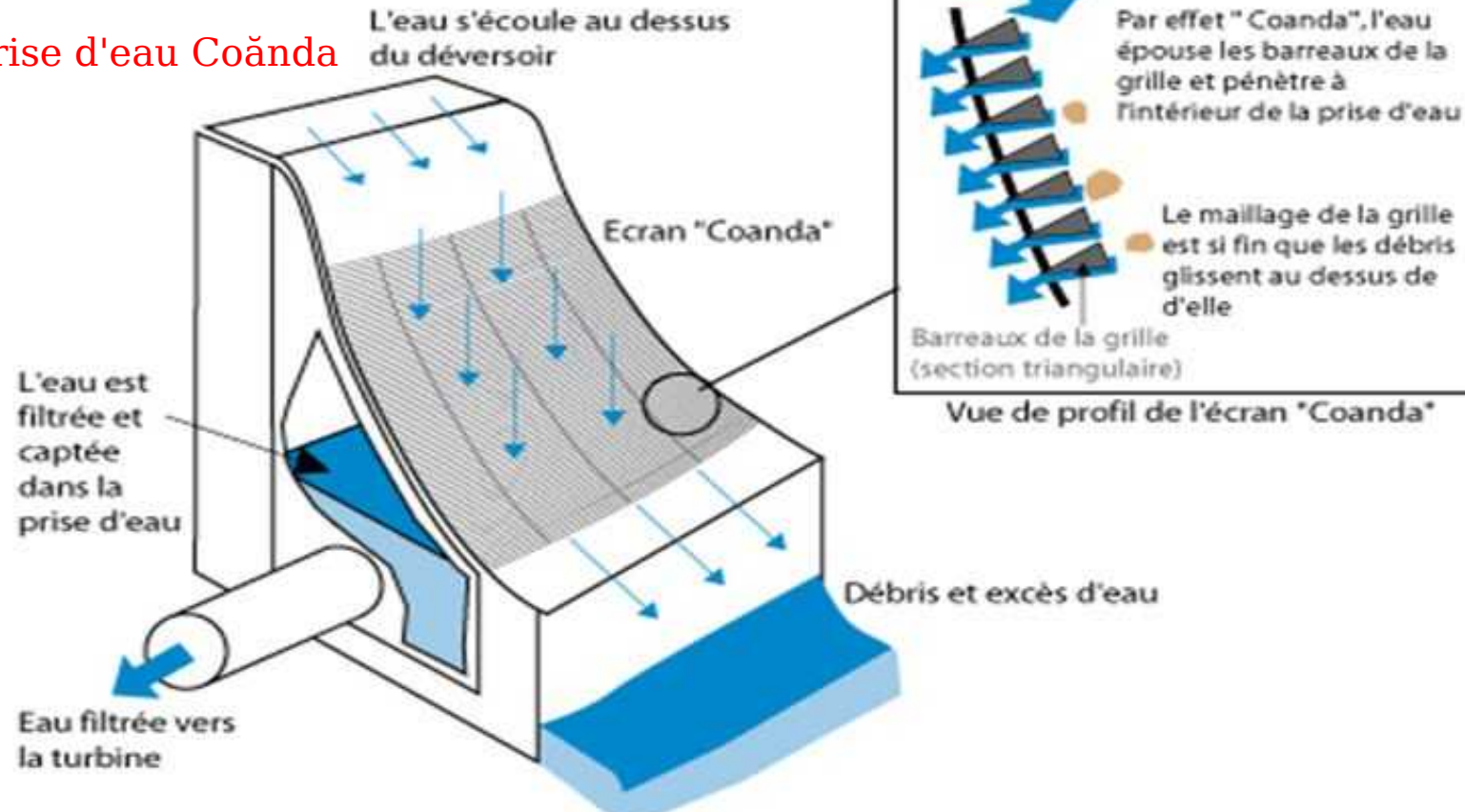


L'effet Coănda

Prise d'eau Coănda



<https://www.edf.fr>

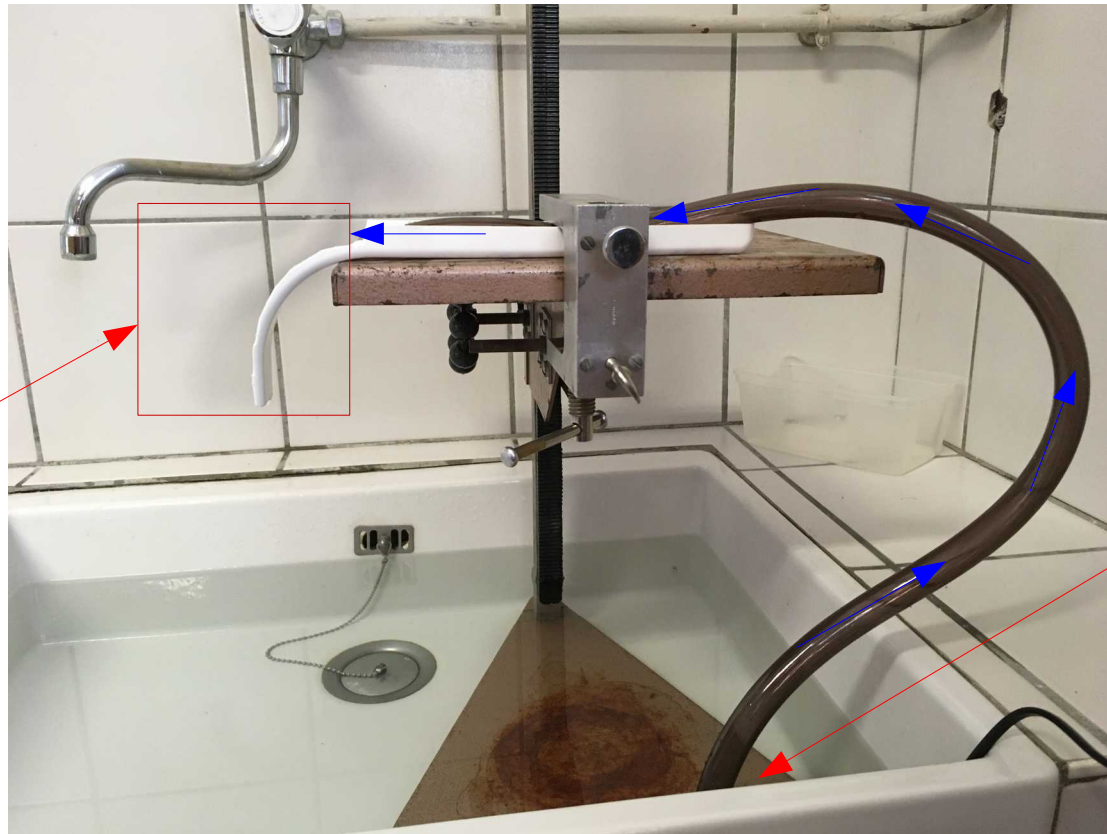
En quoi l'effet Coănda influe-t-il sur la déviation d'un filet d'eau et sur son seuil critique de ruissellement ?

Hypothèses et dispositif expérimental

- .Ecoulement **incompressible** et **stationnaire** d'un fluide **parfait**.
- .Force de viscosité supposée nulle.

