Maxwell-Gauss	$\operatorname{div} \vec{E} = 0$
Maxwell-Flux	$\operatorname{div} \vec{B} = 0$
Maxwell-Faraday	$\vec{\operatorname{rot}}\, \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Maxwell-Ampère	$\vec{\operatorname{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Table – Equation de Maxwell dans le vide.

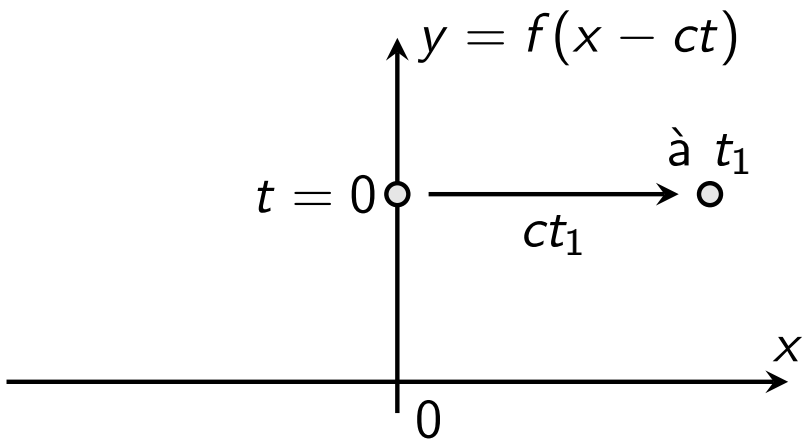
Exemple 1 En appliquant la formule du double rotationnel pour le champ magnétique, montrer que $\vec{B}$ satisfait l'équation de propagation

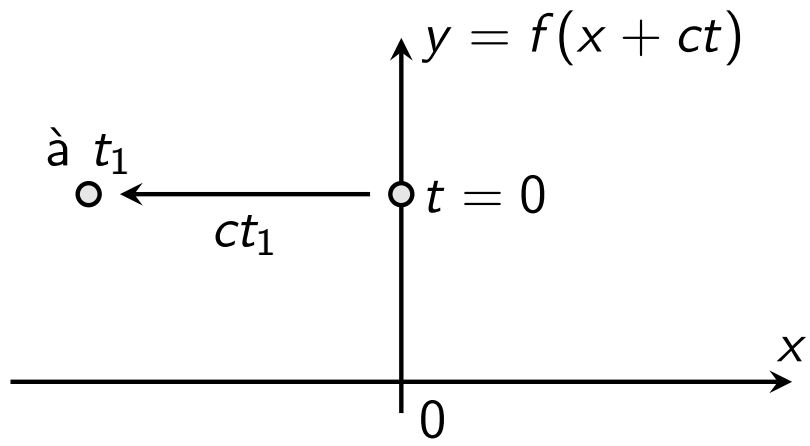
$$\Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Données : $\mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1$.

Exemple 2 Vérifier que le champ écrit sous la forme $E(x,t) = f(x - ct)$ est solution de l'équation de d'Alembert

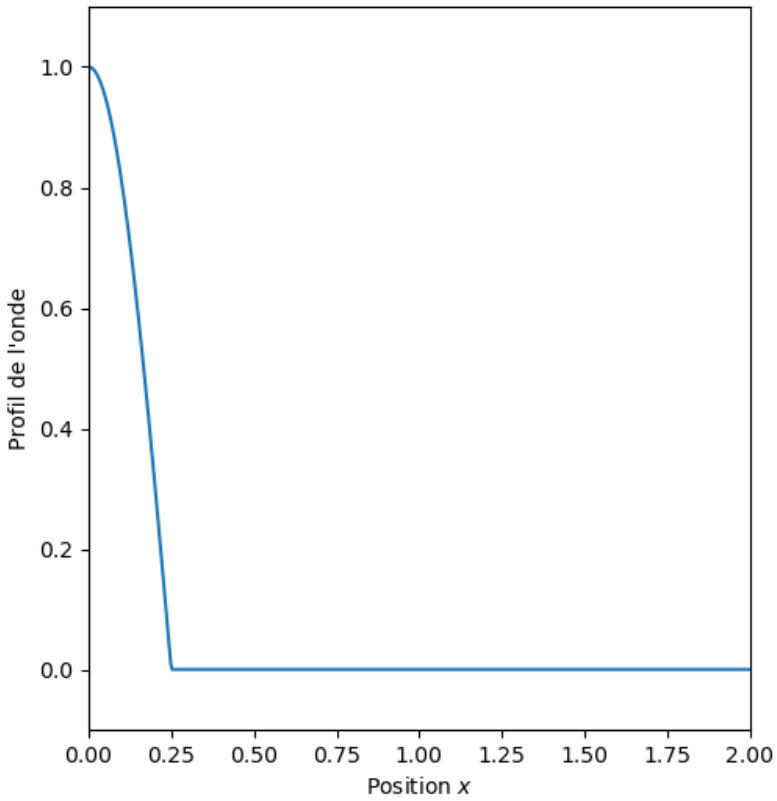
$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

