

Etude du saut à la perche



Source : IAAF

Comment évaluer la hauteur maximale atteignable au saut à la perche ?

Démarche

I. Analyse et premières approches du problème

II. Analogie avec les poutres flexibles

III. Aboutissement et remise en cause

Hypothèses générales :

-Travaux musculaires lors du saut négligés.

-Référentiel terrestre supposé galiléen.

Données

Données record du monde (Lavillenie, 6.16m, 2014) :

Vitesse initiale max : $v_o = 9,9 \text{ m.s}^{-1}$
 Longueur perche : $L = 4,7 \text{ m}$
 Diamètre : $l = 6,0 \text{ cm}$
 Module d'Young perche : $E = 70 \text{ GPa}$
 (Thèse de Laurent Gornet : Généralités sur les matériaux composites)

(Source : Le Monde)



Source : Le Journal du Centre

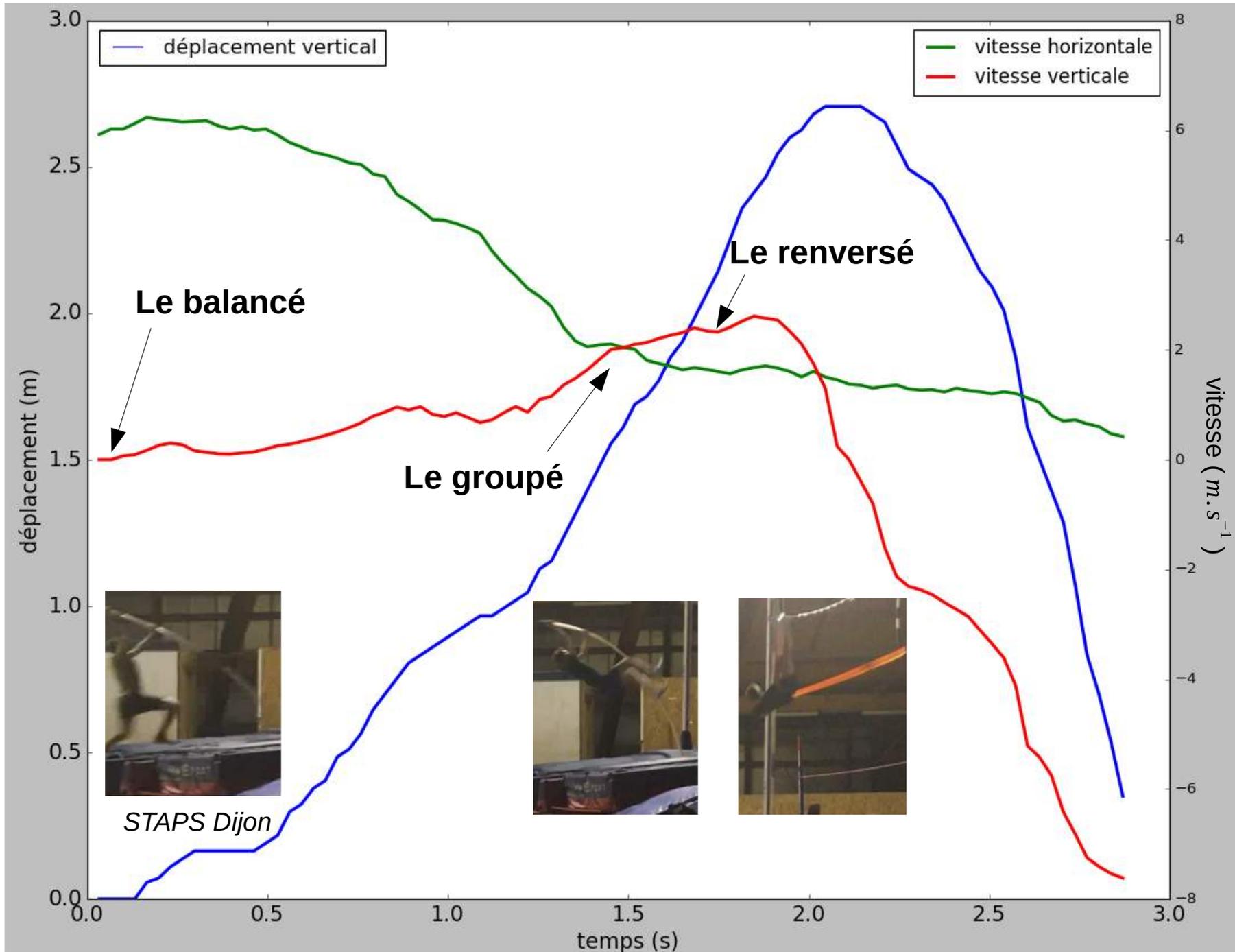
Données expériences

	Saut/Perchiste 1	Saut/Perchiste 2	Saut/Perchiste 3
Masse perche m_p (en kg)	5,0	5,0	5,0
Masse perchiste m (en kg)	80	83	77
Vitesse en fin de course v_o (m.s^{-1})	$7,6 \pm 0,1$	$6,7 \pm 0,1$	$6,3 \pm 0,1$

