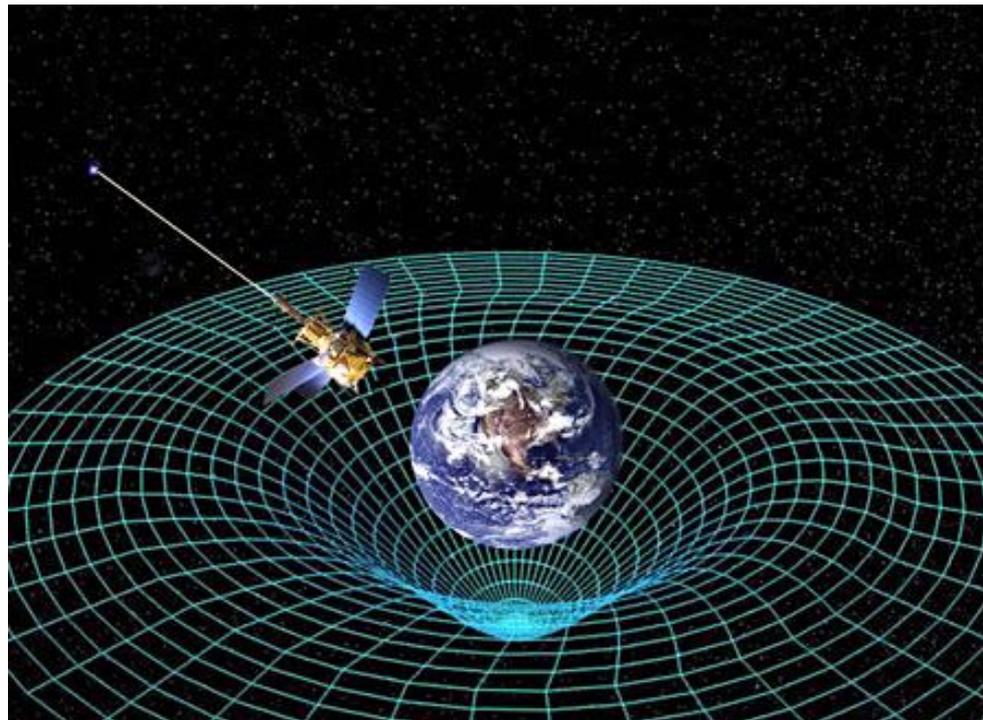


La trajectoire de la lumière dans l'espace-temps

Comment illustrer concrètement la trajectoire de la lumière ?



RAMOS
Elisa

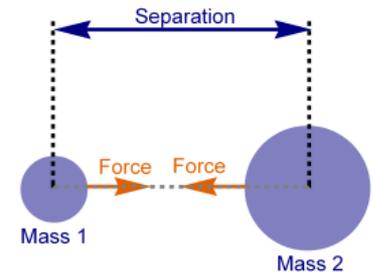
Sommaire

- De la théorie de Newton à celle d'Einstein.
- Courbure de l'espace-temps.
- Expériences.
- Résultats et considération de la profondeur .
- Conclusion.

De la théorie de Newton à celle d'Einstein.

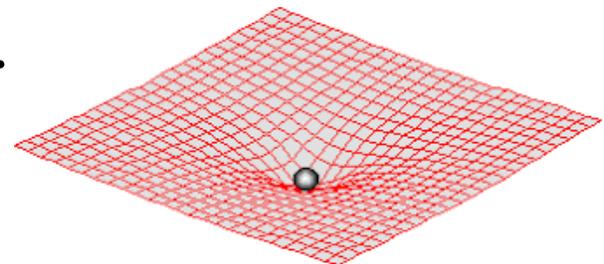
- ***Théorie de Newton :***

La Terre tourne autour du Soleil car celui-ci exerce une force gravitationnelle sur notre planète.



- ***Théorie d'Einstein :***

C'est une perturbation de l'espace-temps introduite par la masse du Soleil qui est à l'origine du mouvement de la Terre.



Courbure de l'espace-temps

- *Equation de la relativité générale :*

Déformation de l'espace-temps

Mesure des distances

Constante d'Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Constante scalaire

Constante cosmologique

Répartition de masse et d'énergie dans l'espace-temps

The diagram shows the Einstein field equations with several labels and arrows pointing to specific terms. 'Déformation de l'espace-temps' points to the Ricci tensor $R_{\mu\nu}$. 'Mesure des distances' points to the metric tensor $g_{\mu\nu}$. 'Constante d'Einstein' points to the constant $8\pi G/c^4$. 'Constante scalaire' points to the scalar curvature R . 'Constante cosmologique' points to the cosmological constant Λ . 'Répartition de masse et d'énergie dans l'espace-temps' points to the stress-energy tensor $T_{\mu\nu}$.

