

# Vote, stratégies et représentativité

Nous avons choisi de traiter le sujet du vote, présent dans la vie courante, car il est intéressant d'étudier le formalisme mathématique sous-jacent à un système apparemment fiable, qui se révèle manipulable. Le sujet traite à la fois de la question du choix, puisque que le vote se base sur le choix de candidats par les votants, des contraintes, car il existe un certain nombre de propriétés mathématiques à respecter qui permettent de caractériser une bonne ou mauvaise fonction d'agrégation, et de l'optimalité, l'objectif étant d'utiliser un mode de scrutin qui soit le plus représentatif possible des opinions individuelles.

**Ce TIPE fait l'objet d'un travail de groupe.**

**Liste des membres du groupe :**

- *BONDIVENA Baptiste*

## Positionnement thématique (étape 1)

*MATHEMATIQUES (Mathématiques Appliquées), INFORMATIQUE (Informatique pratique), MATHEMATIQUES (Autres).*

## Mots-clés (étape 1)

Mots-Clés (en français)	Mots-Clés (en anglais)
<i>Mode de scrutin</i>	<i>Voting system</i>
<i>Manipulabilité</i>	<i>Manipulability</i>
<i>Théorie du choix social</i>	<i>Social choice theory</i>
<i>Theorie des jeux</i>	<i>Game theory</i>
<i>Vainqueur de Condorcet</i>	<i>Condorcet winner</i>

## Bibliographie commentée

La théorie du choix social s'intéresse au lien entre préférences individuelles et décision collective. Il s'agit de l'étude des modes de scrutin, et de certaines propriétés (explicitées ci dessous) qui permettent de définir axiomatiquement un «bon» mode de scrutin [1] et ainsi d'écartier de l'étude les modes de scrutin aberrants (par exemple un mode de scrutin qui élirait toujours le même candidat, quels que soient les bulletins).

Dans le formalisme mathématique mis en place pour ces études, les modes de scrutin sont associés à des fonctions, dites d'agrégation, qui, à un ensemble de bulletins représentant les préférences individuelles associent une préférence collective[1], un bulletin étant une relation d'ordre strict total sur l'ensemble des candidats.

Ayant débuté avec les travaux de Nicolas de Condorcet et notamment le paradoxe de Condorcet (1785), mettant en évidence le fait qu'il existe des situations où le candidat préféré d'une majorité d'électeurs peut ne pas être élu [2], cette théorie a été approfondie par Kenneth Arrow, en particulier avec son théorème d'impossibilité (1951), énonçant le fait que, sous réserve d'avoir au moins trois candidats et deux votants, il ne peut exister de mode de scrutin satisfaisant à la fois les

propriétés d'universalité (quels que soient les bulletins, la fonction d'agrégation est définie et renvoie une préférence collective), de non-dictature (il n'existe aucun votant dont la liste des préférences coïncide avec le résultat obtenu indépendamment des préférences des autres votants), d'unanimité (ou optimum de Pareto [3]: lorsque tous les individus préfèrent une option à une autre, la fonction d'agrégation doit conserver cet ordre) et d'indifférence aux options non pertinentes (le classement relatif de deux candidats ne doit dépendre que de leur position relative dans les bulletins et non du classement d'autres candidats)[1] .

Ainsi, il a été démontré qu'il n'existe aucun "bon" mode de scrutin puisque toutes les propriétés ne peuvent être respectées simultanément.

Cependant, il est possible de comparer les différents modes de scrutin sur la base d'autres propriétés, comme l'indifférence aux options les moins pertinentes ou la manipulabilité, par exemple, que l'on essaye de minimiser car elle est considérée comme néfaste.

L'indifférence aux options les moins pertinentes est une version affaiblie de l'indifférence aux options non pertinentes. On considère que les options les moins pertinentes sont les candidats ne figurant pas dans l'ensemble de Smith[4], qui est le plus petit ensemble de candidats qui battent en duel tous les candidats n'appartenant pas à cet ensemble. Il existe alors des modes de scrutin qui vérifient à la fois les propriétés d'universalité, de non-dictature, d'unanimité et d'indifférence aux options les moins pertinentes.

La manipulabilité d'un mode de scrutin est définie comme le fait qu'une coalition de votants puisse dévier du vote sincère et obtenir un résultat qu'ils préfèrent à celui d'un vote sincère. Selon le théorème de Gibbard-Satterthwaite, pour un mode de scrutin non-dictatorial, comportant plus de 3 candidats, il existe au moins une configuration où le mode de scrutin est manipulable par un seul votant [5]. Le but n'est donc pas de trouver un mode de scrutin non manipulable, mais de chercher un mode de scrutin qui soit le moins manipulable possible, tout en restant non-dictatorial, universel et unanime, en comparant différents modes de scrutin. De plus, une fois trouvé des modes de scrutin de ce type, il est possible de diminuer encore leur manipulabilité par des procédés tels que la condorcification [5], qui consiste à sélectionner le vainqueur de Condorcet [1] s'il existe.

## **Problématique retenue**

Il s'agira de travailler sur un échantillon composé de plusieurs modes de scrutin afin d'en étudier les propriétés, de les comparer et de les optimiser.

## **Objectifs du TIPE**

- Simulation de plusieurs modes de scrutin à l'aide de procédés algorithmiques (ex: methode Borda)
- Vérification du paradoxe de Condorcet par simulation de plusieurs votes (scrutin uninominal à 2 tours)
- Comparaison de la manipulabilité de différents modes de scrutin
- Minimisation de la manipulabilité d'un mode de scrutin: condorcification de la méthode Borda

## **Abstract**

Making group decisions is an everyday life issue. In order to aggregate a set of individual preferences into a single collective preference, a lot of different voting systems were invented. We wondered

what defined a «good» voting system and we compared some of them on the basis of different properties . In particular, we focused on the manipulability of the systems, calculated it and tried to reduce it, by a condorcification process.

## Références bibliographiques

- [1] BERNARD MONJARDET : De Condorcet à Arrow via Guillbaud en passant par Nakamura et les «jeux simples» : <ftp://mse.univ-paris1.fr/pub/mse/cahiers2002/B02124.pdf>
- [2] RÉMI PEYRE : Les mathématiques de la démocratie, II : <images.math.cnrs.fr/Et-le-vainqueur-du-second-tour-est.html>
- [3] WIKIPÉDIA : Optimum de Pareto : [http://fr.wikipedia.org/wiki/Optimum\\_de\\_Pareto](http://fr.wikipedia.org/wiki/Optimum_de_Pareto)
- [4] JOHN H. SMITH : Aggregation of Preferences with Variable Electorate : *Econometrica* Vol. 41, No. 6 (Nov., 1973), pp. 1027-1041
- [5] FRANÇOIS DURAND : Vers des modes de scrutin moins manipulables : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01242440v2/document>