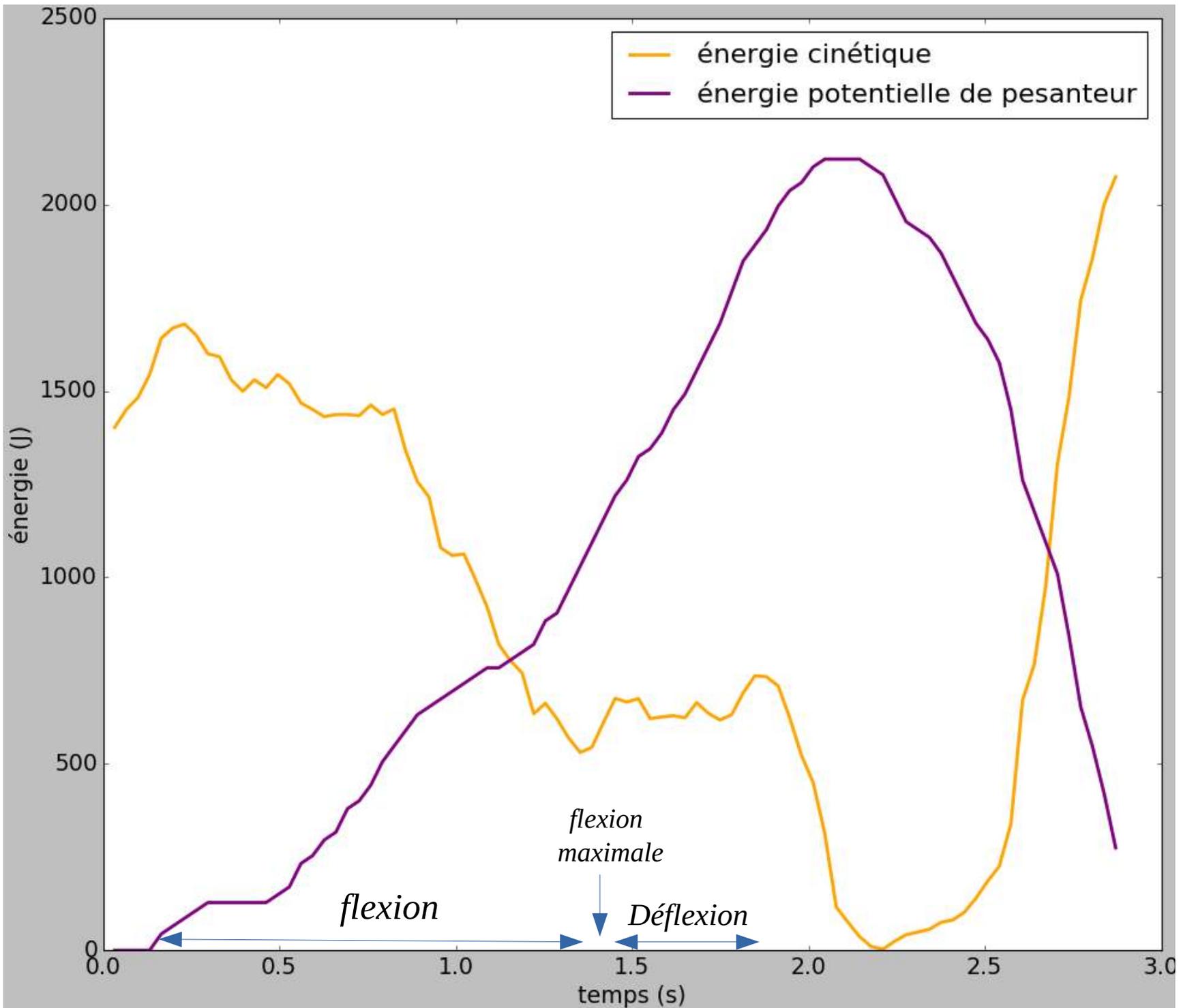
I.

1) Etude du mouvement

3 étapes fondamentales :



2) Etude énergétique



I.