Courbure de l'espace-temps

- Etude équation Einstein

Mesure de la courbure locale de l'espace-temps = Mesure du contenu de matière-énergie par unité

$$\mathbf{G} = \frac{8\pi G_N}{c^4} \mathbf{T}$$

Courbure locale \swarrow \nwarrow Matière-énergie

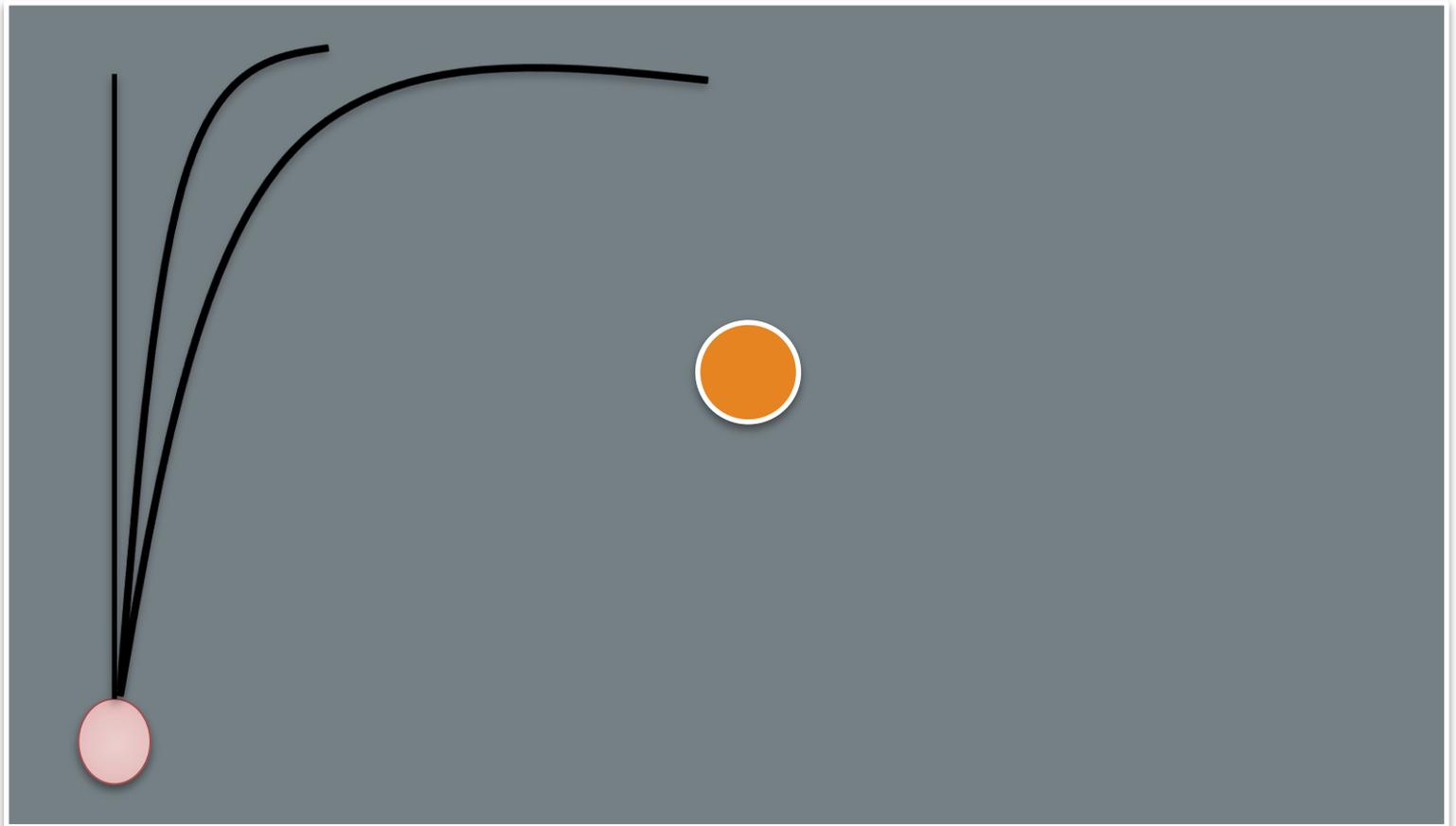
Courbure de l'espace-temps

$$\begin{array}{c} 1/m^2 \\ \downarrow \\ \text{Courbure} = \frac{8\pi G}{c^4} \times \frac{\text{Energie}}{\text{Volume}} = \frac{8\pi G}{c^2} \times \frac{\text{Masse}}{\text{Volume}} \end{array}$$