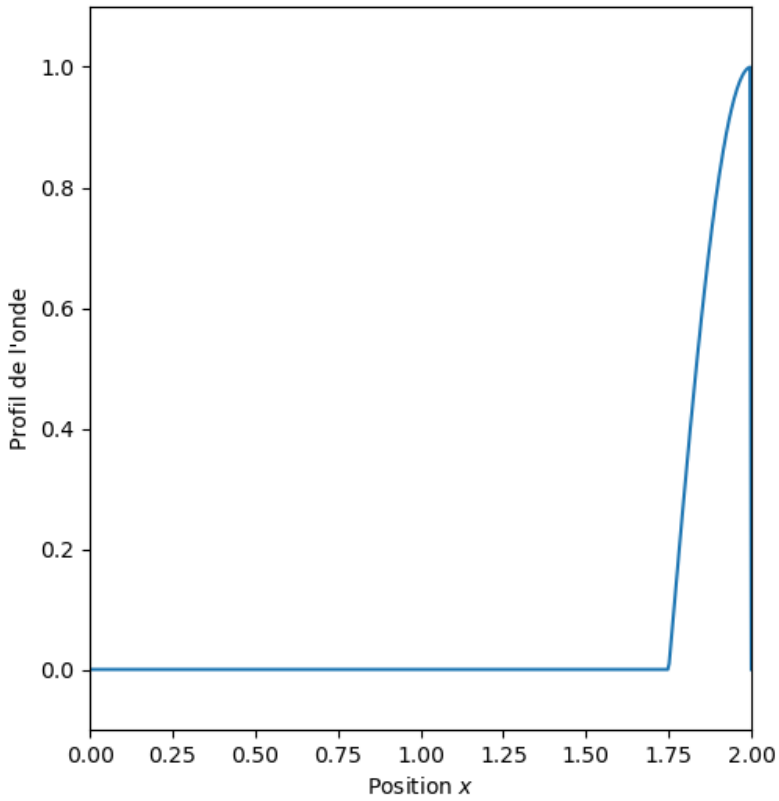

$y = f(x - ct)$
à t_1
$t = 0$
ct_1
x
0

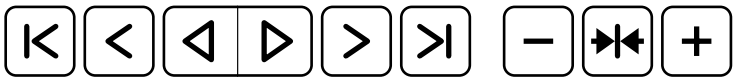

$y = f(x + ct)$
à t_1
$t = 0$
ct_1
x
0

Définition :

Une onde est dite *progressive* selon $+Ox$ à la vitesse c si son amplitude peut s'écrire sous la forme : $s(x,t) = s(x - ct)$.
Elle est *progressive* selon $-Ox$ à la vitesse c si son amplitude peut s'écrire sous la forme : $s(x,t) = s(x + ct)$


Profil de l'onde
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00
Position x


Profil de l'onde
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00
Position x



Définition :

Une onde est dite **monochromatique** ou **harmonique** lorsque son amplitude est proportionnelle à une fonction sinusoïdale dépendante du temps du type : $s(M,t) = A(M)\cos(\omega t + \phi(M))$.