3) Premières approches

- Approche naïve :

Système : {perchiste réduit à G}

En A : fin course d'élan

En B : hauteur maximale

Soumis uniquement à son poids

Application théorème énergie mécanique (TEM) : $mgh_{max} = \frac{1}{2}mv_o^2 + mgh_G$

D'où : $h_{max} = \frac{1}{2}g v_o^2 + h_G$

Centre de gravité moyen : 1,00m

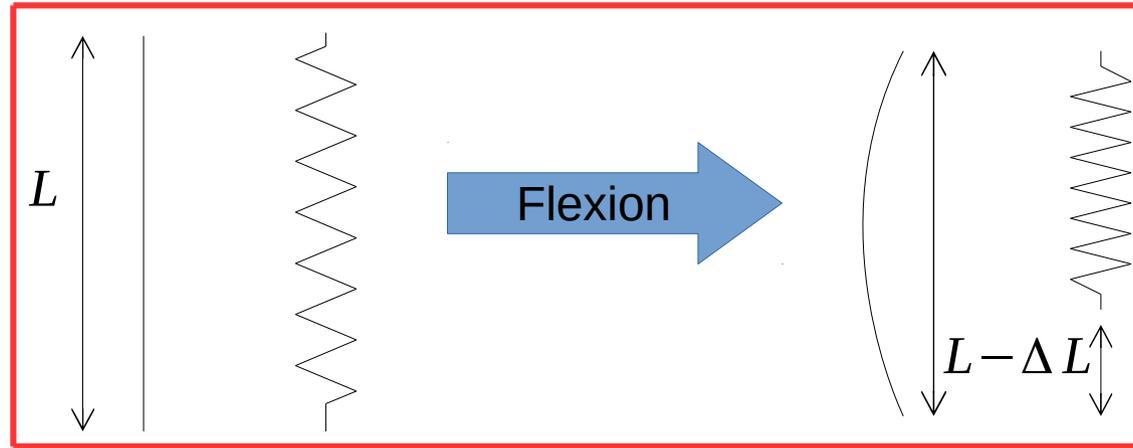
Numériquement : $h_{max} = 6,10 m$

Inconvénients :

- Incertitudes manifestes sur h_G
- Négligence de la conversion énergétique

I.

- Modélisation perche :



Hypothèses : -Energie cinétique intégralement transmise à la perche.
-Centre inertie {perchiste + perche} assimilé à G.

TEM entre la planté (A) et la flexion maximale (B) : $\frac{1}{2}(m+m_p)v_o^2 = \frac{1}{2}k \Delta L^2 + (m+m_p)gh_B$

D'où : $k = (m+m_p) \frac{(v_o^2 - 2gh_B)}{(\Delta L^2)}$

Avantage : Utilisable expérimentalement (voir II.)

II.

1) Préliminaires et applications

Hypothèses II. : - Flexions faibles et pures
 - Validité de l'élasticité linéaire

-Loi de Hooke : $\sigma = E \epsilon$

$$\underline{dx'(y) = [R - (y - y_0)] d\theta} \quad \underline{\epsilon_{xx}(y) = \frac{-(y - y_0)}{R}}$$