Expérimentation

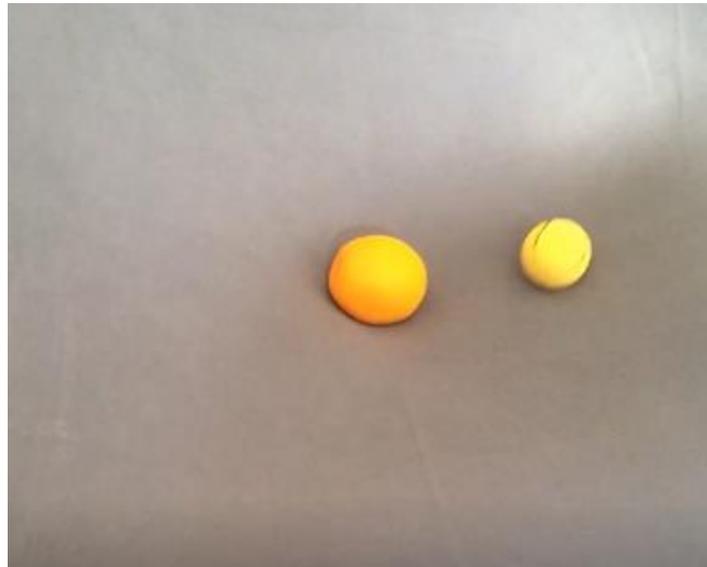


Expérimentation



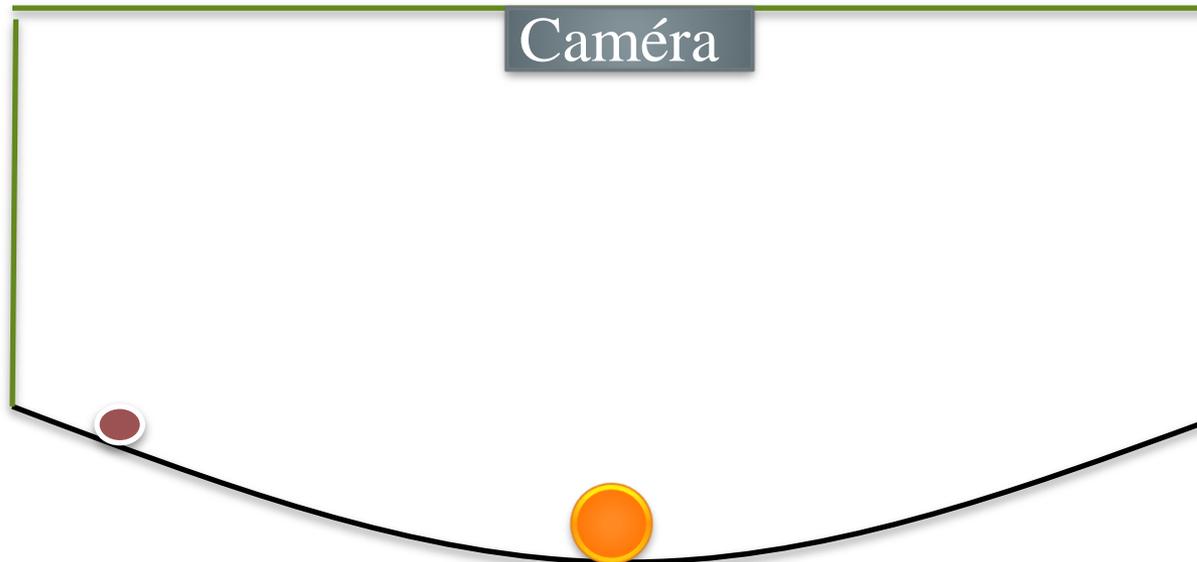
Expérimentation

- Première expérience
- - Problème rencontré : paramètre de l'inclinaison de la vidéo à prendre en compte.
- - Solution : filmer l'expérience de haut de manière fixe.



