

Effets relativistes sur la désynchronisation des horloges propres des GPS

Canel Paul

Numéro de candidat : 25225

Les satellites GPS :

- des outils devenus indispensables dans de nombreux secteurs d'activité.
- une technologie qui n'aurait pu voir le jour sans les travaux d'Einstein sur la relativité.

- Au regard des vitesses et des distances entre les satellites quels sont les effets de la relativité restreinte sur la synchronisation entre leur horloges?
- Quels sont les effets de la relativité générale, quelle est l'influence des champs gravitationnels générés par les astres les plus proches?

- 1 Une désynchronisation due aux effets de la relativité restreinte
 - Construction des orbites des satellites GPS
 - Calcul du décalage et transformations de Lorentz
 - Extension de l'étude à un cas plus général : comparaison avec des fichiers d'orbites du Laboratoire AstroParticule et Cosmologie
- 2 Une désynchronisation due aux effets de la relativité générale
 - Calcul du décalage temporel par rapport au temps coordonné associé au référentiel géocentrique
 - Comparaison avec la constellation Lisa
- 3 Conclusion

Une désynchronisation due à la Relativité Restreinte

Lois de Kepler

Le mouvement est elliptique:

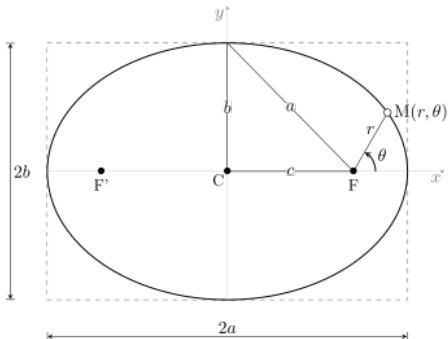
$$r(\theta) = \frac{p}{1+e \cos(\theta)}$$

- e l'excentricité de l'ellipse
- p le paramètre de l'ellipse

Le rayon balaie des aires égales pendant des durées égales:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2}{2} \frac{d\theta}{dt}$$

- A l'aire balayée pendant dt



Lois de Kepler

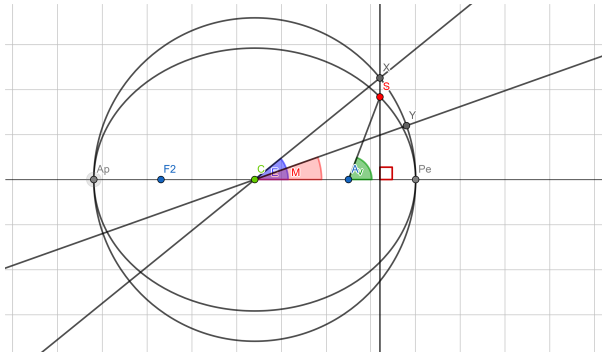
Loi des périodes: $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$

- T la période de révolution
- a le demi grand axe
- G la constante de gravitation

Equation de Kepler

$$E - e \sin(E) = M \quad (1)$$

- e l'eccentricité
- E l'anomalie eccentrique
- M l'anomalie moyenne



Résolution à l'aide de la méthode de Newton:

```
line1 = "1 43567U 180600 21054.88871616 -.000000042 000000-0 000000-0 0 9994"
line2 = "2 43567 0.0000 34.1785 0005655 288.6802 71.2598 1.70475770 16111"
## 01234567890123456789012345678901234567890123456789012345678901234567890
## line2 2 43567 56.9615 34.1785 0005655 288.6802 71.2598 1.70475770 16111

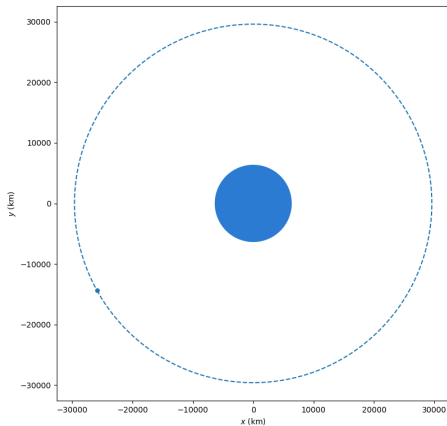
m = np.radians(float(line2[44:51])) #mean anomaly
e = float(("0."+line2[26:33]))

def f(x):
    return x - e * np.sin(x) - m

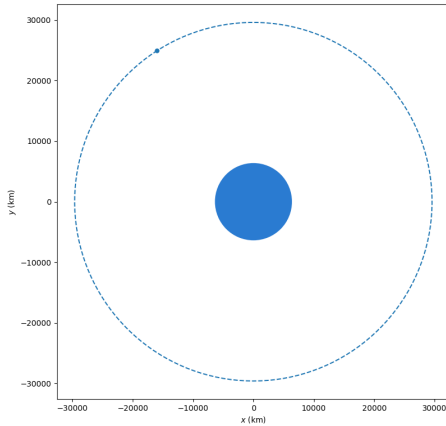
def df(x):
    return 1 - e * np.cos(x)

def newton(f, df, x0, epsilon=0.000001):
    """Renvoie le terme d'indice n de la méthode de Newton approchant un zéro de f de
    dérivée df, de premier terme x0, tel que tel que  $|x_{n+1} - x_n| \leq \epsilon$ ."""
    x_prec = x0
    x = x0 - f(x0) / df(x0)
    while abs(x - x_prec) > epsilon:
        x_prec, x = x, x - f(x) / df(x)
    return x
```

Orbite de Galileo 23



Orbite de Galileo 25



Théorie de la relativité restreinte

Postulats d'Einstein:

- Les lois de la physique sont invariantes par changement de référentiel
- La vitesse de la lumière est la même pour tous les référentiels