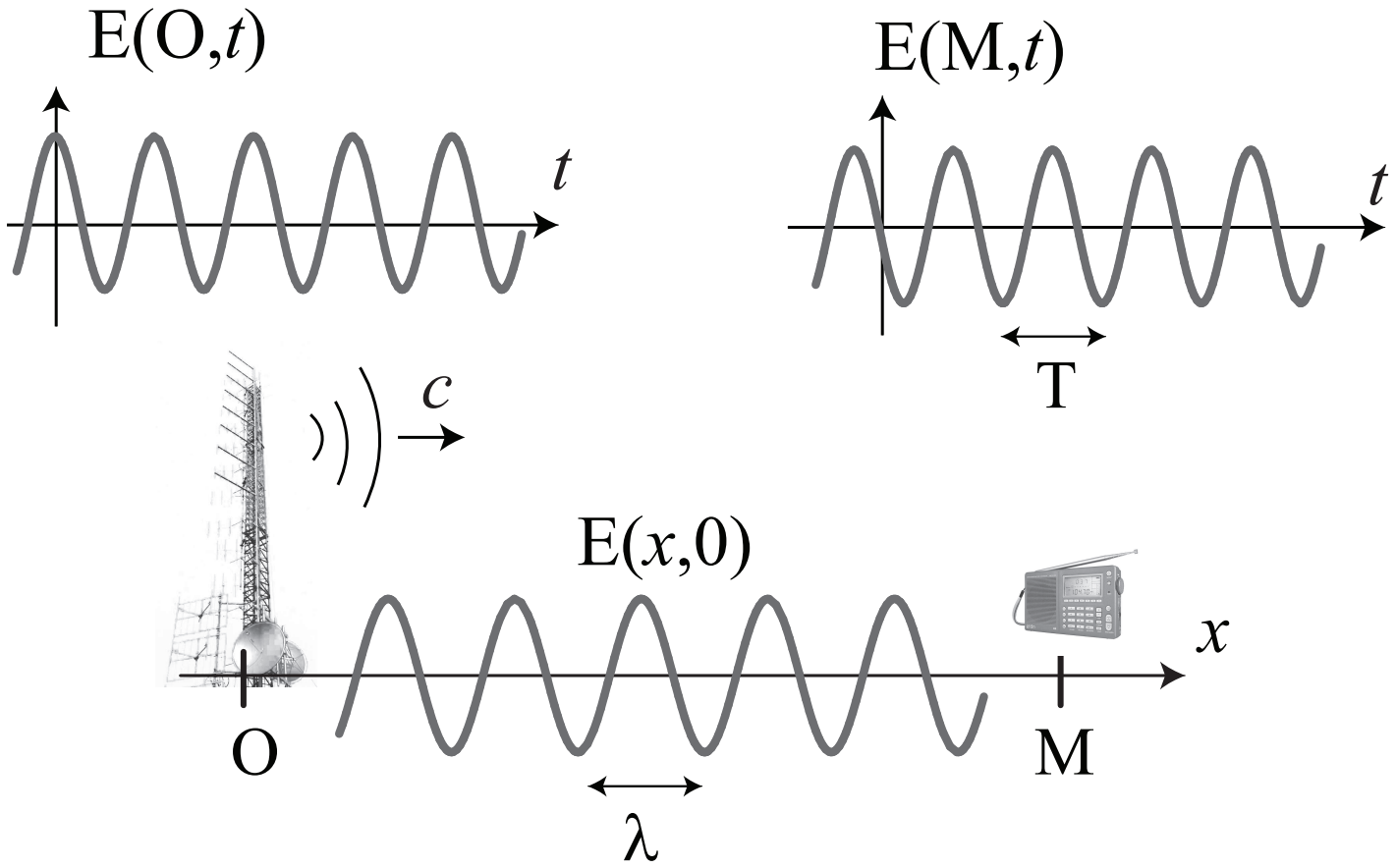
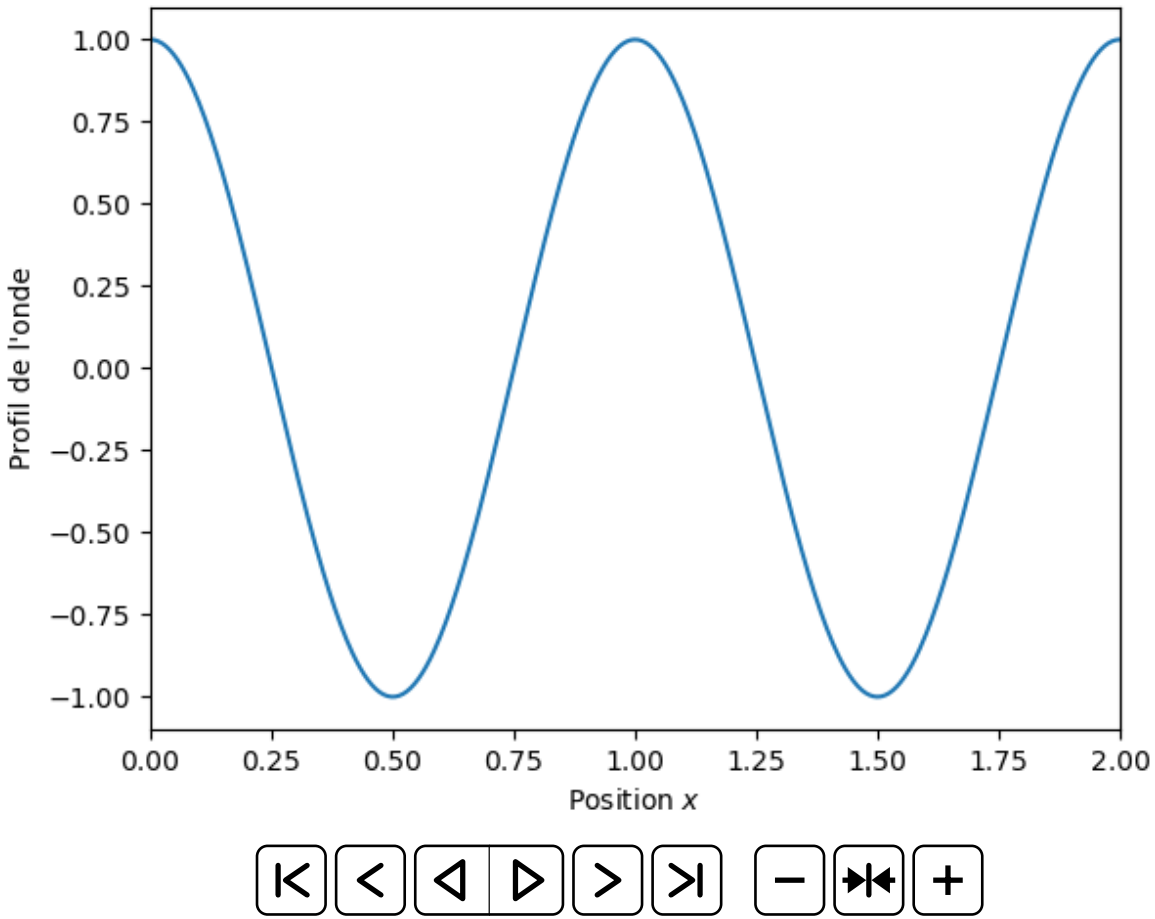