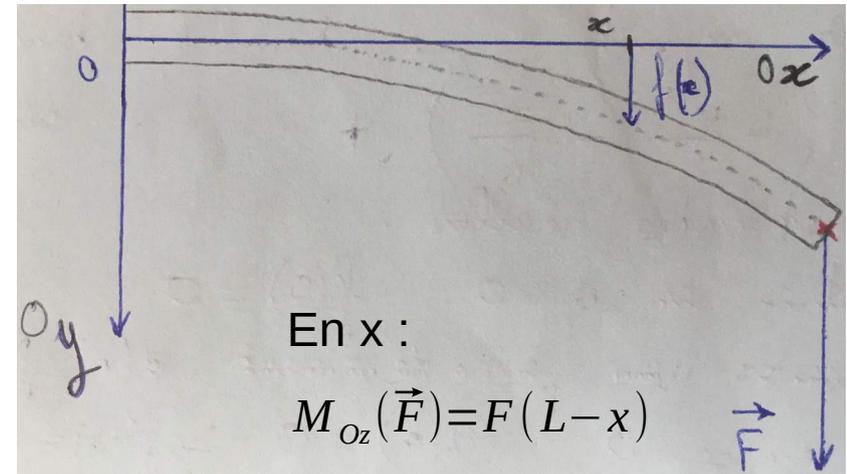
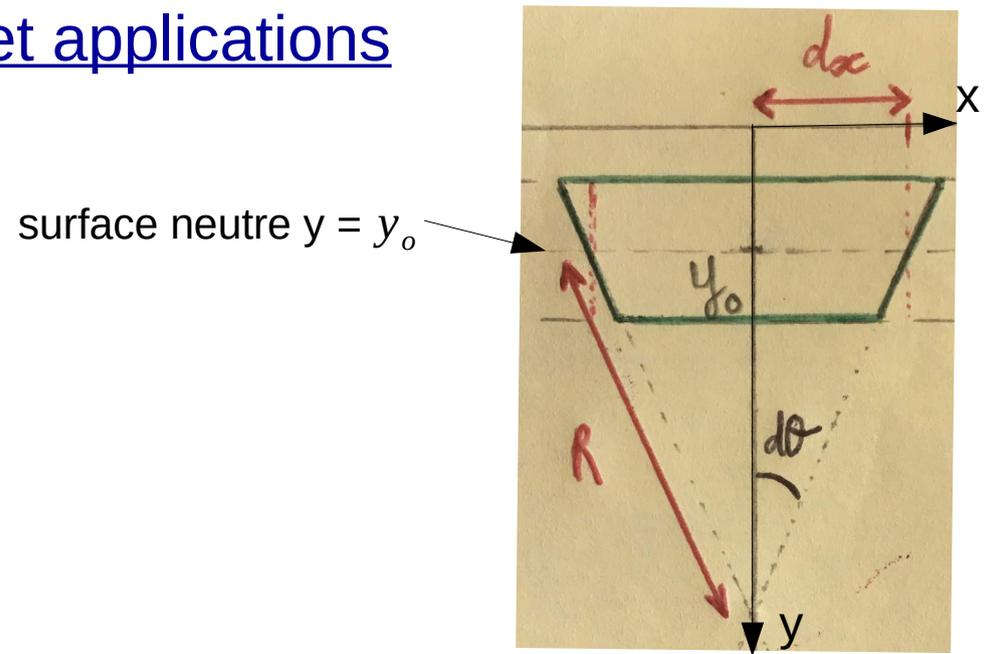
Phase flexion perche

-Lien flèche-moment fléchissant : $M_f(x) = EI_z f''(x)$

A l'équilibre : $EI_z f''(x) = F(L - x)$

-Calcul du moment d'inertie en x : $I_z = \pi \frac{l^4}{64}$

Flèche maximale de la perche à l'équilibre : $f(L) = 64 \frac{FL^3}{(3E\pi l^4)}$



II.

Analogie avec ressort : $f(L) = \Delta L$

Donc : $F = k f(L)$

Ainsi : $k = 3 E \pi \frac{l^4}{(64 L^3)}$

D'après les données : $k_{\text{théorique}} = 2123 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$

En réutilisant la formule expérimentale : $k_{\text{exp}} = (m + m_p) \frac{(v_o^2 - 2gh_b)}{(\Delta L^2)}$

	Saut/Perchiste 1	Saut/Perchiste 2	Saut/Perchiste 3
<i>vitesse initiale</i> $v_o (m \cdot s^{-1})$	$7,6 \pm 0,1$	$6,7 \pm 0,1$	$6,3 \pm 0,1$
<i>masse perchiste</i> $m (kg)$	80	83	77
<i>hauteur flexion maximale</i> (m)	$1,7 \pm 0,1$	$1,7 \pm 0,1$	$1,6 \pm 0,1$
$\Delta L (m)$	$0,94 \pm 0,06$	$0,78 \pm 0,06$	$0,67 \pm 0,06$
$k_{\text{expérimental}} (N \cdot m^{-1})$	2348 ± 173	1952 ± 224	1874 ± 253
<i>Ecart valeur théorique</i>	11,00%	8,00%	12,00%
Intervalle de confiance 95 %	[1812, 2304]		

II.

2) Quantification énergie de déformation élastique

-Flexion maximale de la perche, état d'équilibre Formule de Clapeyron $\rightarrow E_{de} = \frac{1}{2} W_{ext}$

-Contrainte à l'équilibre $\rightarrow W_{ext} = \int_{V_{perche}} \epsilon_{xx} \sigma_{xx} dV$

-Sachant que : $\epsilon_{xx}(y) = -M_f \frac{y}{EI_z}$ et $\sigma_{xx}(y) = E \epsilon_{xx}(y)$

on obtient : $E_{de} = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{M_f^2}{EI_z} \right) dx$

D'après l'expression du moment fléchissant : $E_{de} = \frac{F^2 L^3}{6 EI_z}$

Comparaison avec le saut à 5,90m de Lavillenie en 2018
($\Delta L = 2,25 \pm 0,06 m$)



Source : Youtube

	Saut 1	Saut 2	Saut 3	Lavillenie/2018
$E_{de} (kJ)$	$1,4 \pm 0,1$	$0,7 \pm 0,1$	$0,5 \pm 0,1$	$4,2 \pm 0,1$

III.