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \nu_0}} \quad (2)$$

Transformations de Lorentz

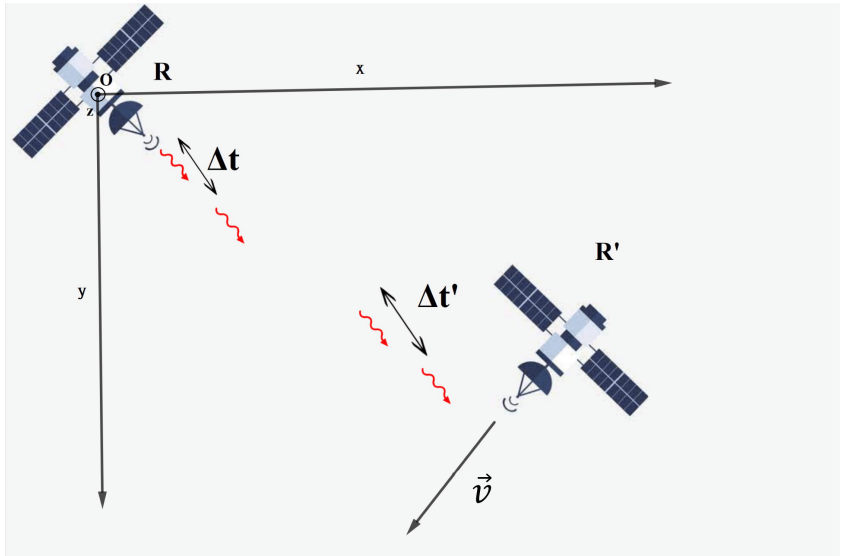
On considère deux référentiels R et R' auxquels on associe les repères respectifs (O, x, y, z, t) et (O', x', y', z', t') . Si R' est en translation rectiligne uniforme par rapport à R selon (Ox) alors :

- $x' = \gamma(x - vt)$
- $y' = y$
- $z' = z$
- $t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$

Transformations de Lorentz (Cas général)

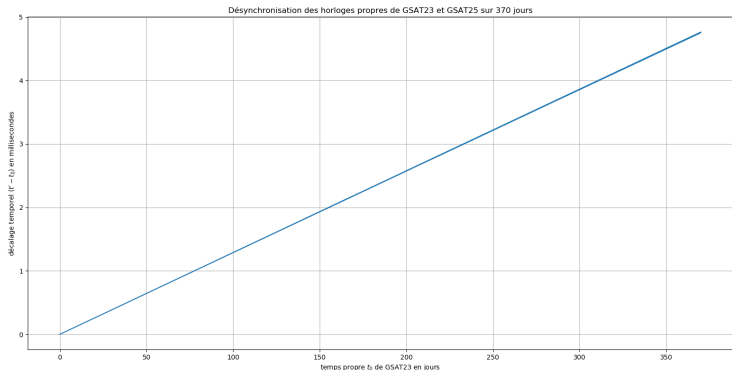
$$t' = \gamma\left(t - \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{c^2}\right) \quad (3)$$

Différence de durée mesurée par 2 satellites en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre ($\Delta t < \Delta t'$)



Calcul de la transformation de Lorentz de la coordonnée associée au temps:

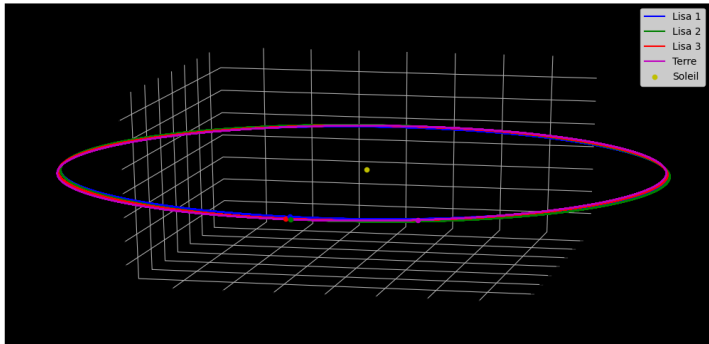
```
37 v12 = v2 - v1
38 r12 = r2 - r1
39
40 gamma = 1 / (np.sqrt(1 - (np.linalg.norm(v12, axis=1) ** 2 / cst.c.value ** 2)))
41
42 tprim = gamma * (tspan - (np.sum(v12 * r12, axis = 1) / (cst.c ** 2)))
```

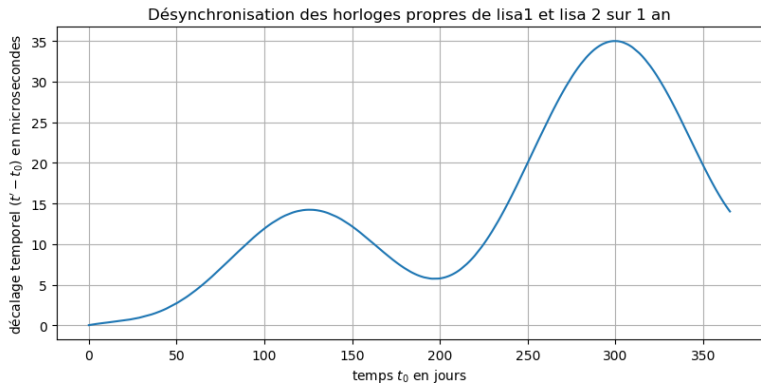


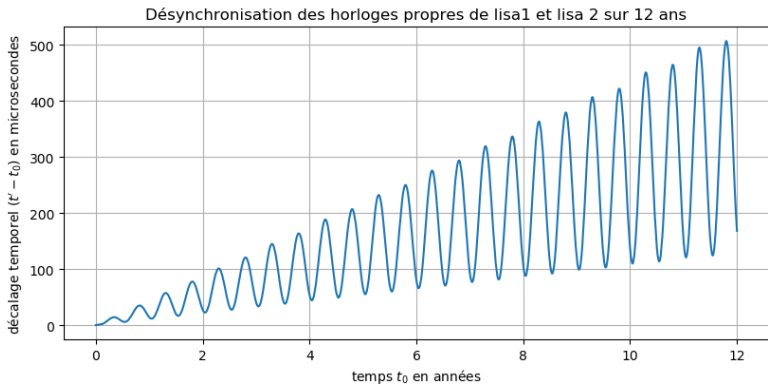
Extension de l'étude à un cas plus général : comparaison avec des fichiers d'orbites du Laboratoire AstroParticule et Cosmologie

- Pour cette simulation les orbites sont peu complexes (quasi circulaires) et ne prennent en compte aucune dérive au cours du temps.
- Comment évolue cette désynchronisation au cours de temps pour une orbite plus complexe?