Figure – Périodicité spatiale et temporelle d'une onde monochromatique


1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
Profil de l'onde
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00
Position x

Définition :

Pour une onde se propageant dans la direction $\vec{u}$, le vecteur d'onde s'écrit : $\vec{k} = k\vec{u}$ avec $k = 2\pi/\lambda$. L'écriture générique d'une vibration progressive harmonique est alors :

$$s(\vec{r}, t) \mapsto A(\vec{r}) \cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \phi_0)$$

avec $A(\vec{r})$ l'amplitude de l'onde au point $\vec{r}$ et ϕ_0 la phase à l'origine (pour $\vec{r} = \vec{0}$ et $t = 0$).

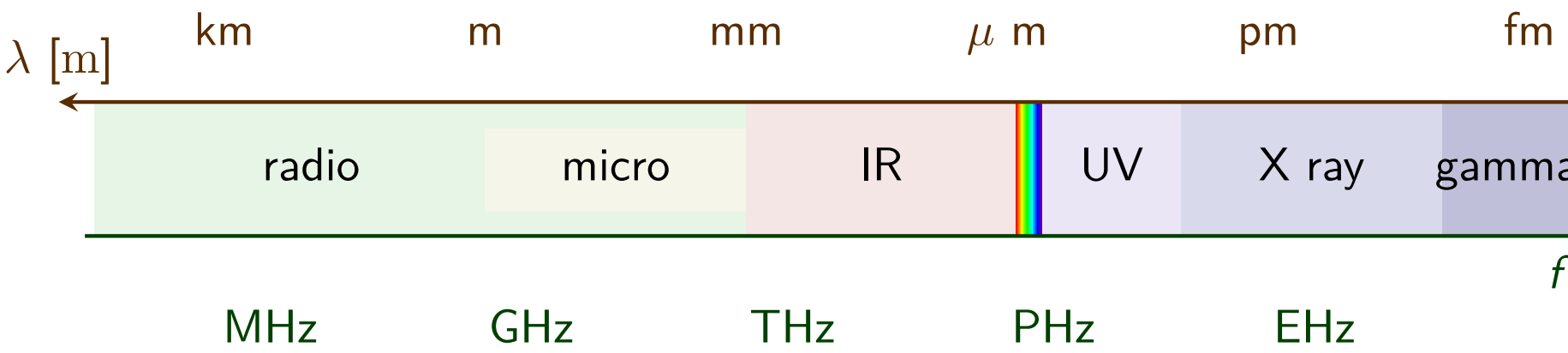


Figure – Spectre électromagnétique

Définition :

Le **front d'onde** ou la **surface d'onde** est une surface dite équiphase, c'est-à-dire que ces points ont mis le même temps de parcours depuis la source, définie par $\phi(M) = C^{te}$.

Définition :

Une onde est dite **plane** est une onde dont les fronts d'onde (plans équiphases) sont des plans infinis.