Dispositif expérimental

Zone des
mesures



Pompe



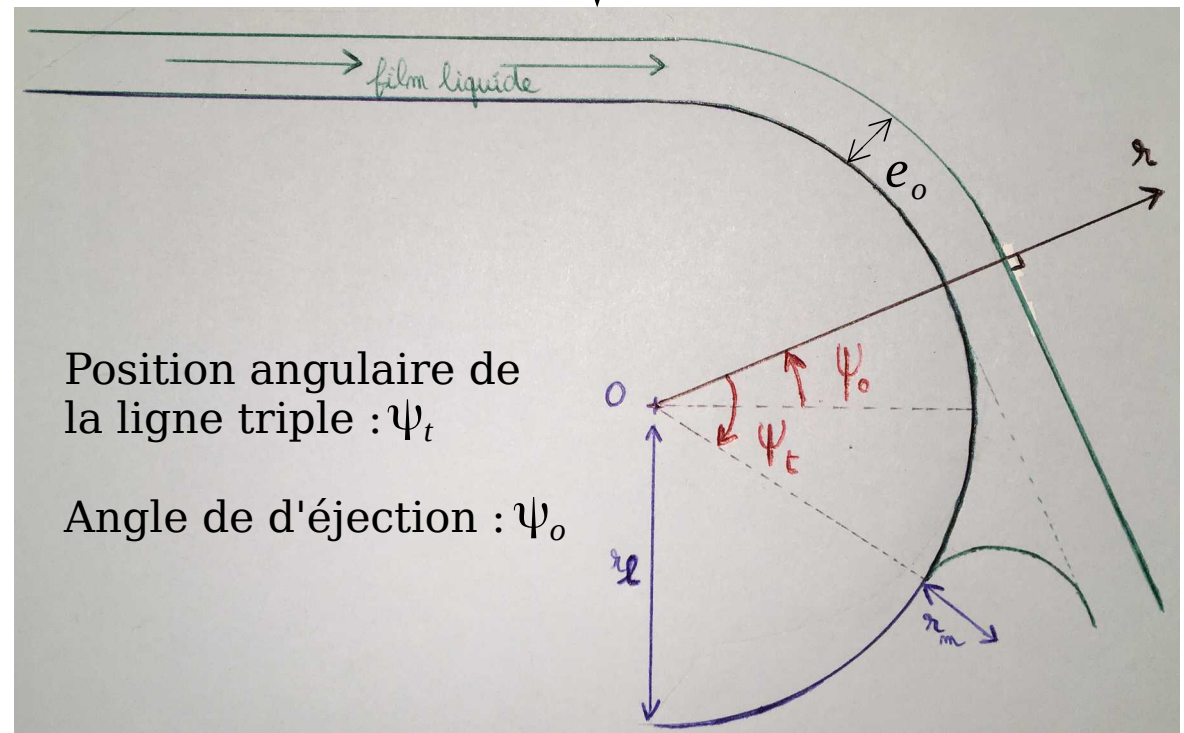
- . Epaisseur variable
- . Ménisque peu visible
- . Vitesse initiale non uniforme

Modélisation du jet

. Epaisseur e_0 supposée constante jusqu'à la déviation.

. Jet supposé rectiligne après déviation.

. Vitesse initiale supposée uniforme



Plan de résolution du problème

I. Etude hydro-capillaire et expression de ψ_t

II. Impact de l'effet Coănda sur ψ_o

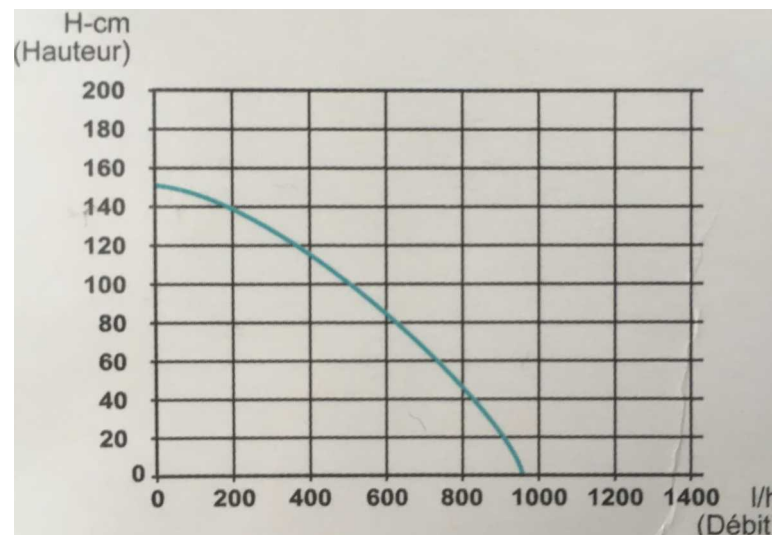
III. Conséquences sur la vitesse seuil de ruissellement