- Pour la mission spatiale LISA dont l'objectif est de détecter des ondes gravitationnelles, trois satellites seront envoyés dans l'espace pour former un interféromètre laser.
- Ils auront une orbite héliocentrique et seront distants de plus de 2 millions de km.
- Pour assurer le bon fonctionnement de cet interféromètre, la correction des décalages relativistes des horloges de ces satellites est primordiale.

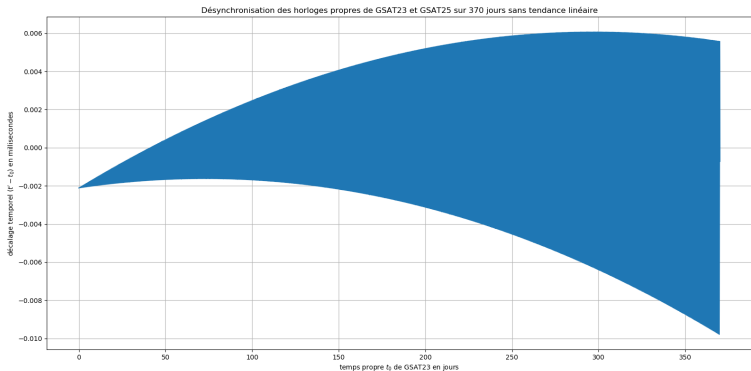




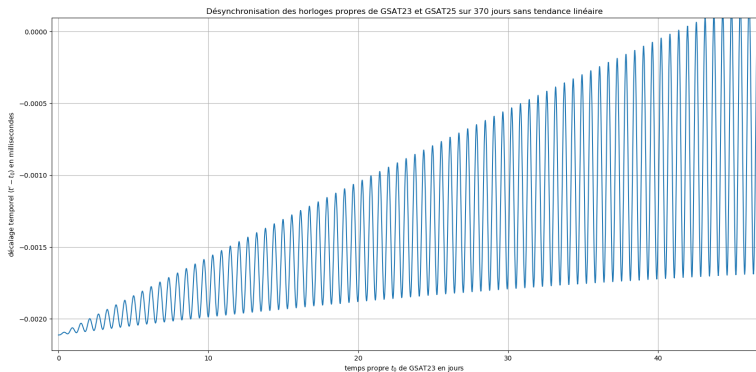


- A première vue, on ne remarque aucune similitude entre les résultats obtenus pour les GPS et pour la constellation LISA si ce n'est le fait que le décalage est globalement croissant pour les deux.
- Cela provient en partie du fait que les orbites des GPS sont quasi circulaires, mais en retirant sa tendance linéaire à la courbe des GPS on peut observer qu'il ne s'agit pas exactement d'une droite.

- On peut ainsi de nouveau comparer les résultats obtenus sur 1 an.



- En observant sur une durée moindre, on retrouve la pseudo-période que l'on avait pour la constellation LISA et qui est bien égale à la période orbitale des satellites (environ 14h pour les satellites GALILEO).



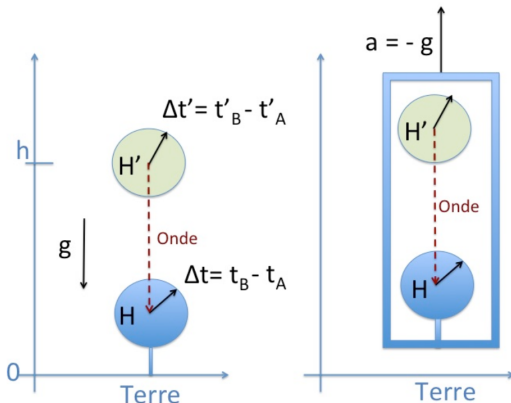
Une désynchronisation due à la Relativité Générale

Calcul du décalage temporel par rapport au temps coordonné associé au référentiel géocentrique

Théorie de la relativité générale

- On ne peut distinguer une accélération constante d'un champ de gravitation constant (Principe d'équivalence).
- La gravitation n'est plus une force mais une manifestation de la courbure de l'espace-temps. Elle définit des échelles de longueurs et de temps.
- On définit l'espace-temps par une nouvelle métrique: La métrique de Schwarzschild.

Une des conséquences directes de cette théorie est la dilatation gravitationnelle du temps :



d'après culturesciencesphysique.ens-lyon.fr

Le Redshift Gravitationnel (Décalage d'Einstein)

Un photon de fréquence ν_0 émis dans un champ de gravitation $\vec{G}$ produit par une masse M à une distance r_0 est perçu par un observateur situé dans un champ gravitationnel plus faible avec une fréquence ν_{obs} plus faible (décalée vers le rouge):

$$\frac{\nu_{obs}}{\nu_0} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{r_0 c^2}} \quad (4)$$

en y ajoutant les effets de la relativité restreinte on obtient donc :

$$\frac{\nu_{obs}}{\nu_0} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{r_0 c^2} - \frac{v^2}{c^2}} \quad (5)$$

- Dans le cas des satellites, le champ gravitationnel dépend de plusieurs astres : on aura donc une somme de potentiels gravitationnels.
- Ainsi la durée $d\tau_k$ séparant deux évènements dans le référentiel du satellite k se déplaçant à la vitesse v_k dans le référentiel d'étude est reliée à la durée dt séparant ces deux évènements dans le référentiel d'étude par:

$$d\tau_k = dt \sqrt{1 - \sum_{i \in \text{Astres}} \frac{2GM}{r_{ki}c^2} - \frac{v_k^2}{c^2}} \quad (6)$$

