37477 DELAPORTE Lucille

La courbe brachistochrone

Il est étonnant de constater que la trajectoire qui minimise le temps de parcours entre un point A en amont et point B en aval n'est pas une droite mais une courbe. Cette courbe est appelé courbe brachistochrone.
On remarque que la trajectoire instinctivement suivie, par exemple, par un surfeur sur une vague, correspond à une courbe brachistochrone. En effet, cette trajectoire minimise le temps de parcours, lors d'une descente, d'un objet uniquement soumis à son poids.

Positionnement thématique (phase 2)

MATHEMATIQUES (Analyse), PHYSIQUE (Mécanique), INFORMATIQUE (Informatique pratique).

Mots-clés (phase 2)

Mots-Clés (en français)	**Mots-Clés** (en anglais)
courbe brachistochrone	*Brachistochrone curve*
Équation d'Euler-Lagrange	*Euler-Lagrange equation*
Optimisation	*Upgrading*
Etude physique	*Physical method*
Résolution numérique	*Numerical method*

Bibliographie commentée

Le problème de la courbe brachistochrone s'énonce ainsi : quel est le chemin entre un point A, en amont, et un point B, en aval, dont le temps de parcours est le plus court lorsqu'on est soumis uniquement à son poids ? La réponse n'est pas intuitive, ce n'est pas la ligne droite mais elle est connu sous le nom de courbe brachistochrone. En 1633, Galilée crut que la solution du problème de la courbe brachistochrone était un arc de cercle, il incita alors d'autres mathématiciens de son époque à se pencher sur le sujet. Jean Bernoulli et Leibniz trouvèrent en juin 1696 une solution à ce problème [1]. Cette solution serait un arc de cycloïde.

La résolution proposée par Bernoulli est une analogie avec l'optique, qui utilise notamment, le principe de Fermat. Le principe de Fermat énonce que la lumière se propage selon la trajectoire qui minimise le temps de parcours [2]. Celle de Leibniz est fondée sur l'approximation de la courbe par des lignes brisées. Cette seconde méthode était un premier pas vers l'équation d'Euler-Lagrange et le calcul des variations. Aujourd'hui, la méthode usuelle de résolution du problème est celle du calcul des variations. [3,4]

La résolution actuelle utilise notamment l'équation d'Euler-Lagrange et la formule de Beltrami. L'équation d'Euler-Lagrange énonce une condition nécessaire d'extremum local d'une fonctionnelle [5] et la formule de Beltrami, quand à elle, découle d'une simplification de la condition d'Euler-Lagrange. Cette formule fait apparaître une constante qui simplifie les calculs [6].

Outre son aspect théorique intéressant, la courbe brachistochrone se retrouve aujourd'hui majoritairement dans le domaine sportif, notamment, dans les sports d'hiver comme le bobsleigh, le saut à ski ou encore la luge [7].

En présence de frottements secs ou fluides, le profil du chemin doit être différent. L'étude du problème avec frottements ne peut pas être résolue de manière exacte avec la méthode du calcul des variations [8]. Toutefois, la solution du problème peut être approchée par une étude numérique en utilisant des algorithmes de minimisation comme des algorithmes génétiques [9]. Les algorithmes génétiques reposent sur trois principes : principe de variation, d'adaptation et principe d'hérédité. Ces trois principes permettent d'obtenir de manière approchée le chemin qui minimise le temps de parcours de la bille.

Problématique retenue

Il s'agit d'étudier, dans un premier temps, le modèle théorique puis de vérifier sa validité pratique. Cette optimisation est-elle valable dans le cadre d'une étude avec frottements ? Avec des frottements fluides ou des frottements secs, une autre courbe ne serait-elle pas plus adaptée ?

