Exemple 1 On considère un métal plongé dans un champ électrique uniforme $\vec{E}(t) = E_0 \cos(\omega t)\, \vec{e}_z$. Un électron initialement à l'origine du repère, est soumis de la part des défauts du métal à une force de frottement de la forme $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$.

1 - Déterminer l'équation différentielle vérifiée par les électrons.

2 - En utilisant la notation complexe, montrer que la vitesse de l'électron peut se mettre sous la forme :

$$\underline{\vec{v}} = \frac{-e/\alpha}{1 + i\omega\tau} \underline{\vec{E}}$$

On explicitera la valeur de τ en fonction de m et α.

3 - a) Dans quelle gamme de pulsations la vitesse est-elle en phase avec le champ électrique ?

b) Exprimer alors la densité de courant et montrer qu'elle est proportionnelle au champ électrique.

Définition :

Dans un milieu conducteur, la loi d'Ohm locale s'écrit :

$$\vec{j} = \sigma_0 \vec{E}$$

où σ_0 est la conductivité électrique s'exprimant en $S.m^{-1}$ (l'unité siemens S est l'inverse de l'Ohm : $S = \Omega^{-1}$).

métal	$\sigma_0 \times 10^6\, S.m^{-1}$
Argent	63
Cuivre	59,6
Or	45,2
Aluminium	37,7

Table – Conductivité électrique de différents métaux.

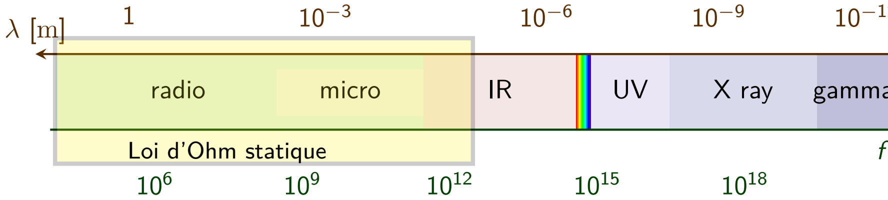


Figure – Domaine d'approximation de la loi d'Ohm locale statique (encadré).

Exemple 2

On considère un fil de cuivre utilisé en séance de travaux pratiques, d'une longueur de 1 m , d'une section de $S = 0{,}75\,\mathrm{mm}^2$ parcouru par une intensité de 1,0 A.

1 - Déterminer la résistance d'un tel fil. Commenter cette valeur au regard de son utilisation en travaux pratiques.

2 - En supposant qu'un atome de cuivre fournit un électron de conduction, estimer le nombre d'électrons par unité de volume dans le métal.

3 - Estimer la vitesse moyenne des électrons lors de son utilisation.

Données :

• cuivre : masse volumique $m_v = 8{,}9\cdot 10^3\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$; masse atomique $m_a = 63{,}44\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{mol}^{-1}$; conductivité $\sigma_0 = 6\cdot 10^7\,\Omega^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1}$

• nombre d'Avogrado $\mathcal{N}_A = 8{,}4\cdot 10^{23}$; charge élémentaire $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$

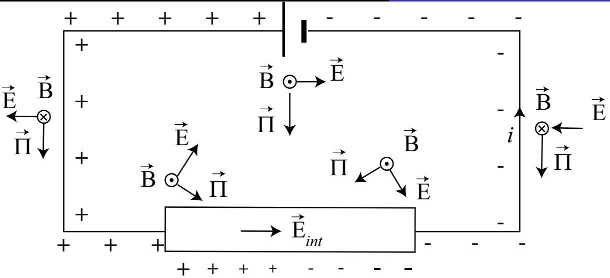
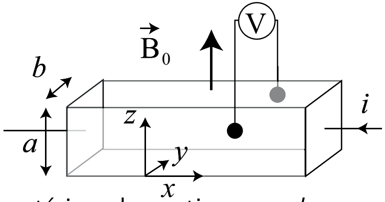


Figure – Equivalence entre les approches composants et électromagnétisme dans un circuit électrique. Inspiré de Davis, Kaplan, *Poynting vector flow in a circular circuit*, Am. J. Phys. **79**, 1155 (2011). QR code, *Que se passe-t-il (vraiment) dans les fils électriques ?* D. Louapre.

Exemple 3



Afin de réaliser une sonde de champ magnétique, on mesure la tension entre deux faces d'un ruban conducteur contenant $n^\star$ porteurs de charge par unité de volume. On note $I = 5mA$ le courant traversant le matériau de section $a \times b$, avec $a = 0{,}1\,\mathrm{mm}$ et $b = 1{,}0\,\mathrm{mm}$.