Calcul du rayon de Schwarzschild $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ de chaque astre :

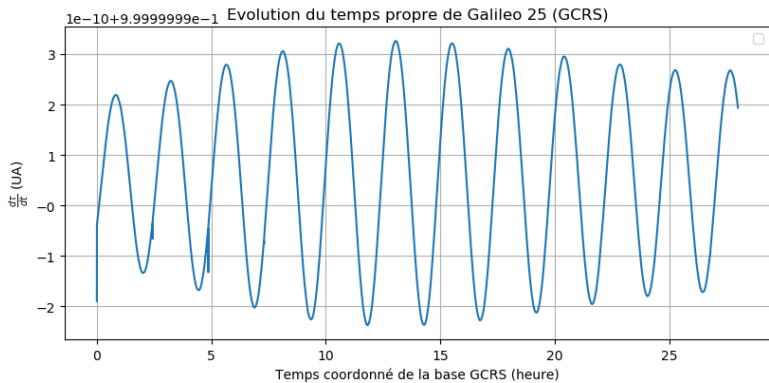
```
43 astres = [bo.Sun, bo.Mercury, bo.Venus, bo.Earth, bo.Mars, bo.Jupiter, bo.Saturn, bo.Uranus, bo.Neptune, bo.Moon]
44
45 # k = 2mu / c**2
46 k = np.array([(2 * a.mass.value * const.G.value) / const.c.value **2 for a in astres])
47
48 st = time()
49 sys.stdout.write("Chargement coordonnées satellites ... ")
50
51 t0, tspan, p1, v1 = GetOrbitsFromBin(filePath1, StopIndex=stopIndex)
52 _, _, p2, v2 = GetOrbitsFromBin(filePath2, StopIndex=stopIndex)
53
54 # Coordonées satellites (GCRS)
55
56 gsat1 = np.transpose(np.array([p1[:, 0], p1[:, 1], p1[:, 2]]) * u.m)
57 gsat2 = np.transpose(np.array([p2[:, 0], p2[:, 1], p2[:, 2]]) * u.m)
58
59 # Coordonées astres (ICRS)
60
61 sys.stdout.write(str(time() - st) + " s\n")
62 st = time()
63 sys.stdout.write("Chargement coordonnées astres ... ")
```

Calcul des distances Astre-satellite r_{ki} :

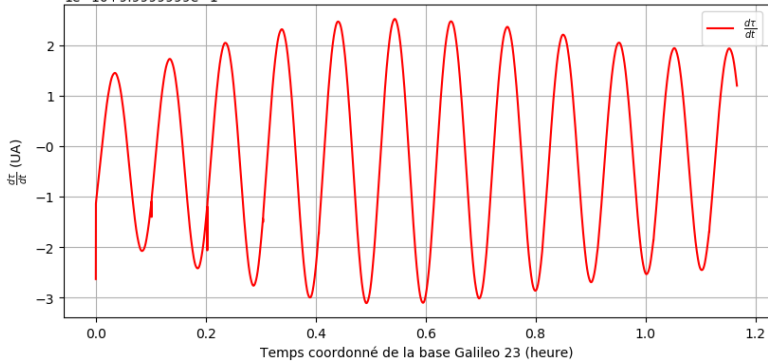
```
65 with open(astres_bin, "rb") as file:
66     coord_astres = pickle.load(file)
67     coord_astres = [a[0:stopIndex] for a in coord_astres]
68     coord_astres = [np.array([a.cartesian.x, a.cartesian.y, a.cartesian.z]).T * u.km for a in coord_astres]
69
70     sys.stdout.write(str(time() - st) + " s\n")
71     st = time()
72
73     sys.stdout.write("Calcul des rayons ... ")
74
75     r1 = [[]] * len(coord_astres)
76     r2 = [[]] * len(coord_astres)
77
78     for a in range(len(coord_astres)):
79         r1[a] = np.sqrt(np.sum((gsat1 - coord_astres[a]) ** 2, axis=1))
80         r2[a] = np.sqrt(np.sum((gsat2 - coord_astres[a]) ** 2, axis=1))
```

Calcul des sommes des potentiels gravitationnels, de $\frac{d\tau}{dt}$ et du Redshift Gravitationnel τ :

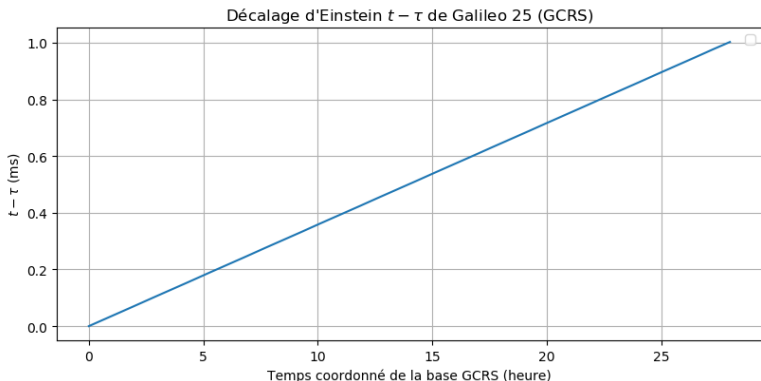
```
86 sys.stdout.write("Calcul somme potentiels gravitationnels ... ")
87
88 S1, S2 = np.zeros(len(gsat1)), np.zeros(len(gsat2))
89
90 for a in range(len(coord_astres)):
91     S1 += k[a] / r1[a].value
92     S2 += k[a] / r2[a].value
93
94 sys.stdout.write(str(time() - st) + " s\n")
95 st = time()
96
97 sys.stdout.write("Calcul dtau ... ")
98
99 dtau1 = np.sqrt(1 - S1 - (np.linalg.norm(v1, axis=1) ** 2 / const.c.value ** 2))
100 dtau2 = np.sqrt(1 - S2 - (np.linalg.norm(v2, axis=1) ** 2 / const.c.value ** 2))
101
102 sys.stdout.write(str(time() - st) + " s\n")
103 st = time()
104
105 sys.stdout.write("Calcul tau ... ")
106
107 tau1 = integrate.cumtrapz(dtau1, tspan, initial=0)
108 tau2 = integrate.cumtrapz(dtau2, tspan, initial=0)
```

