

La morphogénèse modélisée par les structures de Turing.

Les formes riches et variées que peut prendre le vivant ne cessent de nous éblouir. On s'intéresse à l'apparition des structures et motifs du vivant, et donc aux équations de réaction-diffusion permettant de modéliser la morphogénèse.

La morphogénèse implique l'interaction entre plusieurs molécules et peut être assimilée à un phénomène de diffusion, perturbant l'équilibre au sein d'un milieu homogène.

Ce TIPE fait l'objet d'un travail de groupe.

Liste des membres du groupe :

- DELIGAND François

Positionnement thématique (phase 2)

INFORMATIQUE (Informatique pratique), MATHÉMATIQUES (Analyse), INFORMATIQUE (Informatique Théorique).

Mots-clés (phase 2)

Mots-Clés (en français)	Mots-Clés (en anglais)
<i>Morphogénèse</i>	<i>Morphogenesis</i>
<i>Équations aux dérivées partielles</i>	<i>Partial derivative equations</i>
<i>Motifs</i>	<i>Patterns</i>
<i>Système de réaction-diffusion</i>	<i>Reaction-diffusion system</i>
<i>Symétries</i>	<i>Symmetries</i>

Bibliographie commentée

La morphogénèse détermine l'expression des gènes du développement, et donc les formes et motifs du vivant. Les différents aspects de ce domaine scientifique, étudié depuis l'Antiquité, ne sont pas encore tous connus. On peut notamment constater que les mathématiques jouent un rôle important, comme le montre D'Arcy Thompson (1860-1948), considéré comme le premier biomathématicien, en montrant par exemple que la suite de Fibonacci est impliquée dans la phyllotaxie.

En 1952, Alan Turing publie un article dans lequel il propose un modèle mathématique permettant de traduire la formation de motifs [1], désormais une référence pour toute étude de ce phénomène. Ce modèle est aussi utilisé dans d'autres domaines tels que la dynamique des populations, la géologie ou les réseaux de neurones. Ce n'est qu'en 1990 qu'une structure de Turing sera mise en évidence expérimentalement par Patrick de Kepper [2].

Le problème est de savoir comment une entité totalement homogène peut se transformer en un organisme structuré. En particulier Alan Turing s'est demandé comment un embryon sphérique pouvait évoluer en un tel organisme [2]. Mathématiquement, il s'agit de savoir comment de

l'instabilité peut apparaître dans un système homogène a priori stable.

Le modèle de Turing se base sur les équations de réaction-diffusion qui traduisent l'interaction entre deux morphogènes. Ces derniers réagissent chimiquement localement et se diffusent différemment, ce qui peut conduire à une brisure de symétrie et donc à la formation de motifs périodiques en fonction de la géométrie de l'espace. Turing explique ainsi par une différence de géométrie la différence entre les taches du corps et de la queue d'un léopard [3], ce que reprend J.D.Murray dans les années 1980 en détaillant le modèle mathématique proposé par Turing [4].

Quelques exemples tels que l'équation de la chaleur, l'équation KPP (Kolmogorov-Petrovsky-Piskounov), ou l'équation de Fisher permettent de comprendre sur des cas simplifiés les équations de réaction-diffusion. Pour étudier ce type d'équation, il faut se donner des conditions aux limites et des conditions initiales, s'intéresser aux équilibres de la réaction et à leur stabilité, et résoudre le système d'équations aux dérivées partielles [5] [6]. On peut ensuite s'intéresser à l'étude des symétries du résultat [7].

Enfin, pour modéliser algorithmiquement ce phénomène, il est possible de discrétiser le problème et de résoudre le système d'équations à l'aide de la méthode d'Euler [8].

Problématique retenue

Comment modéliser algorithmiquement les structures de Turing et comparer les motifs ainsi créés ?

Objectifs du TIPE

Les objectifs de ce TIPE sont :

- Étude d'un cas simple d'équation de réaction-diffusion (équation de la chaleur).
- Créer un algorithme capable de résoudre un système de réaction-diffusion (résoudre le système d'équations aux dérivées partielles).
- En obtenir une représentation (motifs).
- Analyser ces résultats en se basant sur l'étude des symétries et des invariances.

Abstract

After having identified that the mathematics' model proposed by Alan Turing as a reaction-diffusion system, I first studied a simple case of such equation (the heat equation in 2D) in order to understand this phenomenon. I created a simulation which enables to visualise its evolution.

Then, called out by the symmetry that several models from the reaction-diffusion equation present, I wondered what requirements can enable to define a symmetry. To this end I based myself on simple cases. Thus, I created a symmetry's scale to compare different models more complex.

Références bibliographiques (phase 2)

[1] A.M.TURING : Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences, «The Chemical Basis of Morphogenesis» : *Vol.237, No. 641. (14 août 1952), p. 37-72*, <http://www.dna.caltech.edu/courses/cs191/paperscs191/turing.pdf>, consulté le 9 octobre 2017.

[2] <https://www.lptl.jussieu.fr/user/lesne/Turing-preprint.pdf>, consulté le 2 octobre 2017.

[3] <https://complexe.jimdo.com/les-%C3%A9quations-de-turing/pr%C3%A9sentation-de-la-morphog%C3%A9n%C3%A8se/>, consulté le 13 novembre 2017.

- [4] <http://www.lmpt.univ-tours.fr/~licois/Vulgarisation/FeteDeLaScience/murray/index.html>, consulté le 13 novembre 2017.
- [5] http://culturemath.ens.fr/maths/pdf/analyse/vidiani_motifs_pelage_animaux.pdf, consulté le 20 novembre 2017.
- [6] <http://math.univ-lyon1.fr/~pujo/TURING-IXXI.pdf>, consulté le 20 novembre 2017.
- [7] <http://images.math.cnrs.fr/Les-mathematiques-de-la.html>, consulté le 16 octobre 2017.
- [8] http://python-prepa.github.io/edp_chaleur.html, consulté le 11 décembre 2017.

DOT

- [1] *Identification du modèle mathématique comme étant celui d'équations de réaction-diffusion.*
- [2] *Étude d'un cas simplifié d'une équation de réaction-diffusion afin de comprendre le modèle proposé par Turing.*
- [3] *Compréhension du modèle proposé par Turing.*
- [4] *Identification de symétrie dans les modèles issus de la morphogenèse modélisée par les structures de Turing.*
- [5] *Détermination de critères pertinents pouvant définir une symétrie.*
- [6] *Création d'une échelle de symétrie permettant de comparer différents modèles.*