Le mouvement Brownien et sa modélisation mathématique

Les particules en suspension dans un fluide suivent un mouvement dit brownien, apparenté à une marche aléatoire, phénomène rendu d'autant plus intrigant par la diversité de ses applications : en théorie des probabilités d'abord avec les excursions browniennes et les processus stochastiques, puis par des théories de mathématiques financières importantes qui ont participé à l'optimisation informatisée de la bourse.

Ce TIPE fait l'objet d'un travail de groupe.
Liste des membres du groupe :

- *GUILLAUMOT Bastien*

Positionnement thématique (étape 1)

PHYSIQUE (Physique Théorique), MATHEMATIQUES (Mathématiques Appliquées), INFORMATIQUE (Informatique pratique).

Mots-clés (étape 1)

Mots-Clés (en français)	**Mots-Clés** (en anglais)
Mouvement brownien	*Brownian motion*
Aléatoire	*Random*
Processus stochastique	*Stochastic process*
Particules micrométriques	*Micrometric particles*
Modélisation	*Modelling*

Bibliographie commentée

En 1827, le botaniste écossais Robert Brown observe à l'aide d'un microscope un mouvement aléatoire animant des grains de pollen en suspension dans de l'eau [1]. Il croit d'abord à un phénomène d'origine biologique, mais des essais successifs avec d'autres sortes de pollen, vieux de plusieurs années, révélèrent le même phénomène. Il venait de mettre en évidence le caractère physique du mouvement brownien, nommé d'après lui-même, et qu'il avait découvert par accident [2].

Le mouvement brownien correspond au déplacement chaotique de particules de taille micrométrique dans un fluide, causé par son agitation thermique. Sa découverte a depuis suscité de nombreuses interrogations, comme celle concernant son apparente contradiction avec le principe de Carnot, un travail étant produit, de manière fluctuante, par une source unique de chaleur. Le physicien Louis Georges Gouy mentionne la possibilité théorique d'extraire du travail grâce à un cliquet relié à une particule brownienne, et conclut que le principe de Carnot cesse d'être valide pour des dimensions de l'ordre du micron.

Au début du XXème siècle, Einstein démontre que le déplacement quadratique moyen des particules est proportionnel au temps [3]. Le coefficient de proportionnalité correspondant dépend notamment de la constante d'Avogadro, ce qui permet d'en faire le calcul.

En 1910, Jean Perrin valide expérimentalement l'équation d'Einstein. Il décrit parallèlement les expériences concordantes qui permettent d'approcher le nombre supposé par Avogadro et ainsi d'asseoir la théorie atomique [4].
Il met également en évidence les propriétés mathématiques du mouvement brownien, à savoir son extrême irrégularité caractérisée par une trajectoire non dérivable en tout point, l'indépendance du mouvement de chaque particule brownienne d'une suspension et le lien exclusif entre la taille de la particule (sa nature et sa densité n'intervenant pas), la température et le mouvement. Enfin, le mouvement brownien est perpétuel.
Perrin décrit également l'extrême difficulté de l'obtention de mesures fiables et précises dans le cadre du mouvement brownien [5].
Le mouvement brownien a à l'heure actuelle des applications très usitées, notamment en mathématiques financières avec le modèle Black-Scholes, développée en 1973 en s'appuyant sur les travaux de Louis Bachelier (1900) et Samuelson (1960), permet par exemple de modéliser le cours d'une action [6].

Problématique retenue

Pour exploiter les applications mathématiques et physiques du mouvement brownien, il faut en valider un modèle mathématique en se basant sur des mesures fiables, bien que découlant d'un phénomène chaotique.

Objectifs du TIPE

Caractériser mathématiquement le mouvement brownien a constitué un problème majeur du début du 20ème siècle. Je serai amené à apporter des vérifications au modèle établi notamment par les travaux d'Einstein, de Levy et de Wiener.Pour celà, j'entends :
(i) utiliser nos mesures expérmentales pour vérifier les propriétés énoncées par Levy et Wiener;
(ii) exploiter ce modèle pour remonter au nombre d'Avogadro aussi précisément que possible;
(iii) analyser son application aux mathématiques financières.

Abstract

It first seems difficult to model the brownian move since brownian trajectories are random phenomenons. How can the brownian move be described using classical mathematics of probabilities ? A first approximation is the model of random walks, but the most precise existing model is named Wiener process, a sub-category of stochastic process. Using this model, the brownian move can have practical applications, especially in the field of financiary mathematics with the Black-Scholes model for option pricing, which is greatly appreciated by modern economists for its simplicity and performance.

Références bibliographiques

[1] BROWN, ROBERT : A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies : *Philosophical Magazine 4, 1828, 161-173*

[2] SCHMITT, Stéphane : De Brown au mouvement brownien : *Pour la Science, janvier 2006 : 10-13*

[3] POURPRIX B. et LANNOO J. : Albert Einstein et la théorie du mouvement brownien : *BUP, 1981, http://udppc.asso.fr/bupdoc/textes/1981/06341123.PDF*

[4] PERRIN, Jean : Les atomes : *1913, Paris, éditions Felix Alcan*

[5] DUPLANTIER, Bertrand : Le mouvement brownien “divers et ondoyant” : *Séminaire Poincaré, 2005, http://mpcezanne.fr/Main/Tipe/documents/MvTBrownien/duplantier2MvtBrowniem.pdf*

[6] BLACK F. et SCHOLES M. : The Pricing of Options and Corporate Liabilities : *Journal of Political Economy 81, 1973, 637–654.*