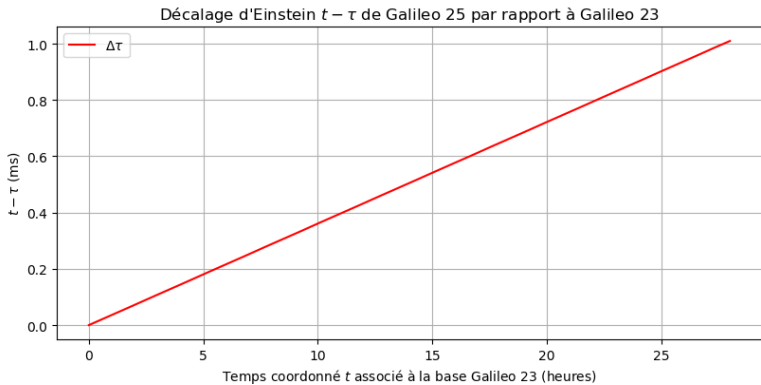


Evolution du temps propre de Galileo 25 par rapport au temps coordonné de Galileo 23
 $1e-10+9.9999999e-1$

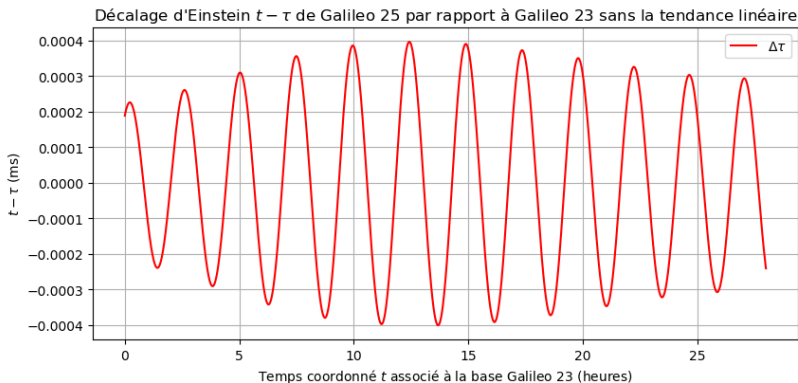


- En intégrant les courbes précédemment obtenues à l'aide de la méthode des trapèzes, on peut obtenir l'accumulation de ce décalage temporel au cours du temps :

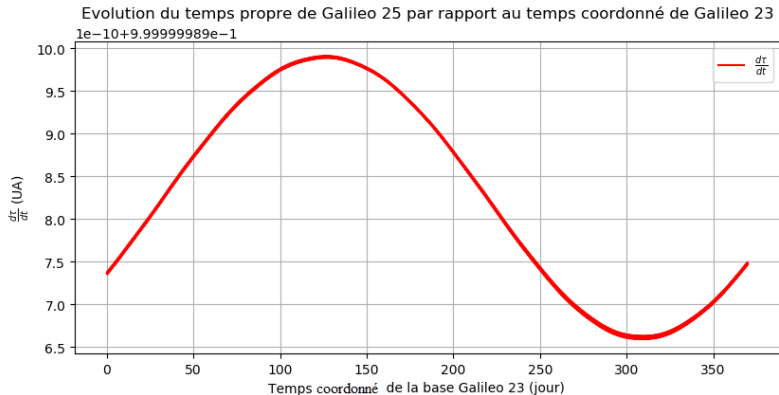


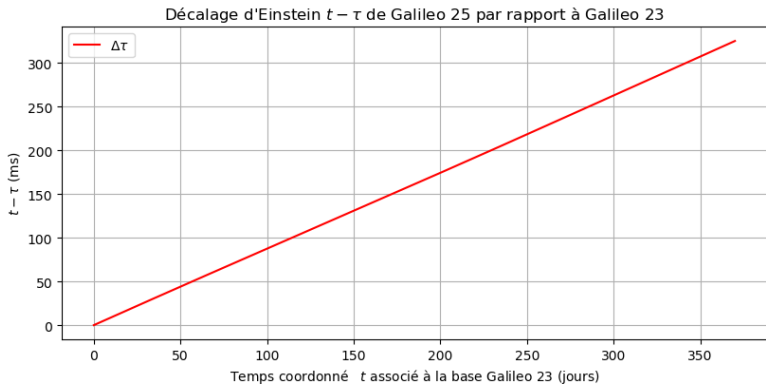


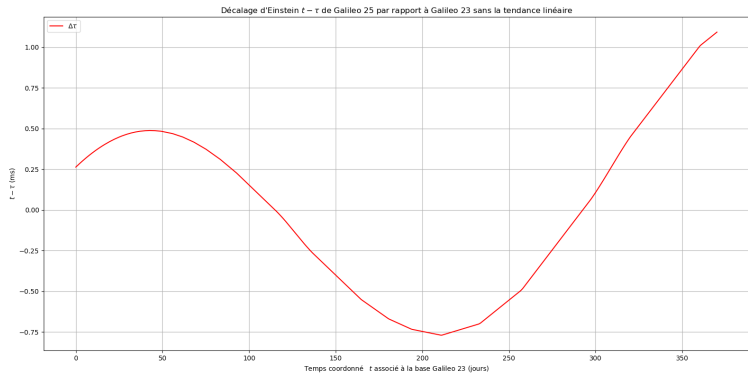
- En retirant sa tendance linéaire à la courbe, on obtient bien une courbe similaire à sa dérivée où les mêmes périodes sont observables:



- Du fait des différentes distances entre les astres et les satellites, on observe des périodes différentes en faisant varier l'échelle de temps:



