis calculer la valeur α' de l'angle sous lequel est vu l'objet AB à travers le viseur.