Objectifs du TIPE

Je me propose :

- De retrouver par la résolution proposé par Jean Bernoulli et par la méthode du calcul des variations, l'équation de la courbe brachistochrone.
- D'étudier dans la pratique, avec une maquette, le mouvement réel d'une bille sur la courbe, en faisant varier les frottements auxquels est soumises la bille.
- D'utiliser un algorithme (génétique) afin de déterminer le plus précisément possible une courbe qui serait plus adaptée si l'on avait à ajouter les frottements qui n'existent pas dans le modèle théorique/ mathématique.

Abstract

In this work I have studied the brachistochrone curve which is theoretically the most efficient way to minimize the time a marble takes to go from a higher point to a lower one when neglecting frictions. I resorted to two different techniques: a mathematical one through the calculus of variation and one merging physics and informatics with an algorithm.

Then acknowledging with experiments that with friction this theory becomes inaccurate I tried to build a second model including frictions through another algorithm or with analytic calculus, which is more accurate.

Références bibliographiques (phase 2)

[1] Otto Mencke, Gottfried Wilhelm Leibniz : ACTA ERUDITORUM : *http://amatterofmind.org/Pierres_PDFs/TRANSLATIONS/4._GOTTFRIED_LEIBNIZ_SELEC*

TIONS_FROM_ACTA_ERUDITORUM.pdf

[2] IREM DE FRANCHE-COMTÉ : Réfraction : principe de Fermat et loi de Snell-Descartes : *http://www-irem.univ-fcomte.fr/download/irem/document/ressources/math-phys/refraction/fermat.pdf*

[3] DOUGLAS SHAFER : The Brachistochrone: Historical Gateway to the Calculus of Variations : *http://mat.uab.es/matmat/PDFv2007/v2007n05.pdf*

[4] HENRI CARTAN : Cours de calcul différentiel : *1979, Hermann*

[5] UNIVERSITÉ D'AIX-MARSEILLE : Chapitre IV Equation d'Euler-Lagrange : *https://old.i2m.univ-amu.fr/~fpalesi/index_files/Chapitre4.pdf*

[6] SERGE MEHL : Calcul des variations - Équation d'Euler-Lagrange : *http://serge.mehl.free.fr/anx/cv_equ_Euler.html*

[7] STEVE HAAKE : Surfing the brachistochrone : *https://engineeringsport.co.uk/2010/10/29/surfing-the-brachistochrone/*

[8] ERIC W.WEISSTEIN : Brachistochrone Problem : *http://mathworld.wolfram.com/BrachistochroneProblem.html*

[9] INSTITUT D'ÉLECTRONIQUE ET D'INFORMATIQUE GASPARD-MONGE : Algorithme génétique : *http://igm.univ-mlv.fr/~dr/XPOSE2013/tleroux_genetic_algorithm/fonctionnement.html*

DOT

[1] *En première année, j'ai étudier la démonstration, en utilisant le calcul des variations, de la formule de la courbe brachistochrone.*

[2] *Puis en fin d'année dernière, j'ai mis en place un algorithme permettant de tracer la courbe ainsi trouvée et de la comparer à la droite et à l'arc de cercle (première hypothèse de Galilée).*

[3] *En septembre, j'ai chercher à construire la courbe brachistochrone, afin d'effectuer l'expérience. Pour la construire, je devais faire un plan permettant au technicien, à qui j'ai demandé de m'aider, de n'avoir plus que la réalisation à faire. Ainsi j'ai mis en place le programme qui me permettait d'imprimer chaque part de ma cycloïde sur des feuilles A4.*

[4] *En janvier, j'ai chercher à résoudre le problème avec frottements. C'est pour cela que j'ai crée un algorithme qui me permettait d'obtenir la courbe qui minimisait le temps de parcours en fonction du coefficient de frottements. J'ai d'abord vérifié ce programme sans frottements, puis j'ai rajouté les frottements dans mes calculs.*

[5] *En mai, j'ai cherché à trouver une autre méthode pour déterminer la courbe qui minimisait le temps de parcours avec frottements.*

[6] *Mi-mai, début juin, j'ai abandonné cette autre méthode pour essayer d'améliorer les simulations déjà effectives.*