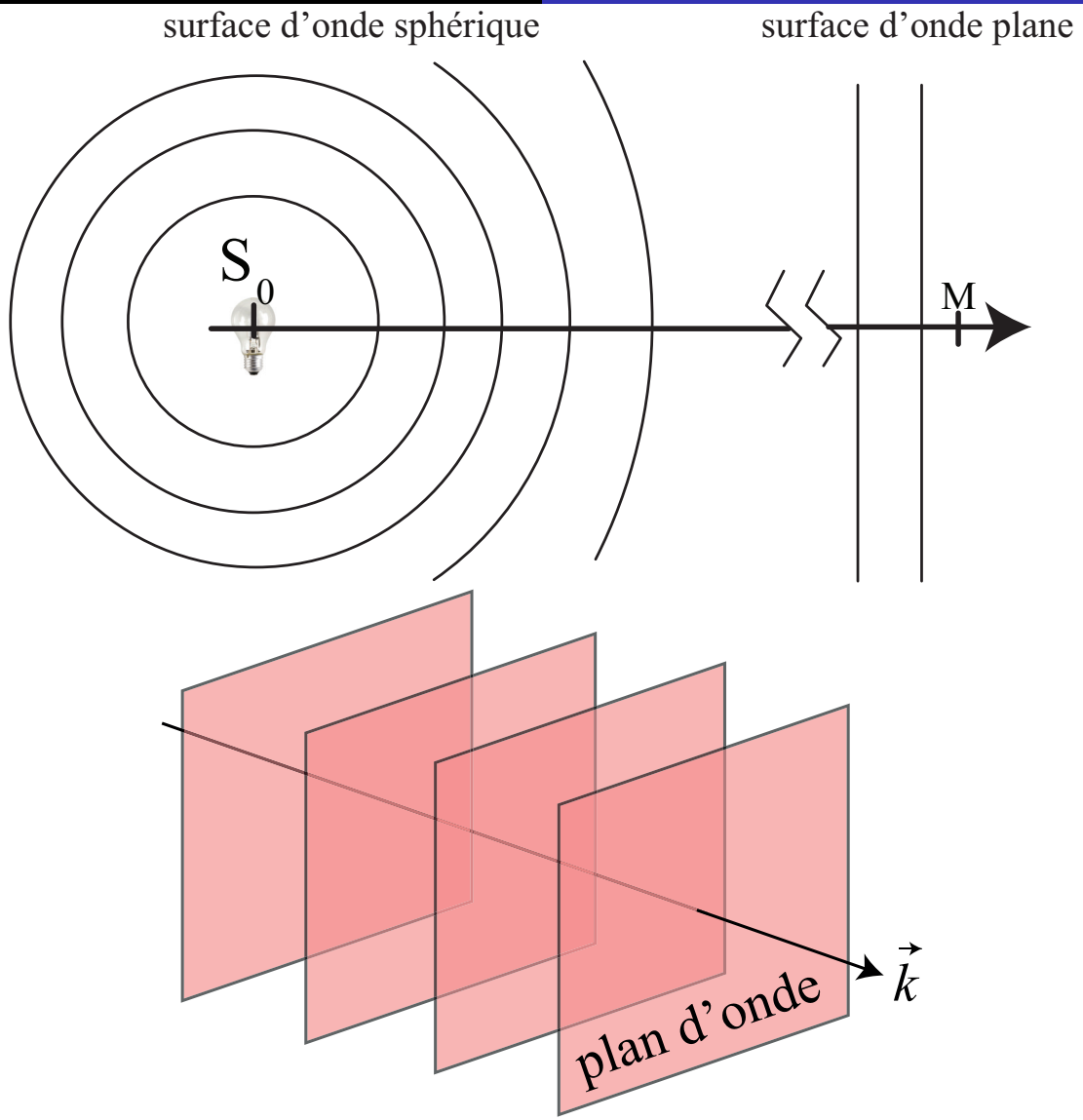


Figure – Surfaces d'onde sphérique devenant plane (gauche). Illustration d'une succession de plan d'onde (droite).

Le champ électromagnétique est une grandeur vectorielle. Lors de la propagation libre d'une onde électromagnétique dans le vide, le champ électrique et le champ magnétique oscillent simultanément dans des directions perpendiculaires. Par convention, la **polarisation** de la lumière décrit la mouvement du champ électrique dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation.

Définition :

On parle de **polarisation rectiligne** lorsque le champ électrique n'est porté que par un seul vecteur. Ce vecteur donne l'axe de polarisation du champ électromagnétique. Le champ magnétique vibre alors dans une direction perpendiculaire.