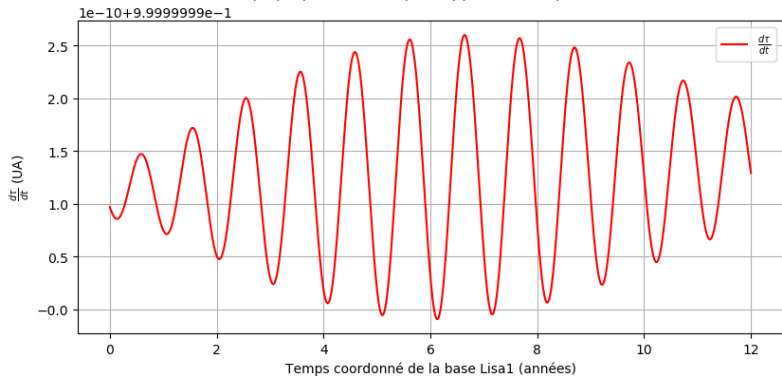


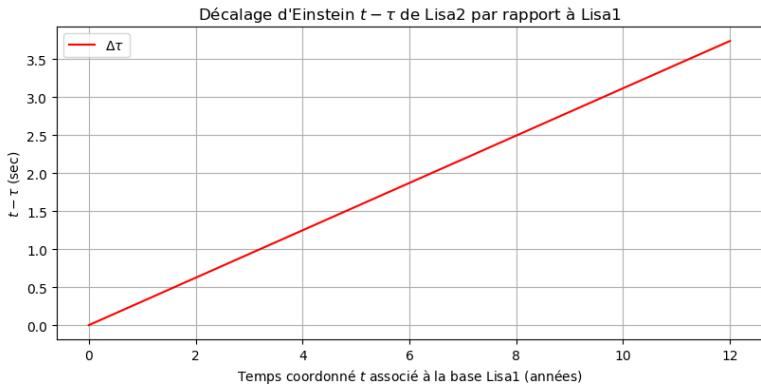


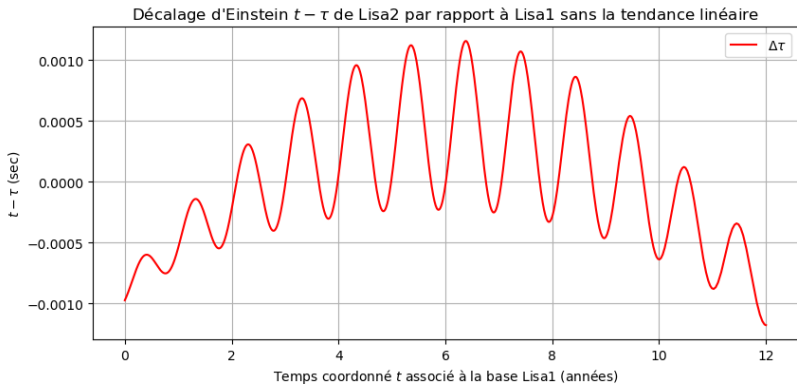
Comparaison avec la constellation Lisa

- De même que précédemment, on peut comparer les résultats obtenus à ceux que l'on obtient avec la constellation LISA, tout en considérant qu'étant dans une orbite héliocentrique la lune aura moins d'influence que dans le cas des GPS et d'autres astres imposeront davantage leur potentiel gravitationnel.
- On observera donc les périodes obtenues dans les courbes des GPS avec une amplitude différente.

Evolution du temps propre de Lisa2 par rapport au temps coordonné de Lisa1







Conclusion

Les effets de la Relativité Restreinte

- Sur une journée : d'après les simulations numériques $t' - t \simeq 130\mu s$ ce qui correspond à une erreur de mesure d'environ $39km/jour$
- Sur 1 an : $t' - t \simeq 4,5ms$ ce qui correspond à une erreur de mesure d'environ $1350km/an$ car le décalage n'est pas constant au cours du temps.

Les effets de la Relativité Générale

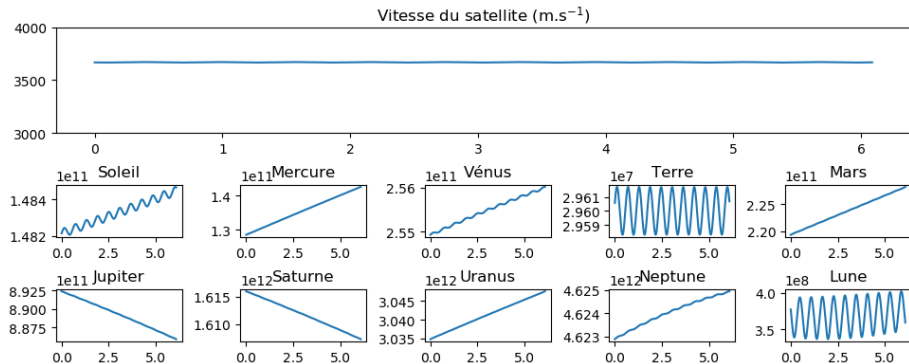
- Sur une journée : $t' - t \simeq 0.9ms$ et donc une erreur de mesure d'environ $270km/jour$.
- Sur 1 an : $t' - t \simeq 0.31s$ soit une erreur de mesure d'environ $93000km/an$.

- Du fait du modèle pris en compte et des approximations faites pour les simulations, les résultats ne représentent pas la réalité.
- Le décalage reste cependant supérieur au kilomètre par jour, d'où l'importance de prendre en compte les effets relativistes pour les satellites GPS, les télécommunications et les satellites de recherche comme ceux de la constellation LISA.