1 - Exprimer la vitesse des électrons en fonction de I, a, b,$n^\star$ et e.

2 - En déduire le champ électrique de Hall lorsque le matériau est plongé dans un champ magnétique constant $\vec{B}_0 = B_0\,\vec{e}_z$.

3 - Montrer que la mesure de la différence de potentiel est proportionnel au champ magnétique : $U_H = \alpha B_0$. On exprimera la constante α en fonction des variables citées.

4 - Pour du cuivre et du germanium [a], calculer la valeur de α sachant que le nombre porteur de charge est de l'ordre de $n^\star_{\mathrm{Cu}} = 8 \cdot 10^{28}\,\mathrm{m}^{-3}$ et $n^\star_{\mathrm{Ge}} = 2 \cdot 10^{21}\,\mathrm{m}^{-3}$. Quel matériau choisir pour

mesurer un champ magnétique de l'ordre de $B_0 = 1\,\mathrm{mT}$?
Données : $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$

---

a. Dans les semi-conducteurs, le courant est transporté par les électrons et des « trous », c'est-à-dire des zones vide d'électrons qui se comportent comme une charge positive $+e$. On supposera ici que le modèle reste valide.

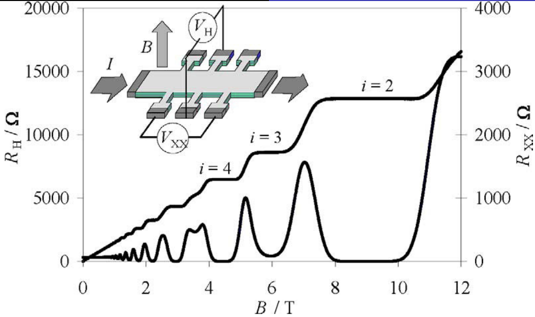


Figure – Effet quantique sur le résistance de Hall. Tiré de Piquemal *et al*, Comptes Rendus de l'Académie **5**, 857 (2004).

Exemple 4

Déterminer l'équation de propagation pour le champ magnétique dans un conducteur ohmique sans propriété magnétique.
Données : $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{X} = \vec{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div}\,\vec{X} - \Delta\vec{X}$;

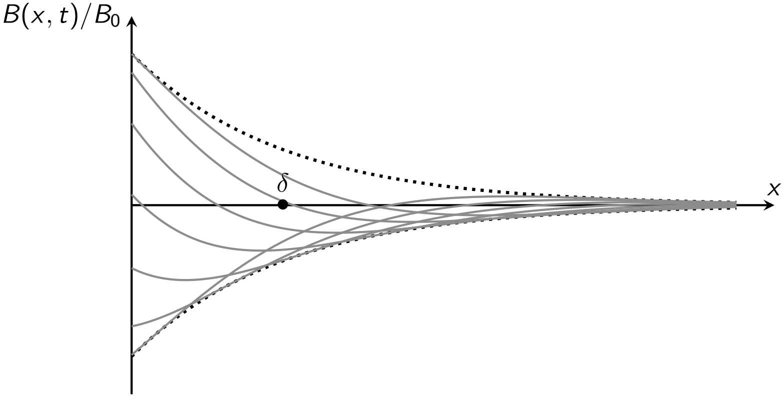


Figure – Atténuation d'une onde électromagnétique dans un métal : effet de peau.

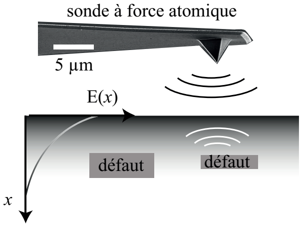
Définition :

Dans un milieu ohmique le champ se propage en étant atténué d'un facteur $e^{-x/\delta}$, où δ est appelée **épaisseur de peau**. Cette grandeur correspond à la distance caractéristique de pénétration de l'onde dans le métal, elle dépend à la fois de la conductivité du matériau et de la fréquence de l'onde électromagnétique :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma_0 \omega}}$$

Fréquence	50 Hz	60 Hz	10 kHz	100 kHz	1 MHz	10 MH
δ	$9,38$ mm	$8,57$ mm	$0,66$ mm	$0,21$ mm	66 μm	21 μn

Table – Épaisseur de peau dans le cuivre à différentes fréquences.