1) Vitesse à la déflexion totale

Hypothèse : Toute l'énergie emmagasinée est transmise au perchiste

Système : {perchiste + perche}

TEM entre flexion maximale (B) et déflexion totale (C) :

$$(m+m_l)gh_B + E_{de} = \frac{1}{2}(m+m_l)v_C^2 + (m+m_l)gh_C$$

Donc :

$$v_C = \sqrt{\left(2g(h_B - h_C) + 2\frac{E_{de}}{(m+m_l)}\right)}$$

	Saut/Perchiste 1		Saut/Perchiste 2		Saut/Perchiste 3	
	expérimental	théorique	expérimental	théorique	expérimental	théorique
$v_C (m \cdot s^{-1})$	$4,1 \pm 0,1$	$4,4 \pm 0,2$	$3,8 \pm 0,1$	$3,1 \pm 0,3$	$3,4 \pm 0,1$	$2,9 \pm 0,3$
Ecart	7 %		23 %		17 %	

III.

2) Coefficient de restitution et hauteur maximale

-Coefficient de restitution : $e = \frac{v_{\text{après}}}{v_{\text{avant}}}$

$$e_{\text{théorique}} = \frac{v_{\text{cthéorique}}}{v_o}$$

$$e_{\text{expérimental}} = \frac{v_{\text{cexperimental}}}{v_o}$$

	Saut/Perchiste 1		Saut/Perchiste 2		Saut/Perchiste 3	
	expérimental	théorique	expérimental	théorique	expérimental	théorique
e	$0,54 \pm 0,01$	$0,57 \pm 0,02$	$0,53 \pm 0,01$	$0,49 \pm 0,04$	$0,53 \pm 0,01$	$0,48 \pm 0,04$
Validation ?	oui		oui		non	

On démontre : $z(t) = \frac{-g}{2}t^2 + v_C \sin(\theta)t + L$

Hypothèse : $z_{max} = H_{max}$

Alors : $H_{max} = \frac{v_C^2 (\sin(\theta))^2}{2g} + L$

Application au saut de Lavillenie

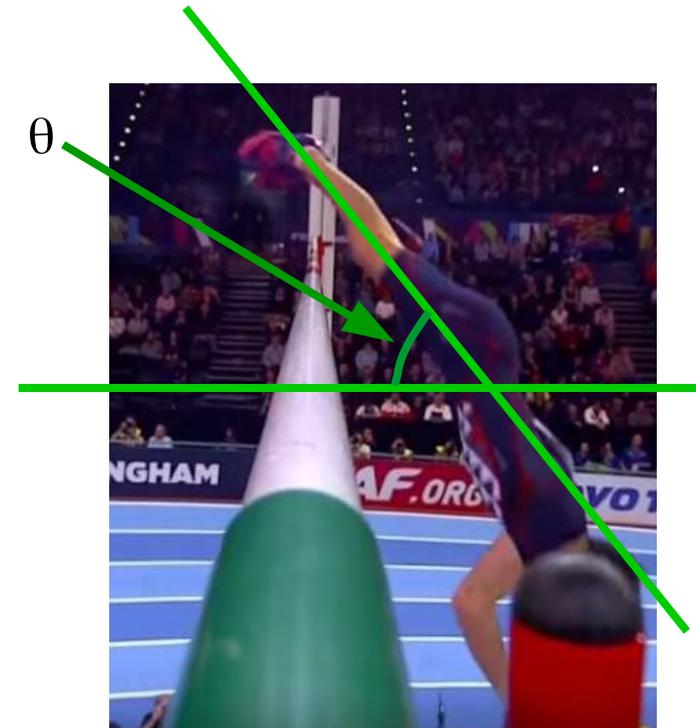
Mesure : $\Delta L = 2,25 \pm 0,06 \text{ m}$

Données (Source : Le Monde) : $m = 79 \text{ kg}$; $m_p = 5,0 \text{ kg}$; $L = 4,7 \text{ m}$

On accède à la vitesse en C : $v_C = 6,8 \pm 0,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