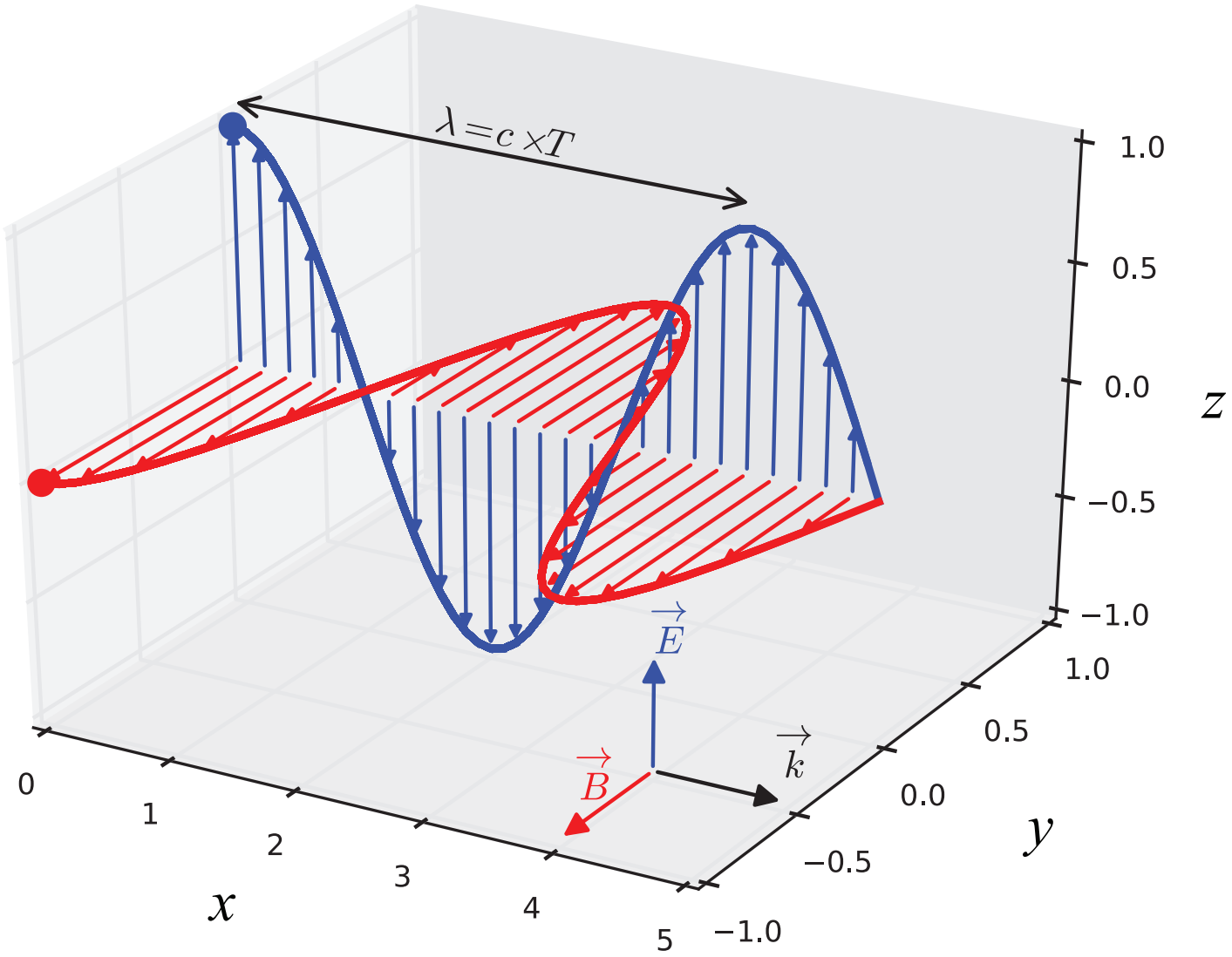


Figure – Structure d'une onde propagative selon Ox et polarisée rectilignement selon z.

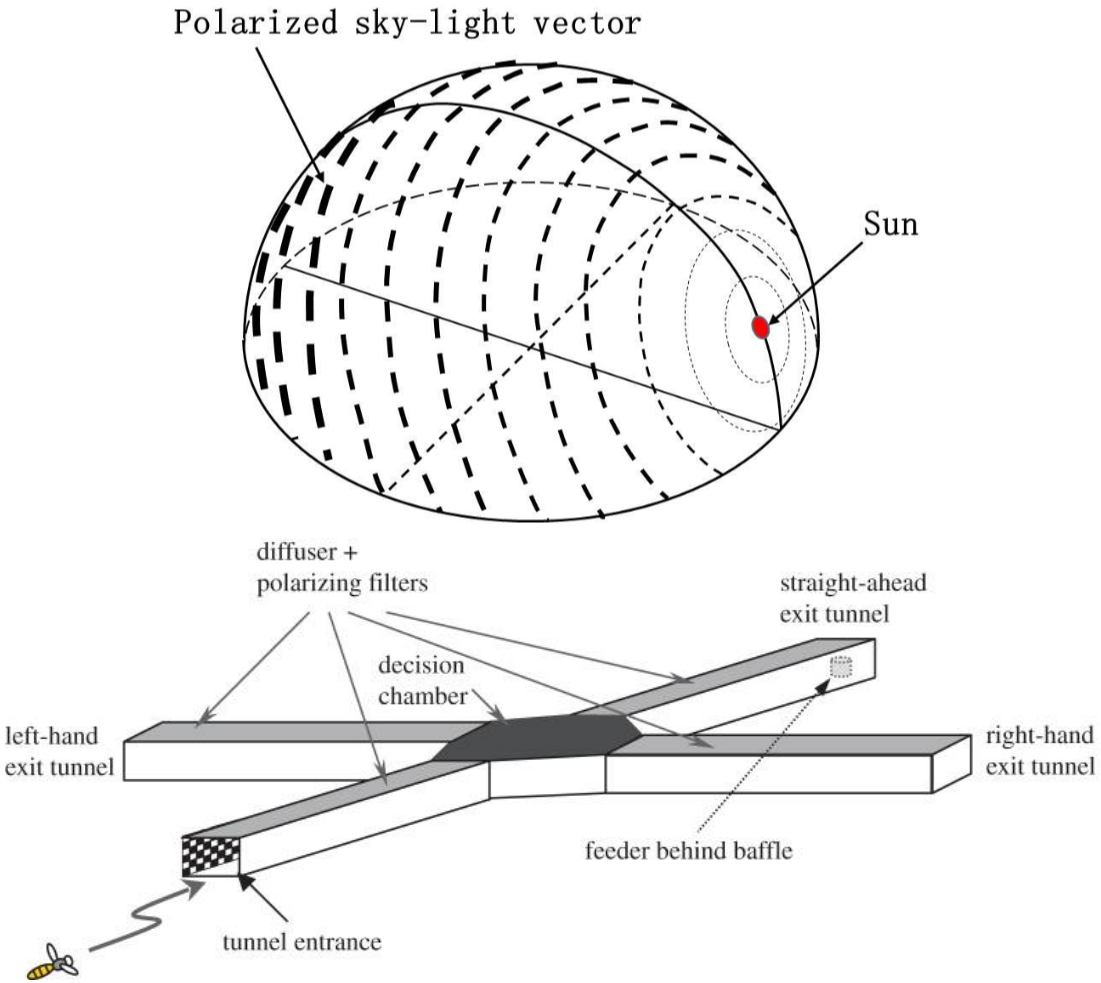


Figure – (Gauche) Diagramme de polarisation du ciel, d'après Machines, (2022), **10**, 1028. (Droite) Tunnel avec lumière polarisée pour abeilles. D'après Kraft *et al*, *Honeybee navigation : following routes using polarized-light cues*, Phil. Trans. R. Soc. B (2011) **366**, 703-708, .

