Parcours optimal d'un grand nombre de points

Le problème du voyageur de commerce s'énonce simplement : parcourir un certain nombre de villes en passant une seule fois par chacune d'entre elles et en minimisant la distance. Mais trouver un algorithme permettant de résoudre rapidement et parfaitement le problème est a priori impossible. Il nous semblait donc pertinent de rechercher un algorithme permettant de trouver un parcours approchant la solution optimale.
Cette approche nous a intéressé car elle diffère de la plupart des algorithmes qui cherchent à trouver la solution parfaite à un problème. Nous rechercherons ici un certain équilibre entre qualité de la solution et temps d'exécution.

Ce TIPE fait l'objet d'un travail de groupe.
Liste des membres du groupe :

- *?*

Positionnement thématique (étape 1)

INFORMATIQUE (Informatique pratique), MATHEMATIQUES (Mathématiques Appliquées), MATHEMATIQUES (Géométrie).

Mots-clés (étape 1)

Mots-Clés (en français)	**Mots-Clés** (en anglais)
Problème du voyageur de commerce	*Travelling salesman problem*
Complexité temporelle	*Time complexity*
Méthodes heuristiques	*Heuristic methods*
Algorithmes gloutons	*Greedy algorithms*
Pavage	*Tessellation*

Bibliographie commentée

Le problème du voyageur de commerce consiste à minimiser la distance de parcours d'un certain nombre de points. Ce problème est apparu au début du XIXe siècle, formulé par le mathématicien irlandais William Rowan Hamilton [1]. En 1954, la solution a été trouvée pour 42 villes américaines. En 2004, le problème est résolu pour près de 25 000 villes suédoises. Le problème du voyageur de commerce est récurrent dans le domaine des transports (dessin des lignes de métro), des réseaux électriques, mais aussi de l'industrie (circuits imprimés). Mathématiquement, il s'agit de trouver la permutation des points telle que la somme des distances entre deux points consécutifs est minimale.

Trouver le parcours minimal n'est pas aisé car il s'agit d'un problème NP-Complet : on ne connaît jusqu'alors pas d'algorithme permettant de résoudre le problème avec une complexité polynômiale [2]. Un algorithme naïf, testant toutes les solutions afin de choisir la meilleure, propose une complexité en O(n!), ce qui est loin d'être acceptable pour plus d'une dizaine de points. Les algorithmes les plus performants pour trouver la solution parfaite ont quant à eux une complexité en $O(2^n \cdot n^2)$ [3]. Cette complexité est raisonnable pour un petit nombre de points, mais inabordable pour un nombre de points important.

Obtenir la solution parfaite n'est donc pas envisageable lorsque le nombre de points est trop élevé. On s'intéressera donc plutôt à la recherche de diverses méthodes permettant d'accéder à une solution approchée du problème, avec une complexité polynomiale. On tentera de trouver une solution pour un nombre de points de l'ordre de plusieurs milliers, c'est-à-dire là où les algorithmes cités précédemment sont impuissants.

Afin de réduire la complexité temporelle tout en minimisant autant que possible la distance parcourue, nous nous intéressons à des méthodes de résolution approximative du problème, approchant autant que possible la solution optimale, mais en un temps au pire polynomial : c'est le principe des méthodes heuristiques. On s'intéressera à ces méthodes, en utilisant notamment des algorithmes gloutons [4,5]. Ceux-ci choisissent à chaque itération la solution qui leur paraît être la meilleure à court terme : ils progressent ainsi dans le problème et permettent d'obtenir une solution proche de la solution optimale. Il s'agit ainsi d'un gain en complexité énorme pour une faible perte dans la solution finale.

Il a été démontré que la longueur du plus court chemin est proportionnelle à la racine du nombre de points à parcourir [6,7]. Tout algorithme prétendant fournir une solution approchée au problème du voyageur de commerce doit donc chercher à atteindre cette même proportionnalité, avec une complexité minimale. Pour mesurer la qualité d'une solution à la solution parfaite, il suffit ensuite de comparer les coefficients de proportionnalités associés aux deux méthodes. On pourra donc se servir du parcours optimal comme référence pour évaluer nos algorithmes.

Problématique retenue

Obtenir le parcours optimal d'un très grand nombre de points est laborieux à cause de la complexité factorielle du problème. Nous nous donnons donc pour but d'élaborer des algorithmes qui produisent une solution approchée. Ces algorithmes doivent cependant trouver celle-ci en un temps polynomial.

Objectifs du TIPE

Je me propose :
- d'étudier différentes méthodes permettant de parcourir des points générés aléatoirement afin de déterminer laquelle semble être la plus efficace en un temps polynomial.
- de déterminer la distance théorique de parcours pour chaque méthode et la comparer au parcours parfait.
- de vérifier expérimentalement ces prévisions à l'aide d'algorithmes écrits en Python, dans le but d'évaluer l'erreur commise par rapport au parcours optimal de ces points.

Abstract

The travelling salesman's problem consists in seeking the shortest path between a given sequence of dots. It cannot be resolved in polynomial time : the solutions are unreachable for a large amount of dots. Our purpose is to determine heuristic algorithms which run in polynomial time.

We focused on two methods : the first one, which is faster, sorts the dots out a coordinate. The second, slower but more efficient, links the dots always choosing the closest one. The choice of one method rather than the other depends on the application constraints.

Références bibliographiques

[1] *http://www.math.uwaterloo.ca/tsp/index.html*

[2] THOMAS CORMEN : Introduction à l'algorithmique : *Chapitre 34, DUNOD, 2004*

[3] MICHAEL HELD , RICHARD M. KARP : A Dynamic Programming Approach to Sequencing Problems : *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Vol.10 (1962), p 198-199*

[4] THOMAS CORMEN : Introduction à l'algorithmique : *Chapitre 36, DUNOD, 2004*

[5] EL-GHAZALI TALBI : Metaheuristics From Design to Implementation : *Chapitre 1.3.4, Wiley, 2009*

[6] BEARDWOOD, HALTON, HAMMERSLEY : The shortest path through many points : *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Vol.55 (1959), p 299-327*

[7] *http://www.theoremoftheday.org/OR/BHH/TotDBHH.pdf*