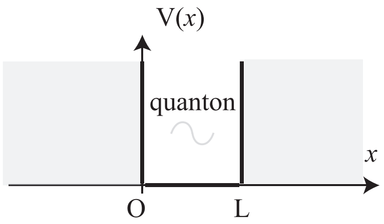
Exemple 1 Montrer que pour une onde plane de matière de la forme :

$$\Psi(x,t) = \mathrm{A}^{i(kx-\omega t)}$$

l'équation de Schrödinger permet de retrouver l'expression de l'énergie mécanique du sytème.

FIGURE 1 – Cadmium sulfide quantum dots on cells, Wikipedia.

Exemple 2



On note $\Psi(x,t) = \varphi(x)e^{-i\mathrm{E}t/\hbar}$ la fonction d'onde d'un quanton se déplaçant dans le potentiel $\mathrm{V}(x)$ avec une énergie E. Le potentiel est infini en $x < 0$ et $x > \mathrm{L}$. Pour la région à l'intérieur de la boîte $\mathrm{V}(x) = 0$

1 - Déterminer l'équation vérifiée par φ pour $0 \leqslant x \leqslant \mathrm{L}$.

2 - Justifier que φ est nul pour $x < 0$ et $x > \mathrm{L}$.

3 - En déduire que $\varphi(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\varphi(x) = \mathrm{A}e^{ik_nx} + \mathrm{B}e^{-ik_nx}$$

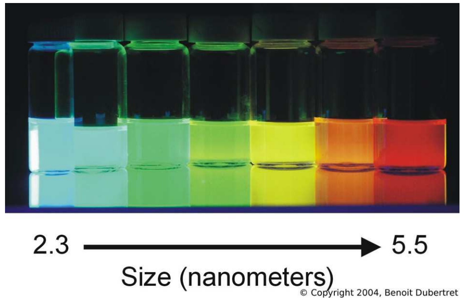
avec k_n s'exprimant en fonction de L.

4 - En utilisant la condition de normalisation, déterminer la constante A.

5 - Montrer que l'énergie peut se mettre sous la forme :

$$\mathrm{E}_n = n^2\mathrm{E}_0$$

Exemple 3 Les boites quantiques sont utilisées comme des atomes artificiels calibrés en fonction de la fréquence d'émission voulue. On suppose que les énergies des différents niveaux suivent la loi : $\mathrm{E}_n = \frac{n^2h^2}{8m\mathrm{L}^2}$ où m est la masse du quanton et L la largeur du puits infini.



Dans les boites synthétisées ci-dessus, les quantons sont appelés excitons et ont une masse apparente de $m^* = 0{,}06 \times m_e$.

1 - Calculer en J puis en eV les énergies des deux premiers niveaux E_1 et E_2 de ces excitons.

2 - Montrer que pour un piège de taille L = 3 nm, le photon émis par une désexcitation du niveau E_2 est dans le spectre visible.

3 - Justifier que plus la taille de la cavité est grande plus la longueur d'onde du photon associé à cette transition est importante.

Données : $m_e = 9.10^{-31}$ kg, $h = 6{,}6.10^{-34}$ $\mathrm{m^2.kg.s^{-1}}$

Exemple 4 On considère un électron d'une boite quantique placé à l'état initial dans l'état correspondant à la superposition :

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1(x) + \phi_2(x))$$

où ϕ_1 et ϕ_2 correspondent aux états stationnaires d'énergie E_1 et E_2 =

4E$_1$.

1 - Exprimer la densité de probabilité de présence $P(x,t)$. Que peut ont dire de son évolution ?

2 - Montrer que le système oscille entre deux états décrits par les fonction d'onde spatiale :

$$\Psi^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1(x) + \phi_2(x)) \quad \text{et} \quad \Psi^-(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1(x) - \phi_2(x))$$