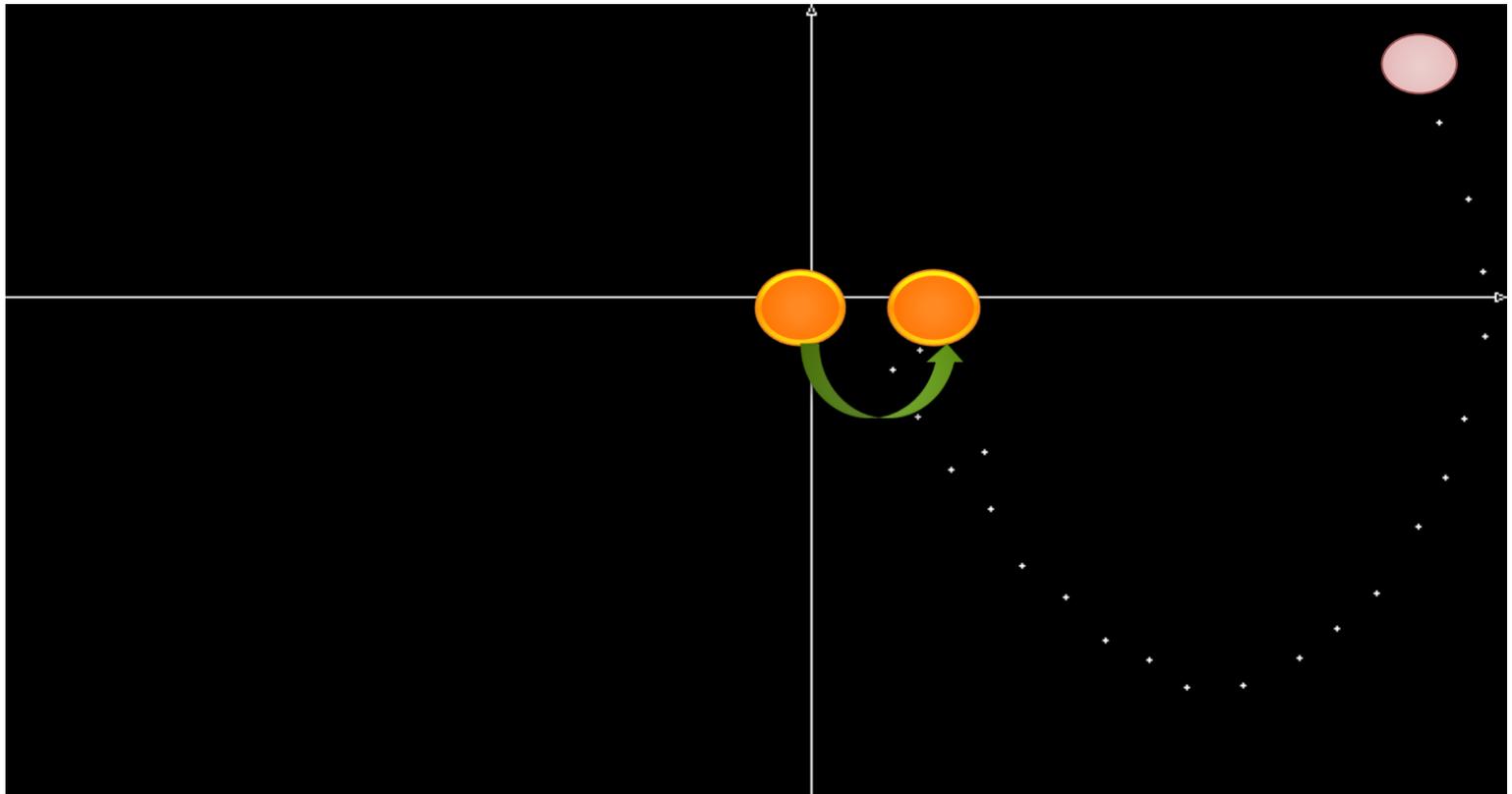
Expérimentation

- Deuxième expérience
 - Masse petite bille : $m_1 = 6,8 \text{ g}$
 - Masse grosse bille : $m_2 = 18,8 \text{ g}$