D'où : $H_{maxth} = 6,2 \pm 0,1 \text{ m}$

Or $H_{maxexp} = 5,90 \pm 0,23 \pm 0,01 \text{ m}$

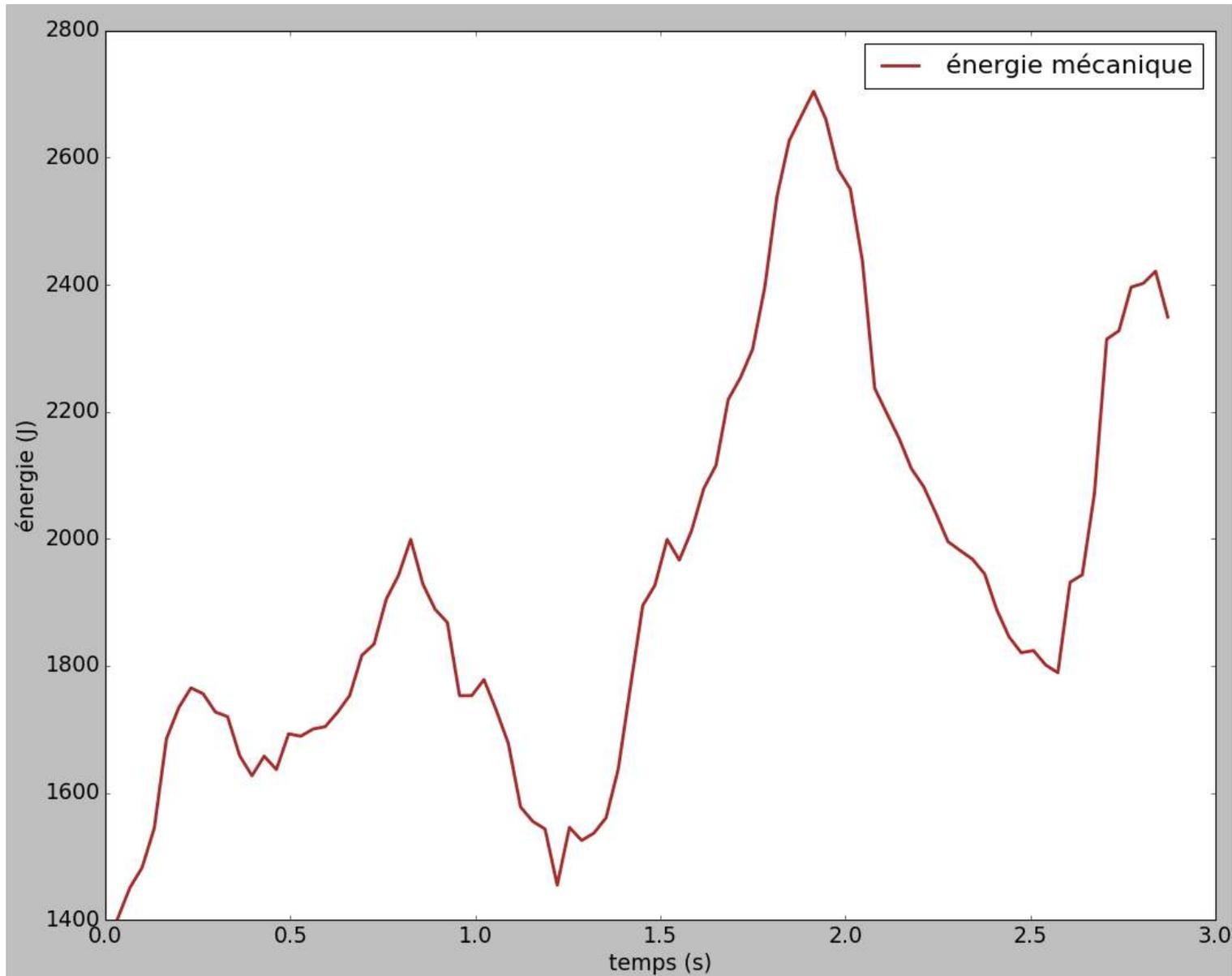


Source : Youtube

III.

3) Conclusion

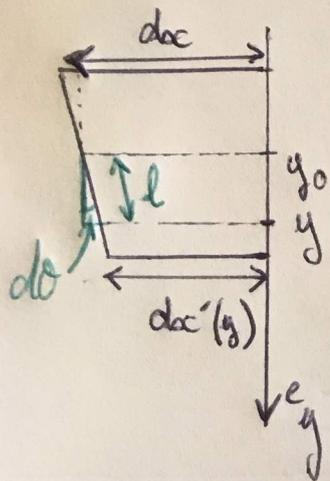
- Théorie élastique semble valider la théorie mécanique
- Résultats théoriques vraisemblables
- Hypothèses peu réalistes
- Travail musculaire significatif



Annexes

Démonstrations II.