Exemple 3 Proposer une écriture pour les champs électriques associées aux ondes planes monochromatiques suivantes :

- progressive selon Ox polarisée selon Oy
- progressive selon Oy polarisée selon Oz
- progressive selon $-Oy$ polarisée selon Ox

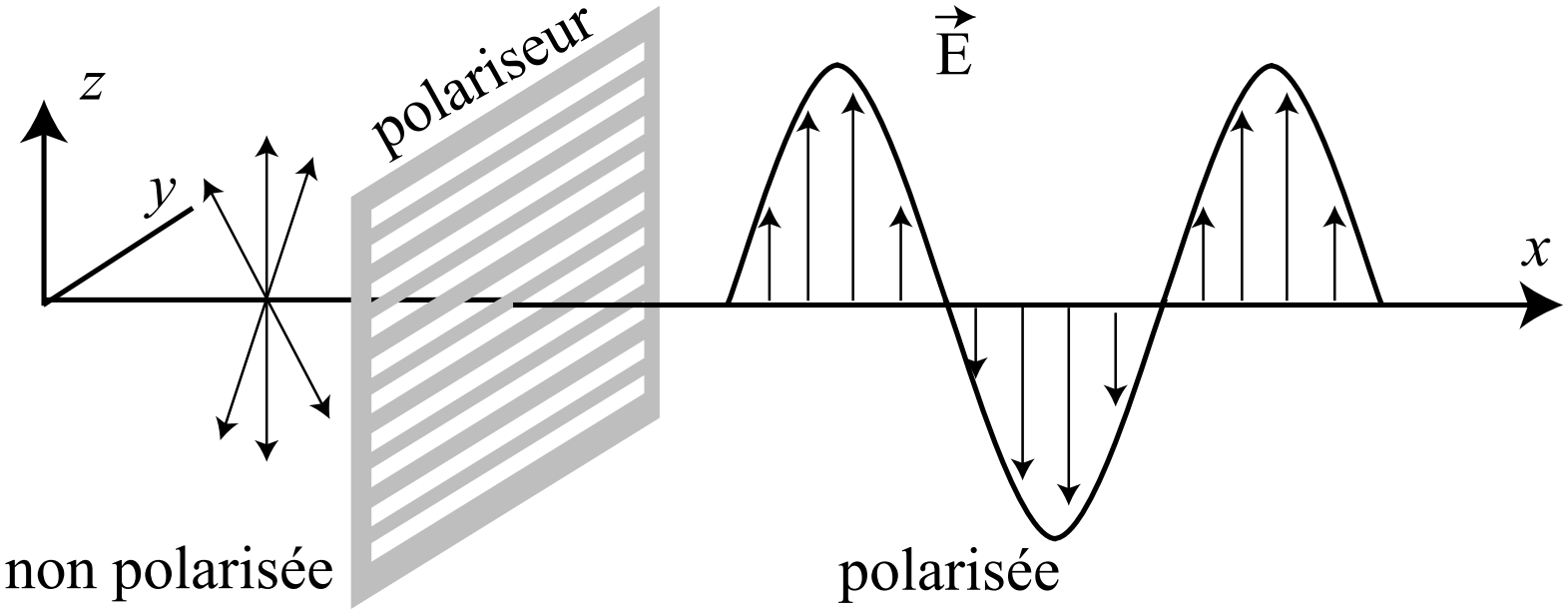


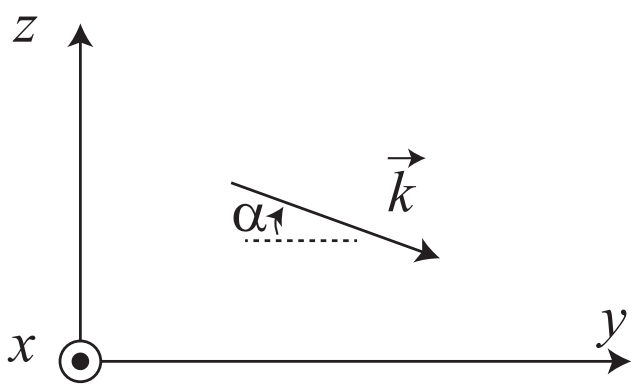
Figure – Principe du polariseur.

	notation réelle	complexe
Maxwell-Gauss	$\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$	$-i\vec{k}.\underline{\vec{E}} = 0$
Maxwell-Flux	$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$	$-i\vec{k}.\underline{\vec{B}} = 0$
Maxwell-Faraday	$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$-i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = i\omega \underline{\vec{B}}$
Maxwell-Ampère	$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$-i\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = \dfrac{i\omega}{c^2} \underline{\vec{E}}$

Table – Équations de Maxwell dans le vide en notation complexe.