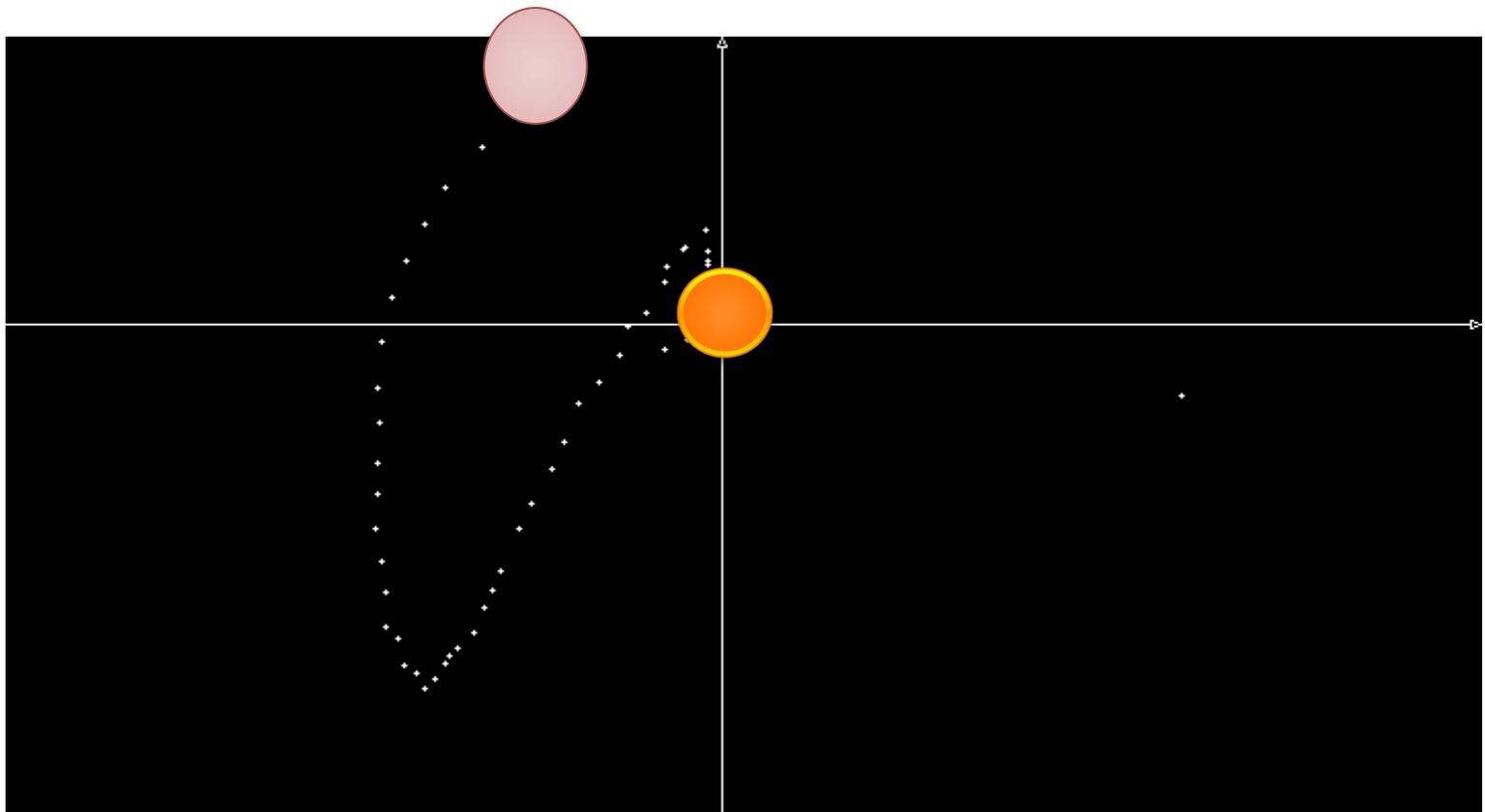
Expérimentation

- m_1 au centre et m_1 en mouvement



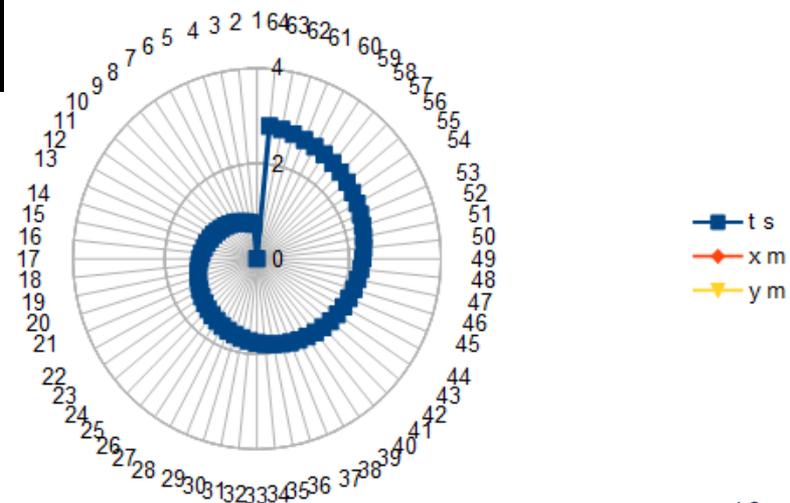
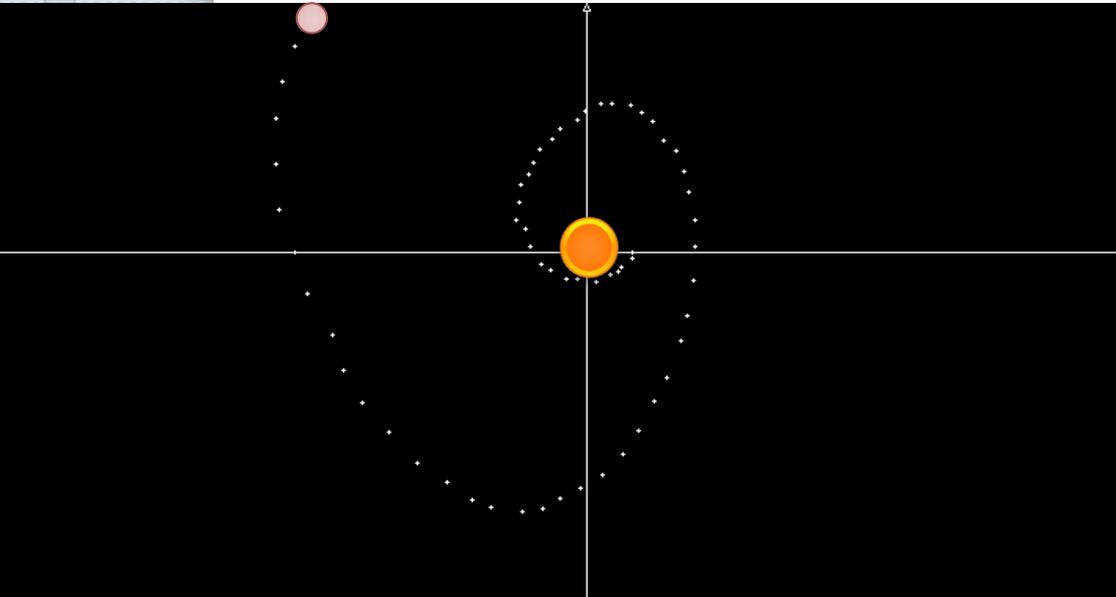
Expérimentation