Démonstration expression dx' :



• Dans le cadre de l'approximation des flexions faibles : $d\theta \ll 1$.

$$\text{Or } R = R(dx(y_0)) = R(dx'(y_0)).$$

$$\text{Donc } R(dx'(y)) = R - l.$$

$$\bullet \quad l \approx y - y_0.$$

$$\text{Donc } R(dx'(y)) = R - (y - y_0)$$

$$\text{Donc } dx'(y) = R(dx'(y)) d\theta.$$

D'où $dx'(y) = [R - (y - y_0)] d\theta$

Démonstration expression $\epsilon_{xx}(y)$:

Par définition de l'allongement relatif : $\epsilon_{xx}(y) = \frac{dx'(y) - dx(y_0)}{dx'(y)}$

$$(dx(y_0) = dx(y) \quad \forall y).$$

$$\text{Donc } \epsilon_{xx}(y) = \frac{[R - (y - y_0)] d\theta - R d\theta}{R d\theta} = \frac{[R - y - y_0] - R}{R}$$

D'où $\epsilon_{xx}(y) = -\frac{y - y_0}{R}$

Démonstration moment fléchissant:

- Le moment de la force créant la contrainte sur cette surface, par rapport à l'axe O_z plongeant sur le pivot de la surface neutre a pour expression:

$$d\vec{m}_f(y) = (y - y_0) \vec{e}_y \wedge \sigma_{xx}(y) dy dz \vec{e}_x$$

D'où
$$d\vec{m}_f(y) = -\sigma_{xx}(y) (y - y_0) dy dz \vec{e}_z$$

- En intégrant sur la section circulaire en x \mathcal{C}_x :

$$M_f(x) = \int_{\mathcal{C}_x} d\vec{m}_f(y) \cdot \vec{e}_z = \int_{\mathcal{C}_x} -\sigma_{xx}(y) (y - y_0) dy dz$$

$$= \int_{\mathcal{C}_x} \frac{E(y - y_0)}{R} (y - y_0) dy dz \quad \text{D'où } \vec{M}_f(x) = \frac{EI_3(x)}{R} \vec{e}_z$$

$$\text{où } I_3(x) = \int_{\mathcal{C}_x} (y - y_0)^2 dy dz$$

Démonstration lien flèche - moment fléchissant :

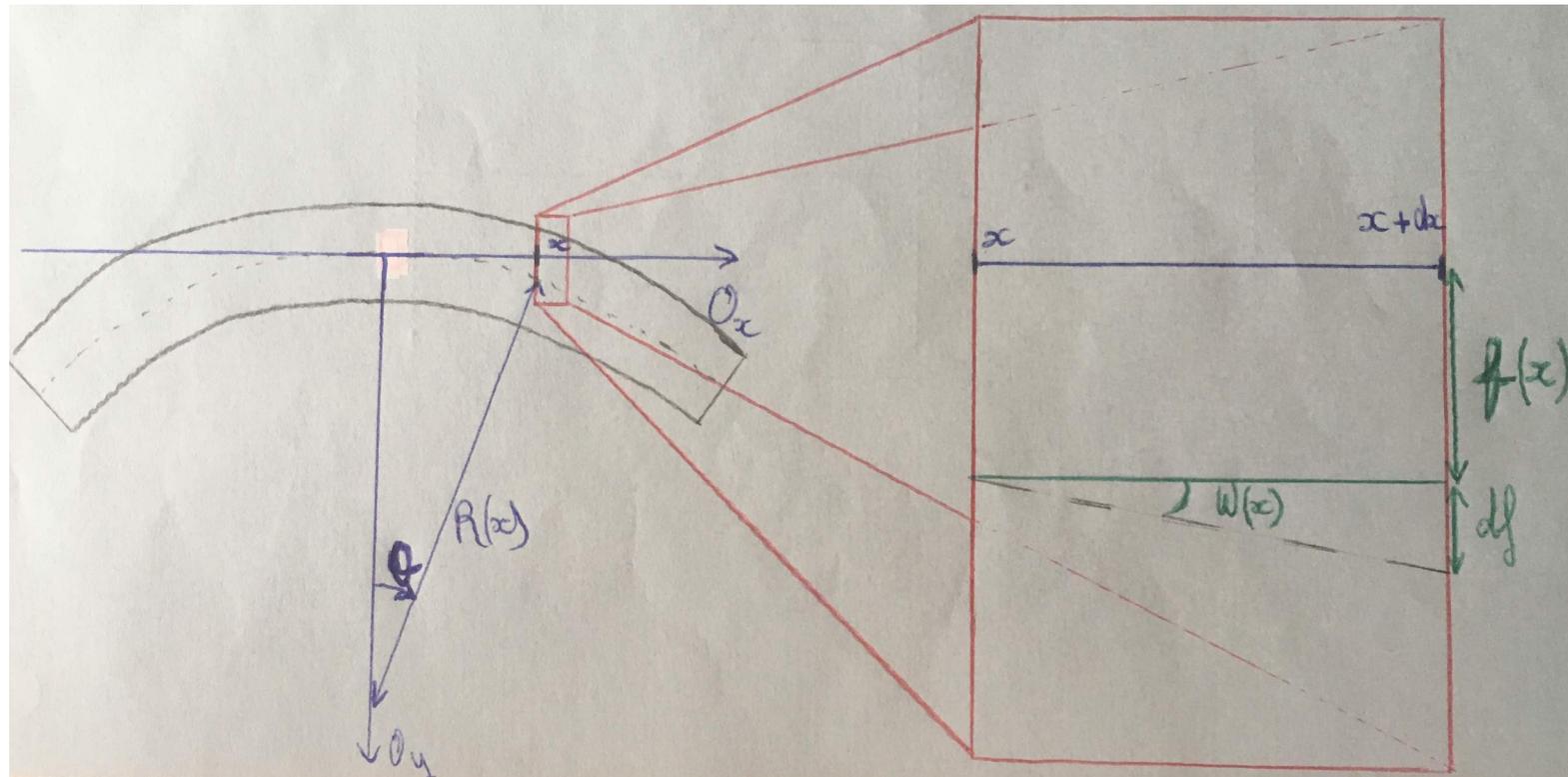
- D'après figure: $\tan(w(x)) \approx w(x) \approx \frac{df}{abc}$.
↑
angle infiniment petit.