Exemple 4

On s'intéresse à une OPPM polarisée rectilignement selon Ox et arrivant avec un angle α par rapport à l'horizontale sur une surface plane.



1 - On note λ la longueur d'onde de l'OPPM. Donner les coordonnées du vecteur d'onde de l'onde décrite.

2 - Proposer une écriture pour le champ électrique.

3 - En déduire une écriture pour le champ magnétique et représenter le trièdre $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$.

Définition :

La vitesse de phase pour une onde progressive monochromatique correspond à sa vitesse de propagation définie par

$$v_\phi = \frac{\omega}{k}$$

Exemple 5

Dans un matériau transparent d'indice n, l'équation de Maxwell-Ampère en notation complexe devient : $\vec{\text{rot}}\,\underline{\vec{B}} = i\mu_0\varepsilon\omega\underline{\vec{E}}$ avec $\varepsilon = \varepsilon_0 \times \varepsilon_r$.

1 - Montrer que l'équation d'onde vérifiée par le champ électrique s'écrit : $\Delta\underline{\vec{E}} + \mu_0\varepsilon_0\omega^2/c^2\underline{\vec{E}} = \vec{0}$.

2 - Identifier la vitesse de phase v_ϕ en fonction de c et ε_r.

3 - Calculer ε_r pour un verre de type SF11 d'indice optique $n = 1,78$.

Donnée : $\mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1$.

Définition :

La densité d'énergie d'électrique est définie par $w_{el} = \varepsilon_0 \frac{||\vec{E}||^2}{2}$, (en $\mathrm{J} \cdot \mathrm{m}^{-3}$).

Définition :

La densité d'énergie magnétiques vaut : $w_{mag} = \frac{||\vec{B}||^2}{2\mu_0}$, (en $\mathrm{J \cdot m^{-3}}$).

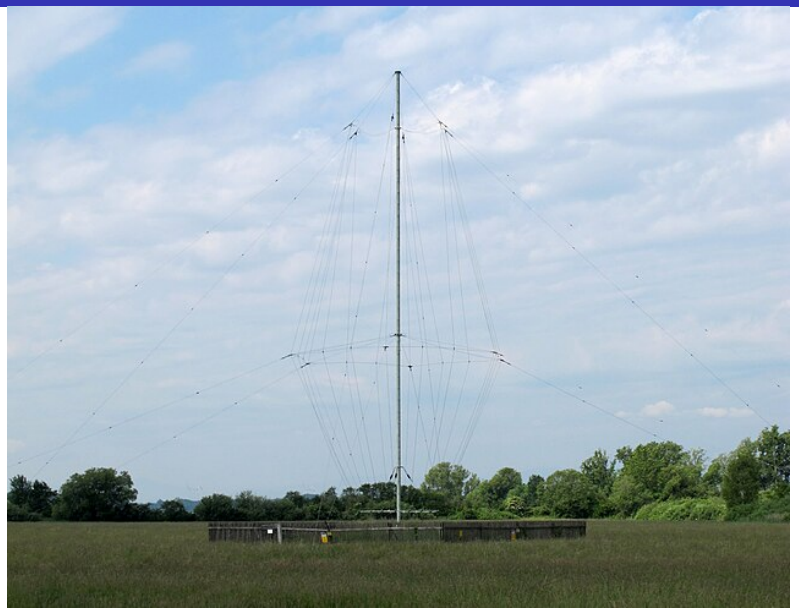


Figure – Antenne cadre, sensible au champ magnétique (©Trixt,) et antenne filaire, sensible au champ électrique (©wdwd,).

Définition :

Le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ est la puissance par unité de surface, transportée par l'onde électromagnétique dans la direction du vecteur $\vec{\Pi}$, défini par :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

$[\Pi] = \ \mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2}$

source	soleil	pointeur laser	laser découpe
intensité $(W \cdot m^{-2})$	$1 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^3$	10^{11}
$\|\|\vec{E}\|\|$ $(V \cdot m^{-1})$	$6 \cdot 10^3$	$13 \cdot 10^3$	$6 \cdot 10^6$

Table – Ordre de grandeur de l'irradiance pour différentes sources.

Exemple 6

On considère l'émission par un laser d'une OPPM, polarisée rectilignement selon Oy, se propageant sur l'axe $+Ox$ et de longueur d'onde $\lambda = 600\,\text{nm}$.

1 - Proposer l'expression du champ électrique correspondant à la description de l'onde. On notera E_0 l'amplitude de ce champ.

2 - En déduire l'expression du champ magnétique. On exprimera son amplitude B_0 en fonction de E_0 et c.

3 - Un spot laser éclaire une surface de $s = 1\,\text{mm}^2$ avec une puissance de 1 mW. Déterminer les valeurs des amplitudes E_0 et B_0.

Données : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{H} \cdot \text{m}^{-1}$, $c = 3 \cdot 10^8\,\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

Figure – Laser de découpe (), vidéo de Amada LC 3015 X1 NT ©, puissance 4 kW.