- m_1 au centre et m_2 en mouvement



Expérimentation

- m_2 au centre et mouvement de m_1

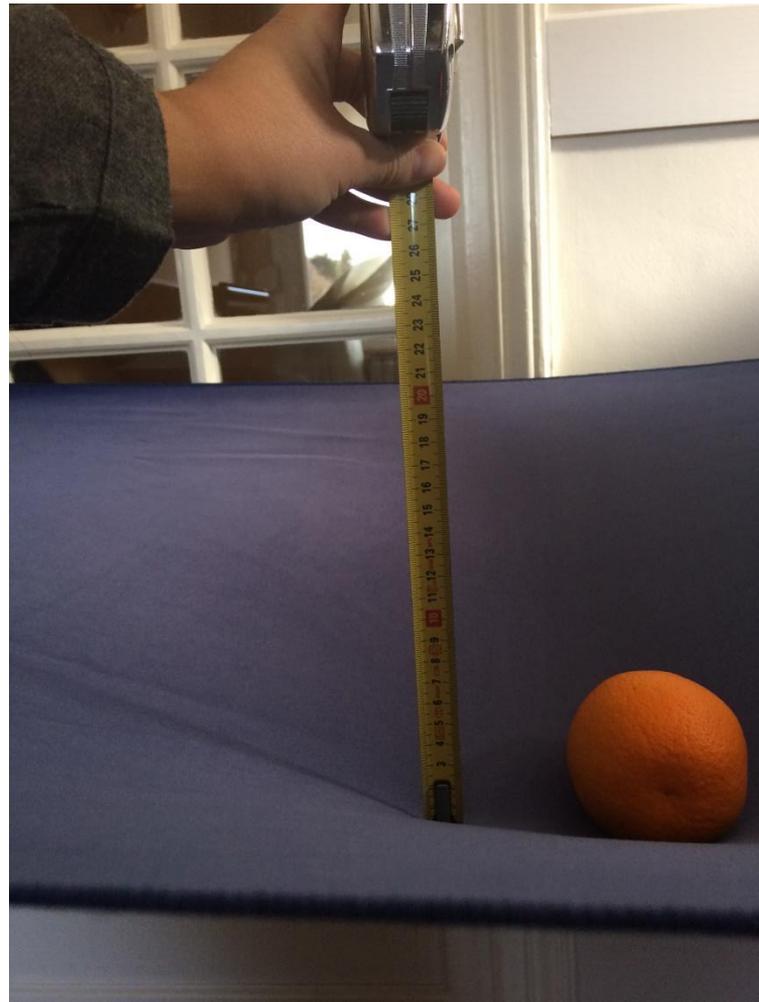


Résultats de l'expérience

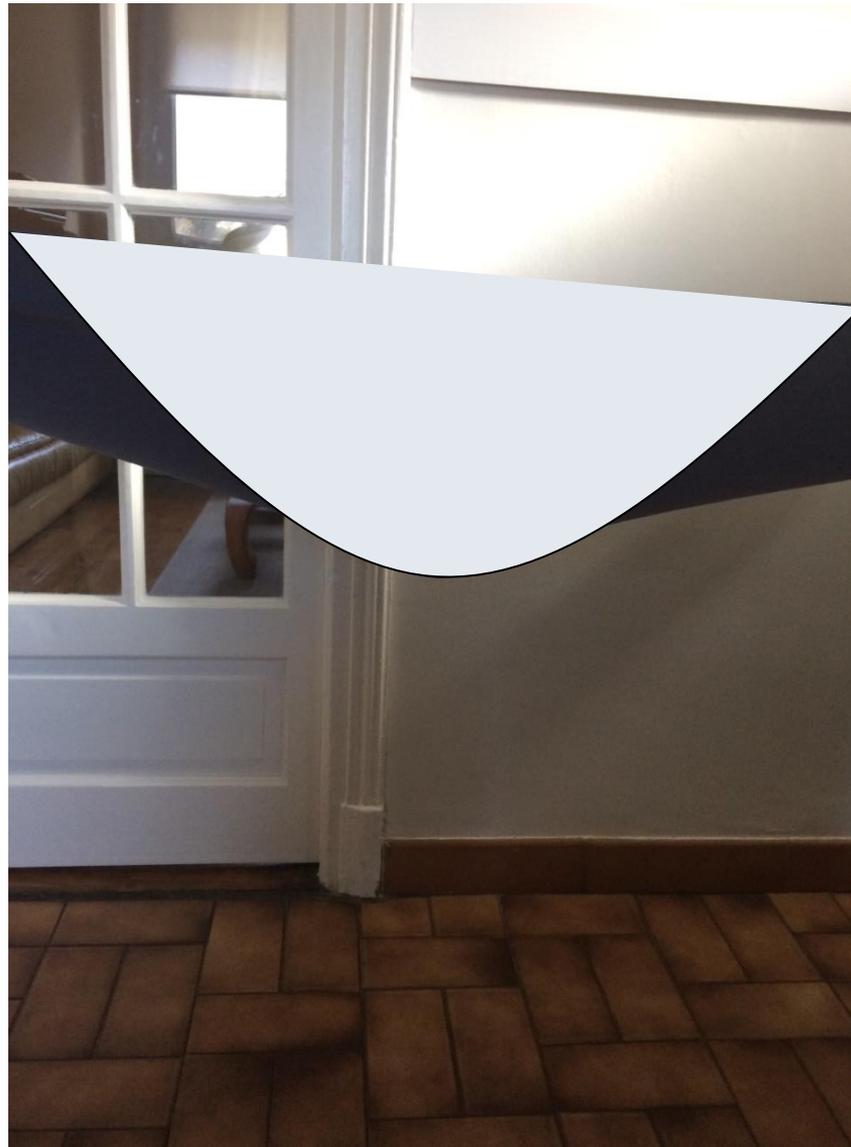
- Trajectoire non rectiligne
- Dépend de la masse placée au centre
- Vérifié avec un rapport de masse de 0,36
- rapport de masse Soleil-Terre : $r = 3 \times 10^6$
- Bille : courbure = $3,34 \times 10^{-27} \text{ m}^{-2}$
- Relativité générale : courbure = $2,61 \times 10^{-14} \text{ m}^{-2}$

Résultats de l'expérience

- Considération de la profondeur de la toile



Résultats de l'expérience



Résultats de l'expérience

- Référentiel héliocentrique supposé galiléen

- PFD sur la Terre:

