Vibration des membranes circulaires

CHARNOTET Antoine

De quelle façon peut on lier le visuel (figures de Chladni) à l'état (modes de vibrations, tension) et au son joué (notes et leur intensité) d'une membranes circulaire fixée à ses bords et stimulée par un coup ponctuel ?

Sommaire

Membrane de rayon l : points en coordonnées cylindriques (r, θ, z).
Recherche : déterminer z(t).

Equation d'onde :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial t^2} = \nabla^2 \vec{V}$$

Projection sur (Oz) + coordonnées polaires :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{dt^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$$

C'est une équation de d'Alembert.

Ondes stationnaires :

$$z(r,\theta,t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$$

Ce qui donne :

$$\frac{T''(t)}{c^2T(t)} = \frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{R'(r)}{rR(r)} + \frac{\Theta''(\theta)}{r^2\Theta(\theta)} = -\lambda^2$$

Indépendance spatiale, indépendance temporelle -> constante

$$\ddot{T}(t)+\lambda^2 c^2 T(t) = 0 \Leftrightarrow T(t) = A\cos(\lambda c t)+B\sin(\lambda c t),\ (A,B)\in\mathbb{R}^2$$

Aussi :

$$r^2\frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)} + r^2\lambda^2 = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = m^2$$

Indépendance selon r/θ -> constante

Ce qui donne :

$$\Theta''(\theta) + m^2\Theta(\theta) = 0$$

Donc :

$$\Theta(\theta) = C\cos(m\theta) + D\sin(m\theta),\ (C,D) \in \mathbb{R}^2$$

Mais aussi :

$$r^2R''(r) + rR'(r) + (r^2\lambda^2 - m^2)R(r) = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(\lambda r)^2\frac{\partial R^2}{\partial(\lambda r)^2}(r) + \lambda r\frac{\partial R}{\partial(\lambda r)}(r) + \left((\lambda r)^2 - m^2\right)R(r) = 0$$

Equation de Bessel

Solution :

$$R(r) = AJ_m(\lambda r) + BY_m(\lambda r) \Rightarrow R(r) = J_m(\lambda r)$$

Condition sur les bords :

$$z(r=l) = J_m(\lambda l) = 0 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{R} \mid \lambda l = \alpha_{m,n}$$

On pose : $\lambda = \lambda_{m,n} = \frac{\alpha_{m,n}}{l}$

Finalement :

$$\boxed{z(r,\theta,t) = J_m(\lambda_{m,n} r)(A\cos(c\lambda_{m,n}t) + B\sin(c\lambda_{m,n}t))(C\cos(m\theta) + D\sin(m\theta))}$$

Sommaire

```
racines_bessel = np.array([jn_zeros(0,5), jn_zeros(1,5),
    jn_zeros(2,5),jn_zeros(3,5)])
lambdas = racines_bessel/radius

for t in np.linspace(0, 2*np.pi/(v*lambdas[m, n]), 21):
    fig = plt.figure()
    ax = fig.gca(projection='3d')

    Z = (A*np.cos(v*lambdas[m, n]*t) + B*np.sin(v*lambdas[m,
         n]*t))*jn(m,lambdas[m,n]*r)*(C*np.cos(m*phi) + D*np
        .sin(m*phi))
    ax.cla()

    ax.plot_surface(X, Y, Z, rstride=1, cstride=1, cmap=cm.
        coolwarm, linewidth=0.5)
```

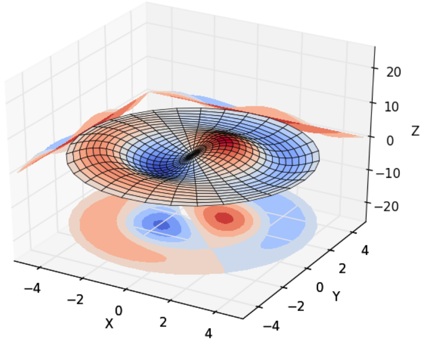


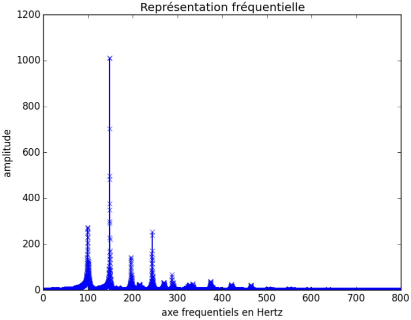
Figure – Mode (1, 2)

Figure – Lien avec les figures de Chladni Source : http ://cdoc.ensm-douai.fr/EBs/EB-Kaczala-Vallet.pdf

Sommaire

Figure – Expérience sur des timbales

Facteurs variants : taille, tension



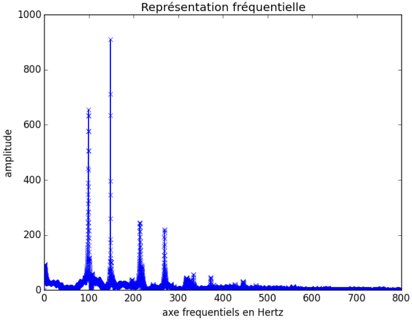


Figure – Timbale Ré 147

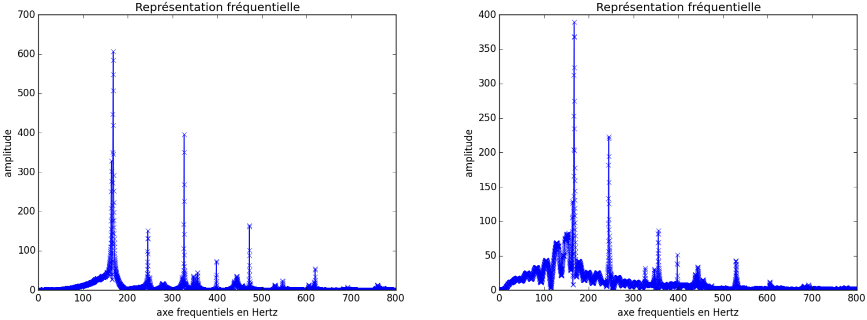


Figure – Timbale Fa 175

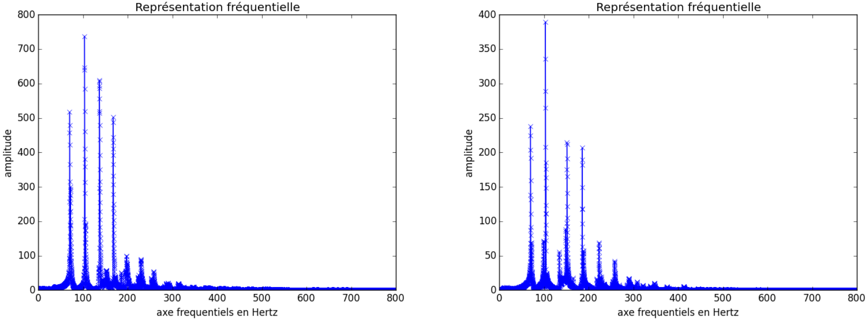


Figure – Timbale La bémol 104

Rapport expérimental (centre) : 1, 1.5, 2, 2.5...

J_0	J_1	J_2	J_3
2,404	3,832	5,135	6,379
5,520	7,016	8,417	9,760

Rapport théorique : 1, 1.59, 2.14, 2.30, ...

Tension et taille -> note entendue

Point de frappe -> modes de vibration + amplitude, effet ne varie pas selon taille/tension
Mode -> fréquence -> composantes du son
$\Rightarrow$ ressenti