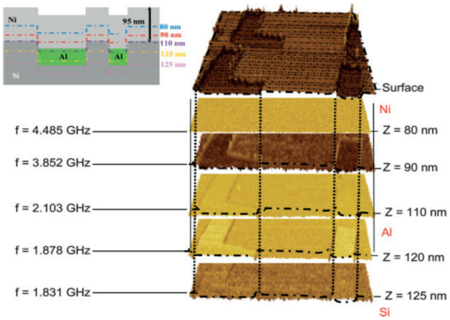


Figure – Sonde à force atomique pour l'étude d'un matériau selon la profondeur. D'après Plassard *et al*, Phys. Rev. B **83**, 121409(R) (2011). ©(2024) aps.

Exemple 5 Dans la configuration de l'exemple précédent, le champ magnétique dans le métal est de la forme

$$\vec{B}(x,t) = B_0 e^{-x/\delta}\cos(\omega t - x/\delta)\,\vec{e}_y$$

1 - Déterminer le vecteur densité de courant $\vec{j}(x,t)$ et en déduire le champ électrique $\vec{E}(x,t)$.
2 - Sachant que $\delta = \sqrt{2/\mu_0\sigma_0\omega}$, que devient le courant volumique dans la limite du conducteur parfait $\sigma_0 \to \infty$.
Données :
$\vec{r}otU = \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$
$\sin a - \cos a = \sqrt{2}\cos(a + 3\pi/4)$

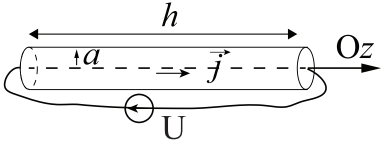
Définition :

Dans un milieu conducteur, la **puissance volumique cédée aux porteurs de charges** par l'onde électromagnétique est définie (cf. annexe. **??**) par :

$$\mathcal{P}_{vol} = \vec{j}.\vec{E} \quad (\text{en} \mathrm{W.m^{-3}})$$

Exemple 6

Un barreau métallique cylindrique de rayon a et de longueur h est soumis à une différence de potentiel U. On note σ_0 la conductivité du métal et on supposera $h \gg a$.



1 - Déterminer le champ électrique dans le cylindre en fonction de U et h.

2 - Exprimer la puissance volumique cédée aux porteurs de charge en fonction de σ_0 et j puis en fonction de σ_0 ,U et h.

3 - Montrer que $\iiint_{barreau} \mathcal{P}_{vol} \mathrm{d}\mathcal{V}$ peut s'exprimer sous la forme d'une grandeur connue.

4 - Calculer le flux du vecteur de Poynting à travers la surface latérale du conducteur. Conclure

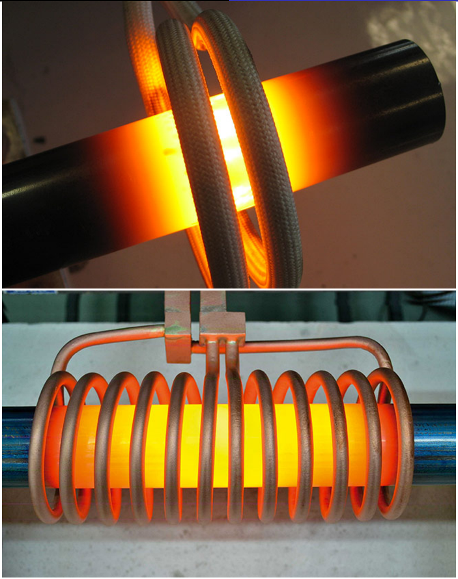
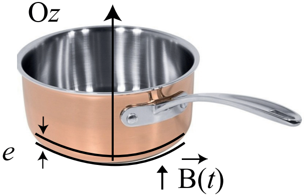


Figure – Forge à induction de la société Polyplus ©.

Exemple 7

On place sur une plaque à induction, une casserole en cuivre de diamètre $d = 20\,\text{cm}$ et dont le fond possède un épaisseur $e = 2\,\text{mm}$. Le champ magnétique imposé par la plaque est oscillant à la fréquence $f = 20\,\text{kHz}$ et d'amplitude $B_0 = 0{,}1\,\mu\text{T}$.



1 - Évaluer l'épaisseur de peau dans le fond de la casserole.

2 - Représenter la puissance volumique de chauffage $< \mathcal{P}_{vol} >= \frac{\omega B_0^2}{2\mu_0} e^{-2z/\delta}$.

3 - Justifier que la puissance de chauffage est définie par

$$\mathcal{P} \approx \pi d^2/4 \int_0^{\infty} < \mathcal{P}_{vol} > \mathrm{d}x$$

Calculer la puissance et conclure sur l'utilisation de telles casseroles sur une plaque à induction.

Données : conductivité du cuivre : $\sigma_0 = 6 \cdot 10^7\,\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$; $\mu_0 = 1{,}26 \cdot 10^{-6}\,\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$.