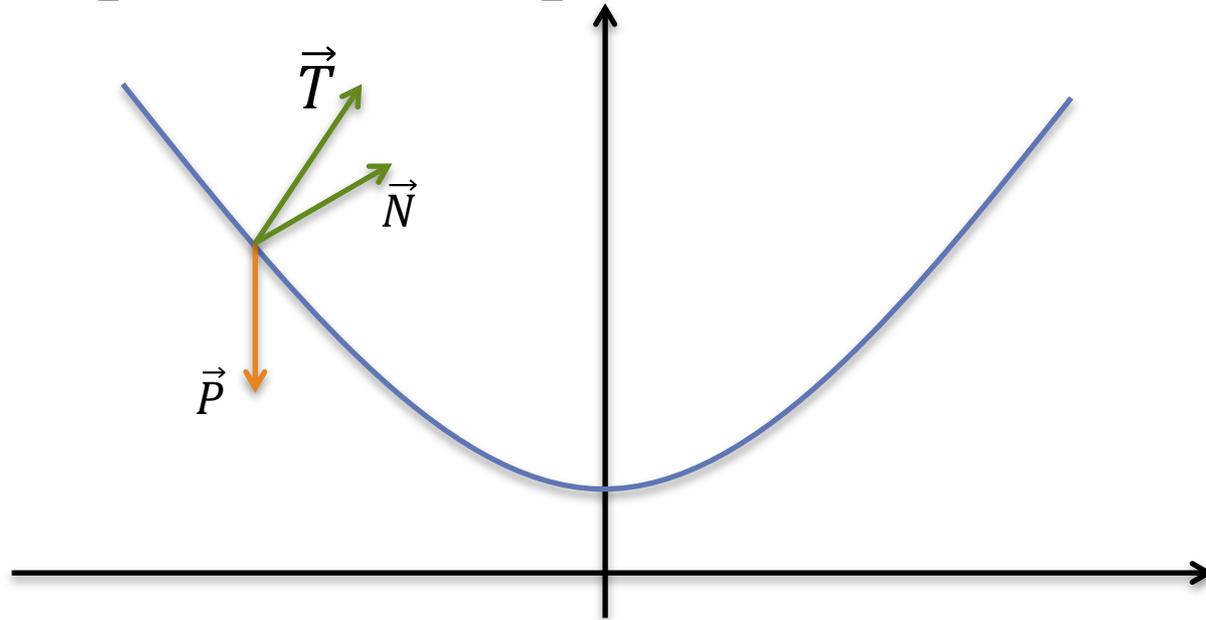
- $$m \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{-K}{r^2} \vec{e}_r - f(\dot{\theta}, \theta) \vec{e}_\theta$$

- Pour une bille:

- $$m \frac{d^2 r}{dt^2} = \vec{P} + \vec{R} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T}$$

Résultats de l'expérience

- Equation de la profondeur:



$$z = a(x^2 + y^2) = ar^2$$

$$\dot{z} = 2ar\dot{r}$$

$$\ddot{z} = 2a\dot{r}^2 + 2ar\ddot{r}$$

Résultats de l'expérience

- Coordonnées polaires:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = (\ddot{r} + r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r - (2\dot{r}\dot{\theta} + \ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$$

PFD:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -Nr \quad (1)$$

$$m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = -C \quad (2)$$

$$m(2a\dot{r}^2 + 2ar\ddot{r}) = -mg \quad (3)$$

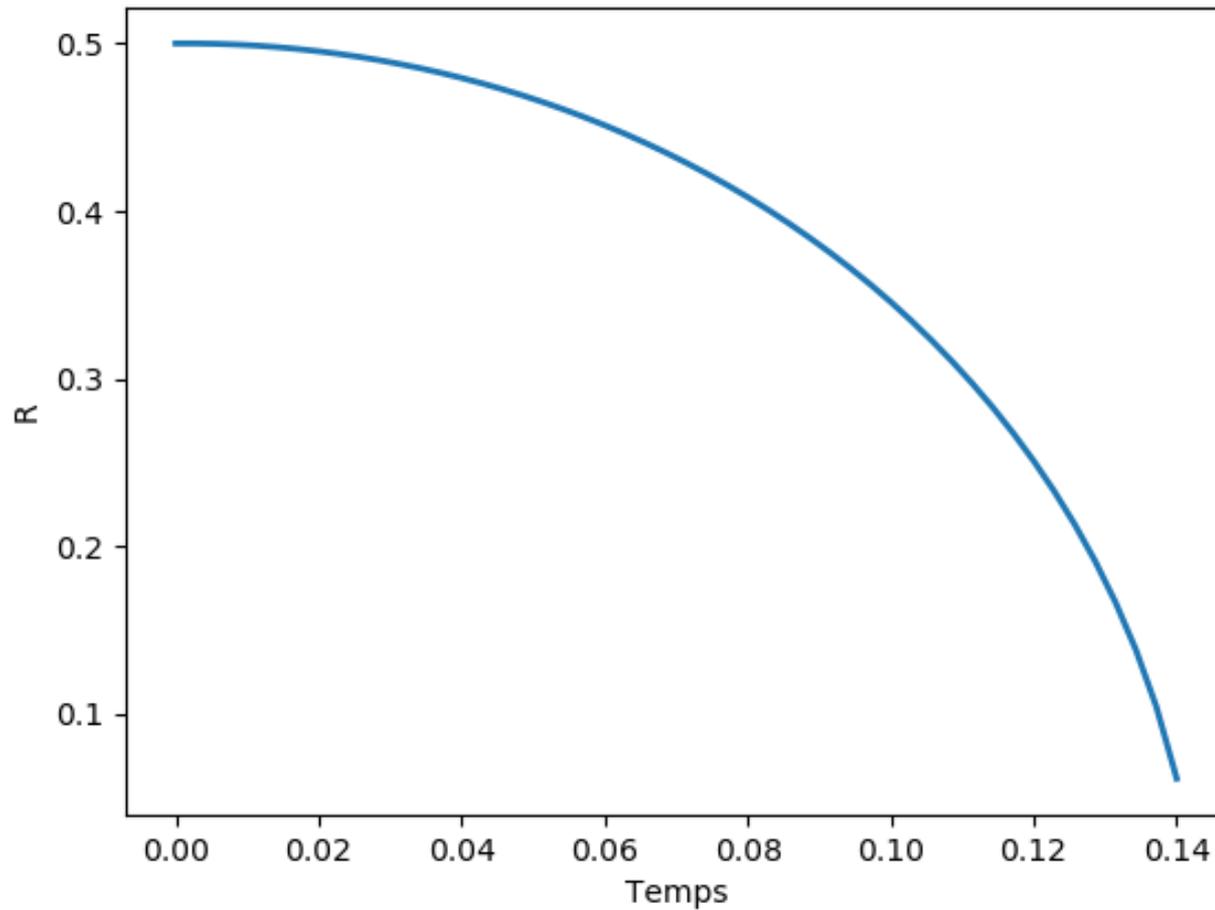
D'où: $\ddot{\theta} = -\frac{1}{r} \left(\frac{C}{m} + 2\dot{r}\dot{\theta} \right)$