Données : fonction d'onde spatiale dans un puits infini

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

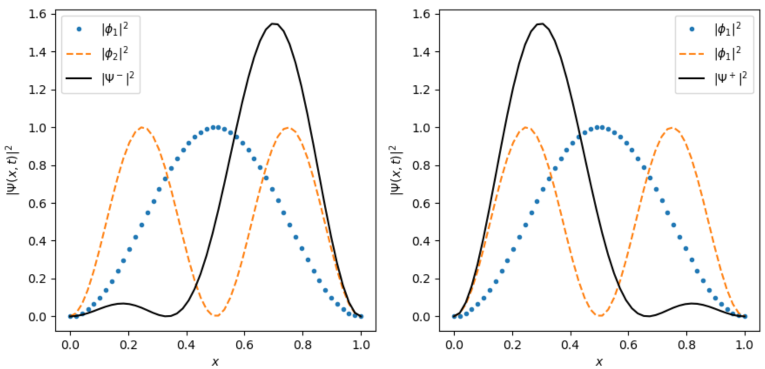


FIGURE 2 – Superposition d'état

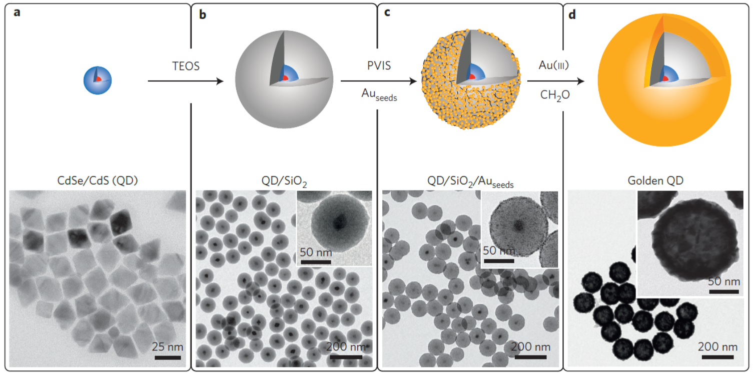
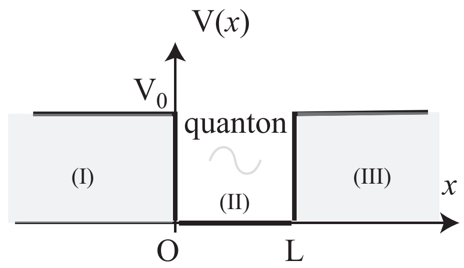


FIGURE 3 – Réalisation de boite quantique protégée. Nature 2015, Non-blinking quantum dot with a plasmonic nanoshell resonator, Dubertret.

Exemple 5

On note $\Psi(x,t) = \varphi(x)e^{-iEt/\hbar}$ la fonction d'onde d'un quanton se déplaçant un puits de potentiel fini de hauteur V_0 sur une distance L.



On considère que l'énergie E est inférieure à V_0.

1 - Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la fonction d'onde spatiale φ dans les 3 domaines notés I, II et III.

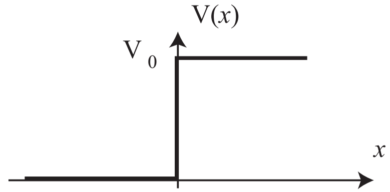
2 - En déduire la forme de la fonction d'onde dans chaque domaine. On posera $q = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$

3 - Définir l'extension spatiale caractéristique du quanton dans le puits de hauteur fini.

4 - Dans un puits infini de largeur L, l'énergie du quanton est de la forme $E_n = n^2h^2/8mL^2$. Représenter approximativement les niveaux d'énergie du puits fini en le justifiant.

Exemple 6

Soit un quanton non relativiste de masse m et d'énergie E se déplaçant vers une marche de potentiel définie par :



$$\begin{cases} \mathrm{V}(x<0)=0 \\ \mathrm{V}(x>0)=\mathrm{V}_0 \end{cases}$$

On supposera que l'énergie du quanton est inférieure à la marche $\mathrm{E}<\mathrm{V}_0$, sa fonction d'onde est de la forme :

$$\psi_1(x,t)=\mathrm{A}_1 e^{ik_1x-i\mathrm{E}t/\hbar}$$

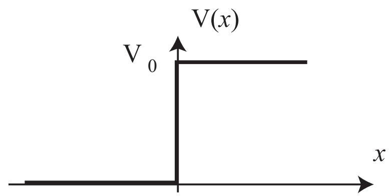
1 - Déterminer la forme de la fonction d'onde spatiale de l'état stationnaire quantique associé au quanton dans l'espace $x<0$ et $x>0$. On posera $k_1=\sqrt{2m\mathrm{E}}/\hbar$ et $q=\sqrt{2m(\mathrm{V}_0-\mathrm{E})}/\hbar$.
2 - Montrer que l'expression de la fonction d'onde spatiale peut se mettre sous la forme :

$$\varphi(x<0)=\mathrm{A}_1\left(e^{ik_1x}+re^{-ik_1x}\right)\quad \text{et}\quad \varphi(x\geqslant 0)=\tau \mathrm{A}_1 e^{-qx}$$

où A_1 est une constante indéterminée, on exprimera r et τ en fonction de k_1 et q.

Exemple 7

Soit un quanton non relativiste de masse m et d'énergie E se déplaçant vers une marche de potentiel définie par :



$$\begin{cases} \mathrm{V}(x<0)=0 \\ \mathrm{V}(x>0)=\mathrm{V}_0 \end{cases}$$

On supposera que l'énergie du quanton est inférieure à la marche $\mathrm{E}<\mathrm{V}_0$, sa fonction d'onde spatiale est de la forme :

$$\varphi(x<0)=\mathrm{A}_1\left(e^{ik_1x}+re^{-ik_1x}\right)\quad \text{et}\quad \varphi(x\geqslant 0)=\tau \mathrm{A}_1 e^{-qx}$$