Annexes

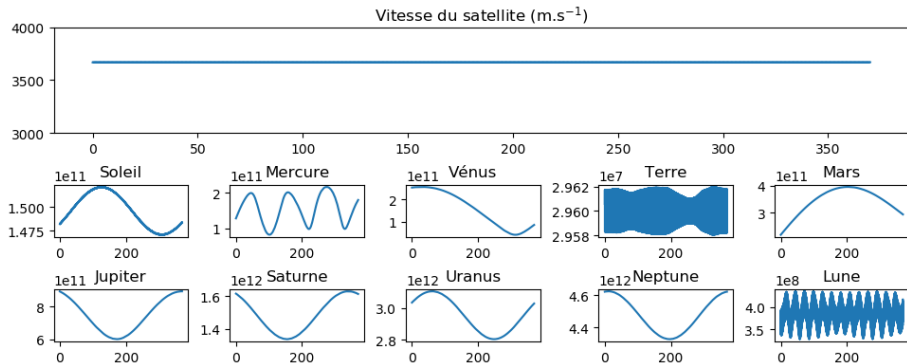
• Annexe 1

Vitesse (GCRS) de GSAT25 (m.s^{-1}) et distance (m) avec les astres en fonction du temps (jours)

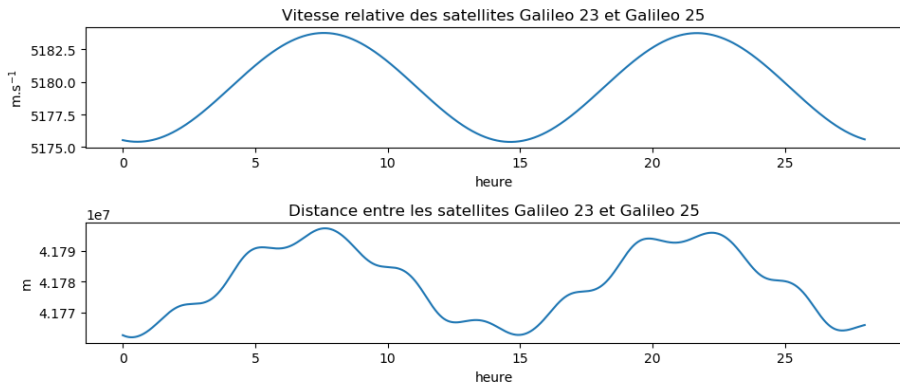


• Annexe 2

Vitesse (GCRS) de GSAT25 (m.s^{-1}) et distance (m) avec les astres en fonction du temps (jours)

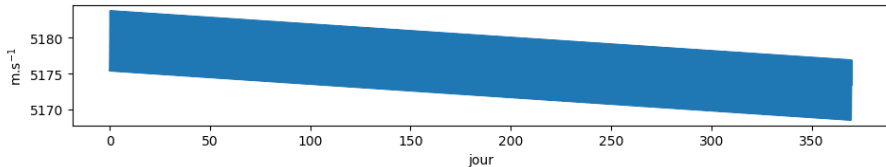


• Annexe 3

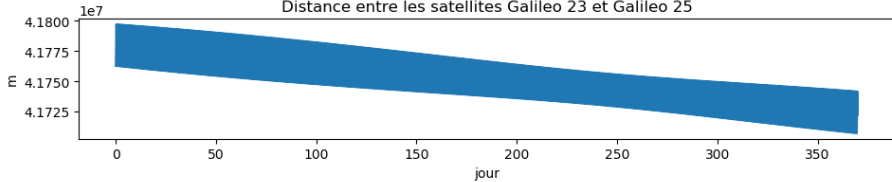


• Annexe 4

Vitesse relative des satellites Galileo 23 et Galileo 25

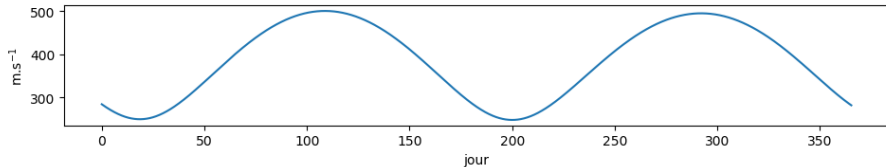


Distance entre les satellites Galileo 23 et Galileo 25

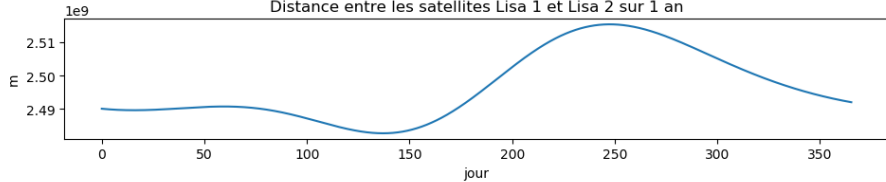


• Annexe 5

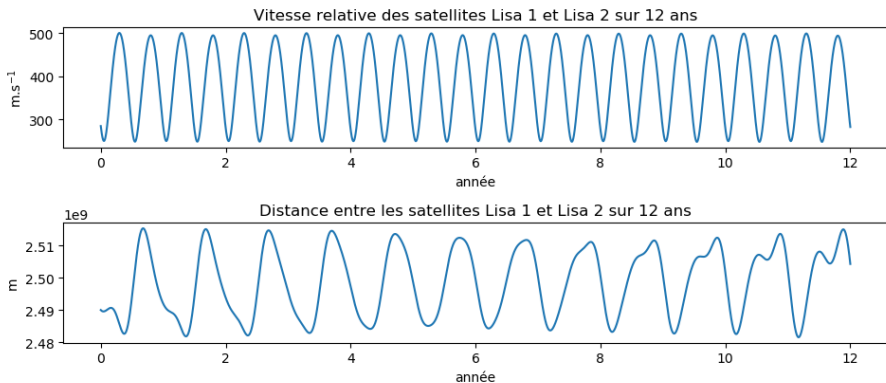
Vitesse relative des satellites Lisa 1 et Lisa 2 sur 1 an