Ainsi: $w(x) = f'(x)$.

- Par la même approximation: $RdW = abc$

Donc $R = \frac{abc}{dW} \Rightarrow \frac{dW}{abc} = \frac{1}{R}$. Donc $w'(x) = \frac{1}{R(x)}$.

- Ainsi: $f''(x) = \frac{1}{R(x)} = \frac{Mf(x)}{EI_z(x)}$. D'où $\vec{M}_f(x) = EI_z(x) f''(x) \vec{e}_z$



Démonstration expression du moment d'inertie

$$I_z = \int_{\mathcal{C}_x} (y - y_0)^2 dy dz = \int_{\mathcal{C}_x} y^2 dy dz.$$

ici $y_0 = 0$

Or, $\mathcal{C}_x = \left\{ (y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right] \text{ et } z \in \left[-\sqrt{\frac{l^2}{4} - y^2}, \sqrt{\frac{l^2}{4} - y^2}\right] \right\}$

Donc
$$I_z = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(\int_{z = -\sqrt{\frac{l^2}{4} - y^2}}^{z = \sqrt{\frac{l^2}{4} - y^2}} y^2 dz \right) dy = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} 2y^2 \sqrt{\frac{l^2}{4} - y^2} dy$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \left(\frac{l}{2}\right)^4 \sin^2(t) \cos^2(t) dt = \boxed{\frac{l^4 \pi}{64}}$$

Démonstration expression de l'énergie de déformation élastique (cas de la perche).

$$W_{\text{ext}} = \int_{V_{\text{perche}}} \epsilon_{xx} \sigma_{xx} dV. \quad \text{Sachant que } \epsilon_{xx}(y) = -\frac{M_f(x)y}{EI_z} \text{ et}$$

que $\sigma_{xx}(y) = E \epsilon_{xx}(y)$: $W_{\text{ext}} = \int_0^L \left(\int_{b_{xc}} \frac{M_f(x)^2 y^2}{EI_z^2} dy dz \right) dx$

$$= \int_0^L \frac{M_f(x)^2}{EI_z^2} \underbrace{\left(\int_{b_{xc}} y^2 dy dz \right)}_{I_z} dx$$

D'où

$$W_{\text{ext}} = \int_0^L \frac{M_f(x)^2}{EI_z} dx$$

Bibliographie

Centre d'entrainement au saut à la perche (Dijon) :

Mme Vigourd : entraîneur au saut à la perche

Bibliographie :

- Julien Frère _Thèse : Contribution de l'analyse électromyographique des membres supérieurs pour l'entraînement au saut à la perche.
- Julien Frère _Travail : Evaluations des forces musculaires isocinétiques de l'épaule dominante et non dominante, chez les perchistes experts et débutants.
- Florence Elias _Notes_de_cours : Elasticité.
- P.Vaslin et M.Cid : Les facteurs de la performance en saut à la perche dans la littérature scientifique.