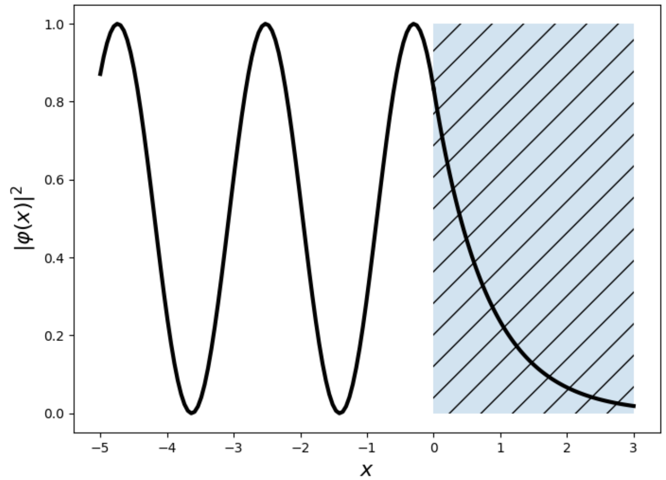


FIGURE 4 – Densité de probabilité pour $\mathrm{E}=0{,}8\times \mathrm{V}_0$

avec $r=\frac{ik_1+q}{ik_1-q}$ et $\tau=\frac{2ik_1}{(ik_1-q)}$.
1 - Montrer que sa fonction d'onde dans la zone $x<0$ peut se mettre sous la forme

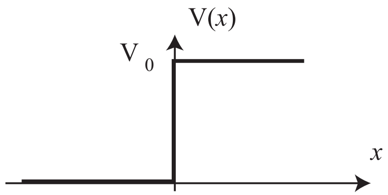
$$\Psi(x<0,t)=\Psi^+(x,t)+\Psi^-(x,t)$$

où Ψ^+ et Ψ^- sont des fonctions progressives.
2 - Définir à partir de Ψ^+ et Ψ^- deux courants de probabilité $\vec{\mathrm{J}}^+$ et $\vec{\mathrm{J}}^-$. Commenter les valeurs obtenues.

Exemple 8 Soit un quanton non relativiste de masse m et d'énergie E se déplaçant dans une marche de potentiel définie par :

$$\begin{cases} \mathrm{V}(x<0)=0 \\ \mathrm{V}(x>0)=\mathrm{V}_0 \end{cases}$$

On supposera que l'énergie du quanton est supérieur à la marche $\mathrm{E}>\mathrm{V}_0$.



1 - Déterminer la forme de la fonction d'onde spatiale de l'état stationnaire quantique associé au quanton dans l'espace $x < 0$ et $x > 0$. On posera $k_1 = \sqrt{2m\mathrm{E}}/\hbar$ et $k_2 = \sqrt{2m(\mathrm{E}-\mathrm{V}_0)}/\hbar$.
2 - En exploitant la continuité de la fonction d'onde et sa dérivée, montrer que l'expression de la fonction d'onde spatiale peut se mettre sous la forme :

$$\varphi(x<0) = \mathrm{A}_1\big(e^{ik_1x} + re^{-ik_1x}\big) \quad \text{et} \quad \varphi(x \geqslant 0) = \tau \mathrm{A}_1 e^{ik_2x}$$

où r et τ sont deux constantes que l'on exprimera en fonction de k_1 et k_2.
3 - Représenter le profil de densité de probabilité de présence. Interpréter le résultat obtenu d'un point de vue ondulatoire probabiliste en imaginant un flux continu de quantons incidents identiques indépendants.

Exemple 9 4 - La densité de courant de probabilité est définie par $\vec{\mathrm{J}} = |\Psi|^2 \dfrac{\hbar\vec{k}}{m}$. Exprimer les densités de courant de probabilité pour un faisceau de particules incidentes $\vec{\mathrm{J}}_{inc}$, réfléchies $\vec{\mathrm{J}}_{ref}$ et transmises $\vec{\mathrm{J}}_{trans}$.
5 - Déterminer le coefficient de réflexions et de transmission correspondant au pourcentage de particules réfléchies et transmises. Conclure en comparant à un comportement classique des particules.

Exemple 10 Un faisceau de charges (charge q, masse m, énergie $\mathrm{E} = 5$ eV) parvient sur une barrière de potentiel de largeur $\mathrm{L} = 0,5$ nm et de hauteur énergétique $\mathrm{V}_0 = 10$ eV (énergie potentielle nulle en-dehors de celle-ci). On note T le coefficient de transmission définie par :

$$\mathrm{T} = 16\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{V}_0}\Big(1 - \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{V}_0}\Big)e^{-2\mathrm{L}/\delta}$$

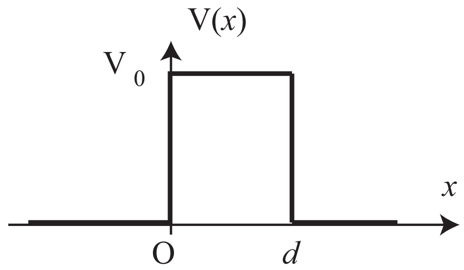


Figure 5 – Barrière de potentiel associée à une pointe de microscope électronique à effet tunnel. Vue d'artiste d'après Wikipédia.

1 - S'il s'agit d'un faisceau électronique d'intensité $\mathrm{I} = 10$ mA, estimer la proportion des électrons qui franchissent la barrière et l'intensité I_s du courant associé.
2 - Reprendre la question précédente pour des protons.
3 - Conclure.