I. 1)

I. Etude hydro-capillaire et expression de ψ_t

1) Mesure de la vitesse de l'eau

- . v_{th} : vitesse de l'eau en sortie du tube (calculée grâce aux caractéristiques de la pompe)
- . v_p : vitesse d'un papier posé sur le filet d'eau



Pompe SERENITY 950 (Neptus)

$v_{th}(m.s^{-1})$	1,4	1,6	1,8	2,0	2,3	2,5
$v_p(m.s^{-1})$	1,5±0,2	1,7±0,2	1,7±0,2	1,9±0,2	2,0±0,2	2,4±0,2

➡ Accès plus aisé à la vitesse moyenne du fluide

1. 2)

2) Lien Pression et ψ_t

. **Loi de Laplace** pour le ménisque :

$$\Delta P = P_D - P_E = \frac{\gamma}{r_m}$$

. **Relations trigonométriques** :

(i) Avec rayon de la languette :

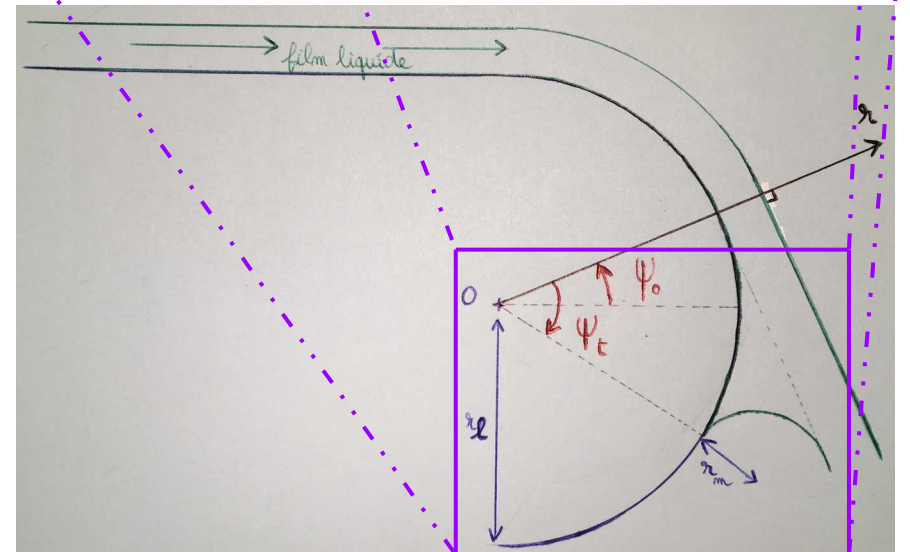
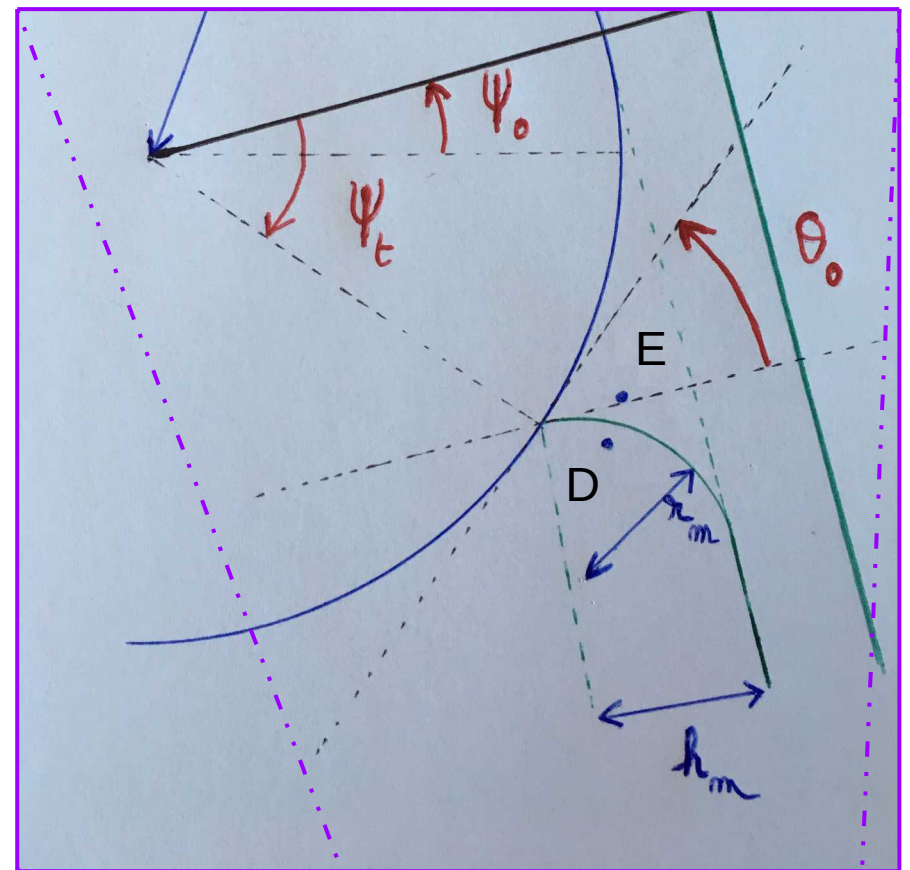
$$h_m = r_l (1 - \cos(\psi_t))$$

