



FIGURE 1 – J.C Maxwell au centre, entouré de K. F. Gauss (en haut à droite), puis dans le sens horaire), A-M. Ampère, M. Faraday et J. J. Thomson.

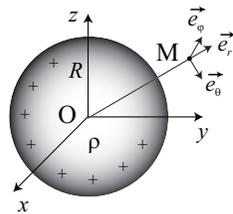
Exemple 1

On considère une boule chargée uniformément en volume. 1 - Déterminer le champ électrique à l'intérieur de la sphère.

2 - En admettant la continuité du champ électrique, déterminer le champ à l'extérieur de la sphère.

Données :

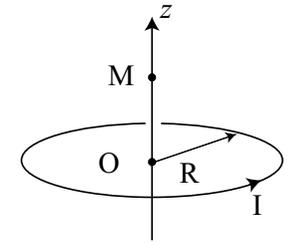
$$\operatorname{div} \vec{U} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 U_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sin \theta U_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U_\phi}{\partial \phi}$$



Exemple 2

On considère une spire située dans le plan horizontal, de centre O, d'axe Oz, de rayon a, parcourue par un courant I₀. La norme du champ magnétique en un point de l'axe Oz, de côte z tel que z ≫ a vaut :

$$B(M \in Oz) = \frac{\mu_0 I a^2}{2 z^3}$$



1 - Justifier précisément la direction du champ pour un point de l'axe Oz.

2 - Dans un plan contenant Oz, tracer l'allure des lignes de champ.

On considère un point M repéré en coordonnées cylindriques (r, θ, z) au voisinage de l'axe. On cherche à déterminer une expression approchée du champ magnétique au point M.

3 - Montrer que sur la base locale des coordonnées cylindriques, une des composantes de $\vec{B}(M)$ est nulle.

4 - Pourquoi peut-on assimiler la composante axiale B_z(M) à B(z, r = 0)

5 - Que vaut le flux du champ magnétique à travers une surface fermée? Quelle est l'équation locale associée?

6 - Déterminer au voisinage de l'axe la composante radiale du champ magnétique. Commenter

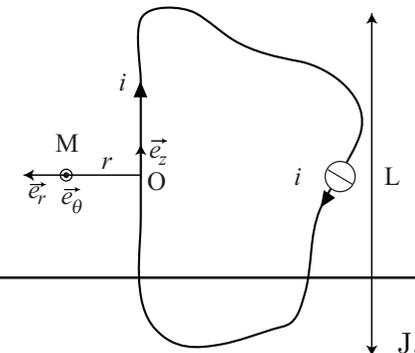
Données : $\operatorname{div} \vec{U} = \frac{1}{r} \frac{\partial r U_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial U_z}{\partial z}$

Exemple 3

Exemple 3

On considère un fil étiré sur une longueur L parcouru par un courant i(t) = I₀ cos ωt.

1 - À quelle(s) condition(s), le champ magnétique engendré par le fil peut être obtenu par application du théorème d'Ampère? On obtient alors



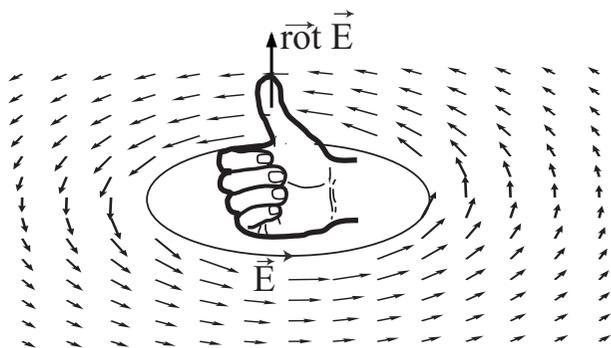


FIGURE 2 – Illustration de l'opérateur rotationnel.

$$\vec{B}(M,t) = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

2 - Déterminer l'orientation du champ électrique et ses invariances.

3 - En déduire le champ électrique dans une zone de l'espace respectant 1.

Données :

$$\vec{\text{rot}} \vec{U} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \theta} - \frac{\partial U_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial U_r}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r U_\theta}{\partial r} - \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$



Exemple

Un cylindre infini d'axe Oz et de rayon R est parcouru par un courant uniforme et permanent de densité $\vec{j} = j \vec{e}_z$.

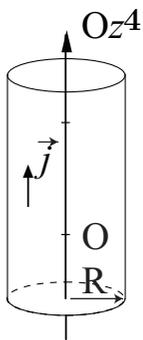
1 - Justifier que le champ magnétique en un point M de coordonnées (r, θ, z) peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{B}(M) = B(r) \vec{e}_\theta$$

2 - À l'aide de l'équation de Maxwell-Ampère, déterminer le champ magnétique créé à l'intérieur du cylindre.

Données :

$$\vec{\text{rot}} \vec{U} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \theta} - \frac{\partial U_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial U_r}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r U_\theta}{\partial r} - \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$



Exemple 5

Les armatures d'un condensateur plan sont deux disques de rayon a , distants de e , d'axe Oz. Le condensateur est soumis à une différence de potentiel $u(t) = U_0 \cos \omega t$.

1 - À quelle(s) condition(s) le champ électrique s'écrit à l'intérieur du condensateur

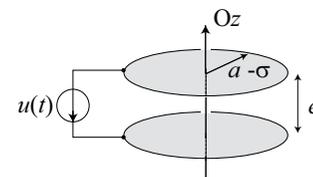
$$\vec{E} = \frac{U_0}{e} \cos \omega t \vec{e}_z.$$

2 - Justifier l'apparition d'un champ magnétique et déterminer son orientation.

3 - Déterminer l'expression du champ magnétique en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère.

Données :

$$\vec{\text{rot}} \vec{U} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \theta} - \frac{\partial U_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial U_r}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r U_\theta}{\partial r} - \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$



Exemple 6 Une distribution de charges présentant une symétrie sphérique autour d'un point O crée en un point M quelconque de l'espace situé à une distance $OM = r$, un potentiel électrostatique de la forme

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-r/a}$$

1 - Déterminer le champ électrique \vec{E} .

2 - Calculer le flux sortant $\Phi(R)$ du champ \vec{E} à travers une sphère de rayon R centrée en O.

3 - En calculant $\Phi(0)$ et $\Phi(\infty)$, justifier que la distribution de charge est une charge $-q$ répartie dans tout l'espace associée à une charge q centrée sur O.

4 - Déterminer la distribution volumique de charge correspondante.

Données :

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$