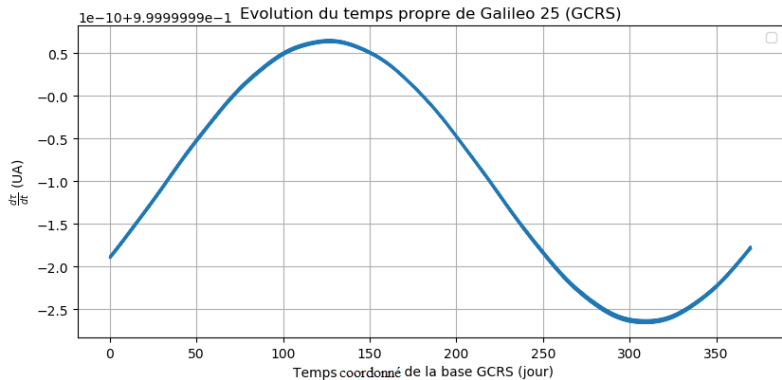
Distance entre les satellites Lisa 1 et Lisa 2 sur 1 an



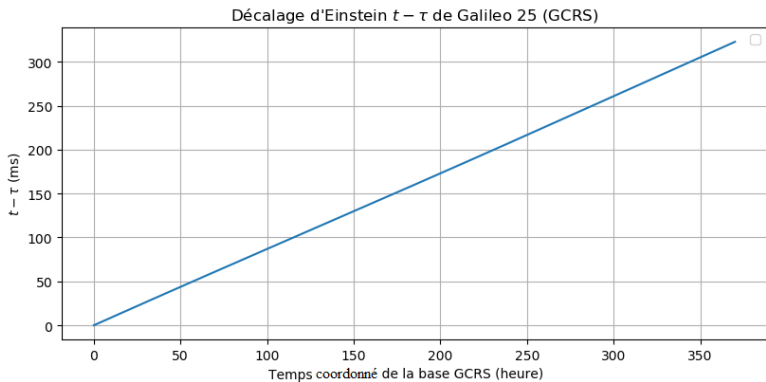
• Annexe 6



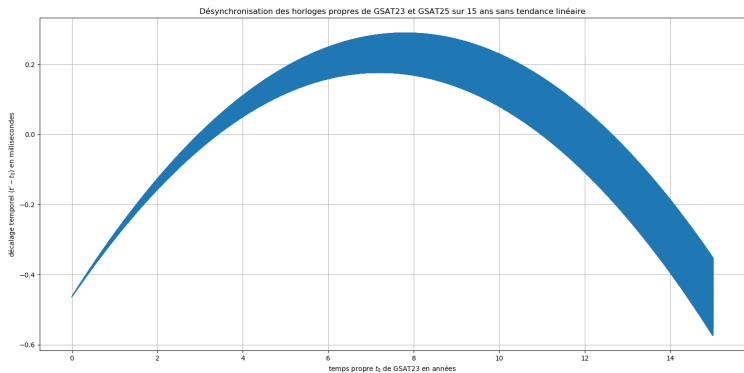
• Annexe 7



• Annexe 8

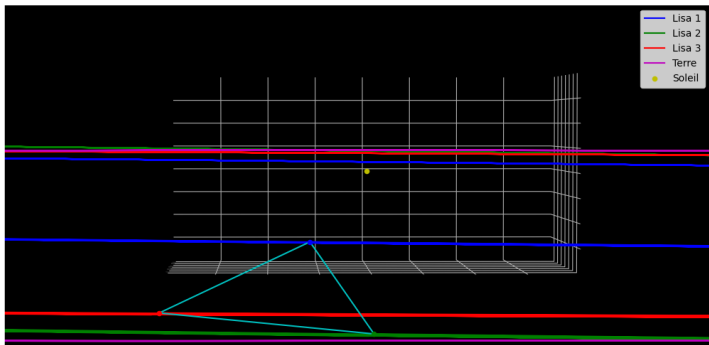


• Annexe 9



- Annexe 10

Constellation Lisa



● Annexe 11

Extrait d'un fichier d'orbite

Temps			Position		
jours	secondes	X	Y	Z	
0	3600	24511.402312872877	16584.62085553828	-4.120574420297999	
0	7200	18212.52697569638	20733.995886243505	10708.97448460401	
0	10800	-3153.9952391495826	16834.837655290296	24158.07606646624	
0	14400	-25974.931853206108	-8824.913469129133	11147.74567820955	
0	18000	2667.270090423497	-17059.993570870865	-24025.33444157967	
0	21600	18855.408673740134	20549.95459451361	9920.520824037032	
0	25200	-24976.31358459654	-15839.049775634743	1354.318779248486	
0	28800	25081.84703076651	15610.309029933658	-1736.5830656134021	
0	32400	-19812.804860256794	-20211.833630505775	-8664.775365430669	
0	36000	-424.69575180256106	18107.989592083133	23427.224498797066	
0	39600	25411.65272274513	6416.916503476008	-13728.955013126066	
0	43200	-980.2278310430193	-18670.446834878523	-22932.69558590613	
0	46800	-21487.11294382442	-19398.12375137031	-6185.476266118458	
0	50400	-25935.313066791154	-13124.03830918362	5638.5045675451	
0	54000	-26033.009600155754	-12530.28442367068	6478.872397840384	
0	57600	-22925.71197523824	-18371.61986303929	-3638.3228882681333	
0	61200	-5504.379109691983	-20168.155289385468	-20940.92473118133	
0	64800	23190.860202478536	1305.7968987760023	-18324.156932795628	
0	68400	7671.552513100416	20692.061830192215	19740.35193344082	
0	72000	-24758.077508751838	-16219.583478068571	681.6072895892185	
0	75600	25737.75260594416	7665.195261167031	-12420.276074723737	
0	79200	-25483.01555680448	-6591.830543613574	13567.699823637366	
0	82800	25742.520083605494	13881.986278374201	-4507.070195465611	
1	0	-13917.14467043593	-21294.045847329304	-15124.21179432001	
1	3600	-17350.26548911526	6418.557618884673	23127.669427245568	
1	7200	16471.827760425193	21088.794074018446	12661.051933154908	
1	10800	26048.292519175975	9555.015494839605	-10281.159764611202	
1	14400	21692.59626701058	-1092.5261262573904	-20087.225659170846	