$$\ddot{r} = -\frac{1}{r} \left(\frac{g}{2a} + \dot{r}^2 \right)$$

Résultats de l'expérience

```
from math import *
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from pylab import *
#video 4
def equationR():
    g = 9.81
    a= 0.36 #valeur a determiner
    N =50
    R = N*[0]
    Rpoint = N*[0]
    R[0]= 0.5
    Rpoint[0] = 0
    Tmin= 0
    Tmax=0.14
    h = (Tmax-Tmin)/(N-1)
    for i in range (0, N-1):
        R[i+1]=R[i]+h*Rpoint[i]
        Rpoint[i+1]=Rpoint[i]- (h/R[i])*((g/(2*a))+Rpoint[i]**2)
    return(R)
```

Résultats de l'expérience



Conclusion

- Obtention d'une trajectoire non rectiligne
- Considération de la profondeur

Annexe

```
def equationTeta():
    c=3.0e8
    m=6.0e24
    N=50
    Teta= N*[0]
    Tetapoint = N*[0]
    Teta[0]= 1
    Tetapoint[0]= 0
    Tmin=0
    Tmax=2
    R=equationR()
    Rpoint = N*[0]
    h = (Tmax-Tmin)/(N-1)
    Rpoint[0]=(R[1]-R[0])/h
    for k in range (2,N-1):
        Rpoint[k] = (R[k+1]-R[k-2])/(2*h)
    Rpoint[N-1] = (R[N-1]-R[N-2])/h
    for i in range (0,N-1):
        Teta[i+1] = Teta[i] + h*Tetapoint[i]
        Tetapoint[i+1] = Tetapoint[i] + h * (((-1)/R[i])*(c/m + 2*Rpoint[i]*Tetapoint[i]))
    return(Teta)

Tmin= 0
Tmax= 2
N=50
T = linspace ( Tmin , Tmax , N )
plt.plot(T,equationR(),linewidth=2)
#plt.plot ( T,equationTeta(),"g",linewidth=1)
plt.xlabel('Temps')
plt.ylabel('R')
#plt.axis([xmin,xmax,ymin,ymax])
plt.show()
```

Annexe

- analogie avec la rigidité des poutres en flexion définie en résistance des matériaux

$$\mathbf{G} = \frac{8\pi G_N}{c^4} \mathbf{T}$$

- Ondes gravitationnelles prédites par Einstein avec une déformation infinitésimale
- Trait de caractère d'une rigidité très grande de l'espace-temps

Annexe

- Statique : relation reliant la courbure à la déformation de la poutre:

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

- Facteur de proportionnalité entre l'énergie et la courbure est relié à la rigidité k de la poutre :

$$\frac{1}{R^2} = \frac{2U}{EIL} = \frac{kU}{(EI)^2}$$

- U : énergie de flexion élastique (J)
- E : module d'élasticité (Mpa)
- I : inertie de la section (m^4)

Bibliographie

- [1] Wikipédia : Relativité Générale :
[https://fr.wikipedia.org/wiki/Relativité_générale](https://fr.wikipedia.org/wiki/Relativit%C3%A9_g%C3%A9n%C3%A9rale)
- [2] Christophe GALFARD : L'univers à portée de main
- [3] <https://hal.archives-ouvertes.fr/cel-00092961/document>
- [4] <https://www.astronomes.com/la-fin-des-etoiles-massives/relativite-generale/>