(ii) Avec rayon du ménisque :

$$h_m = r_m (1 + \cos(\theta_o - \psi_t))$$

D'où :

$$1 - \cos(\psi_t) = \frac{\gamma}{r_l \Delta P} (1 + \cos(\theta_o - \psi_t))$$



I. 3)

3) Calcul de ΔP et lien entre u et ΔP

Décomposition de ΔP supposée possible :

$$\Delta P = -[(P_C - P_B) + (P_B - P_A)]$$

. Calcul de $P_C - P_B$:

Equation d'Euler projetée perpendiculairement à une ligne de courant :

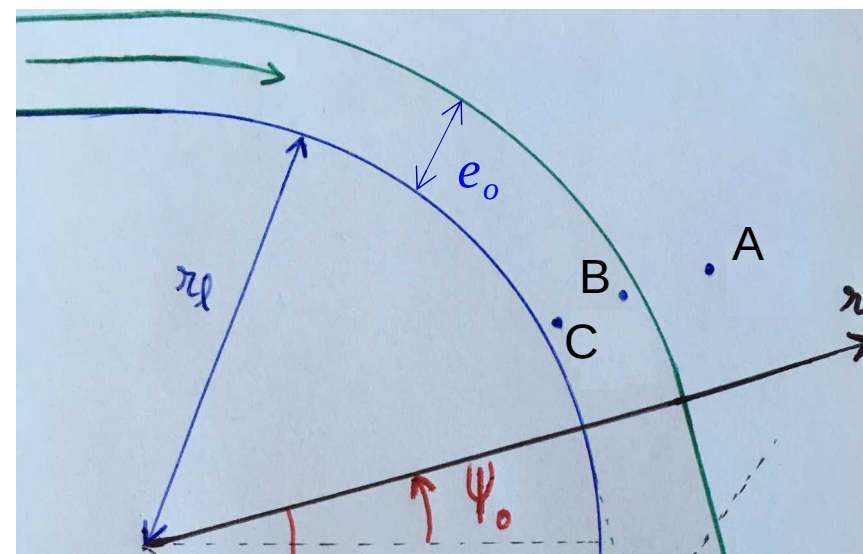
$$-\rho \frac{u(r)^2}{r} = \frac{-\partial P}{\partial r}$$

u supposée uniforme de valeur u_o sur cette zone : $P_C - P_B = -\rho \int_{r_l}^{r_l+e_o} \frac{u(r)^2}{r} dr$

$$\longrightarrow \boxed{P_C - P_B = -\rho u_o^2 \ln\left(1 + \frac{e_o}{r_l}\right)}$$

. Calcul de $P_B - P_A$: Loi de Laplace

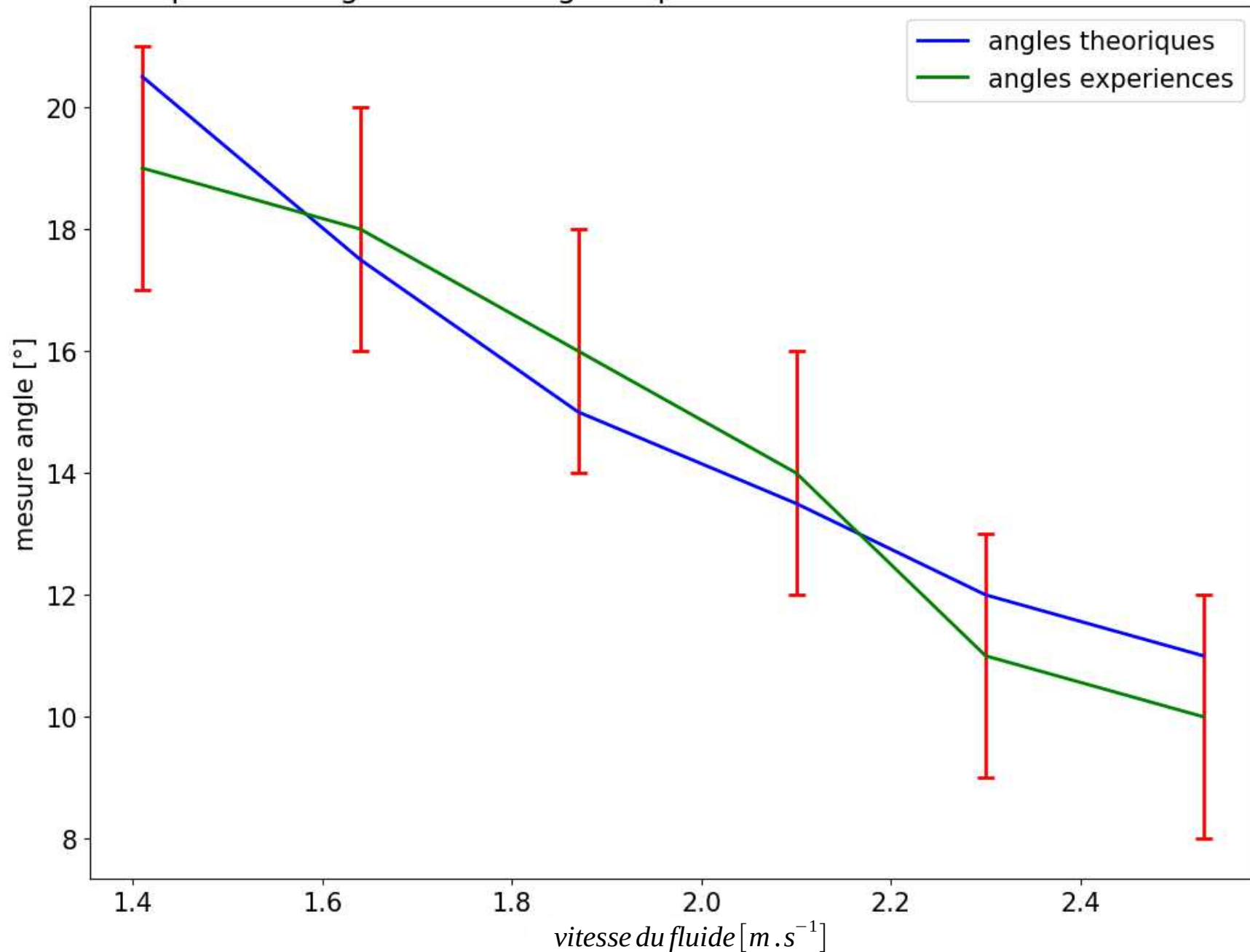
$$\longrightarrow \boxed{P_B - P_A = \frac{\gamma}{r_l + e_o}}$$



I. 3)

Ainsi :
$$\frac{1 - \cos(\psi_t)}{1 + \cos(\theta_o - \psi_t)} = \frac{\gamma}{r_l \Delta P}$$

Variation de la position angulaire de la ligne triple sur le bord en fonction de la vitesse du fluide



II. Impact de l'effet Coănda sur ψ_o

1) Expression finale de la force d'adhésion hydrocapillaire

Force d'adhésion hydrocapillaire en projection selon $\vec{e}_z$:

$$F_{adh} = \iint_{\Sigma} \Delta P \vec{dS} \cdot \vec{e}_z = - \int_{\psi_o + \psi_t}^{\frac{\pi}{2}} \Delta P l \sin(\psi) r_l d\psi$$

Ainsi : $F_{adh} = -r_l l \Delta P \cos(\psi_o + \psi_t)$

➡ $F_{adh} < 0$: cohérent au vue du sens de $\vec{e}_z$.

II. 2)

2) Vers un lien entre ψ_o et ψ_t

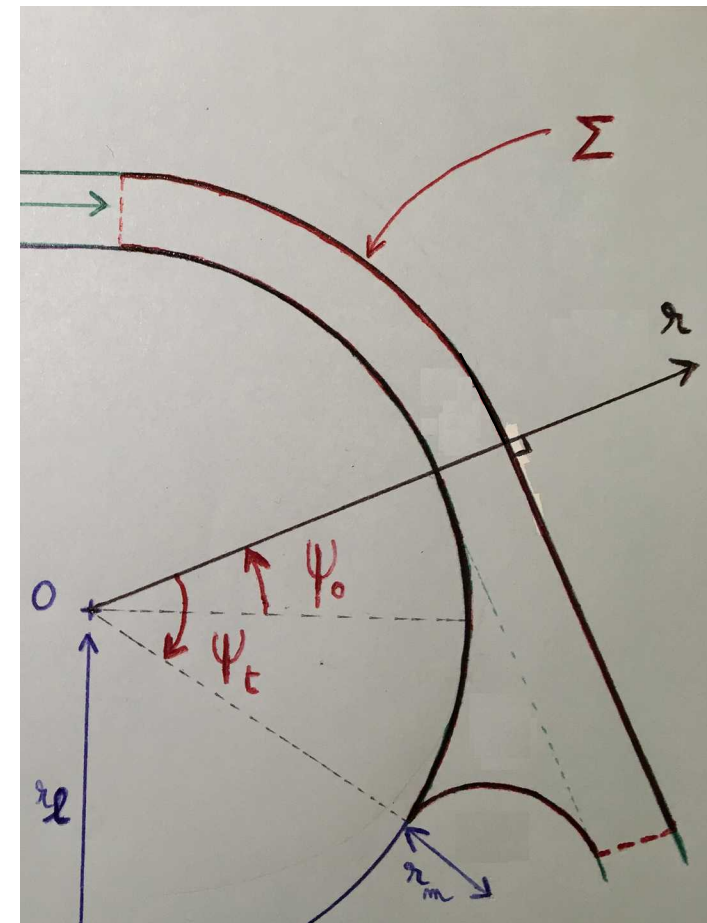
.Théorème de la quantité de mouvement au fluide, projeté selon (Oz) :

$$\iint_{\Sigma} \rho u_o^2 dS = \rho u_o^2 l e_o \cos(\psi_o) = F_{adh} + F_l$$

. Contribution des tensions des lignes aux interfaces liquide-gaz et ligne triple :

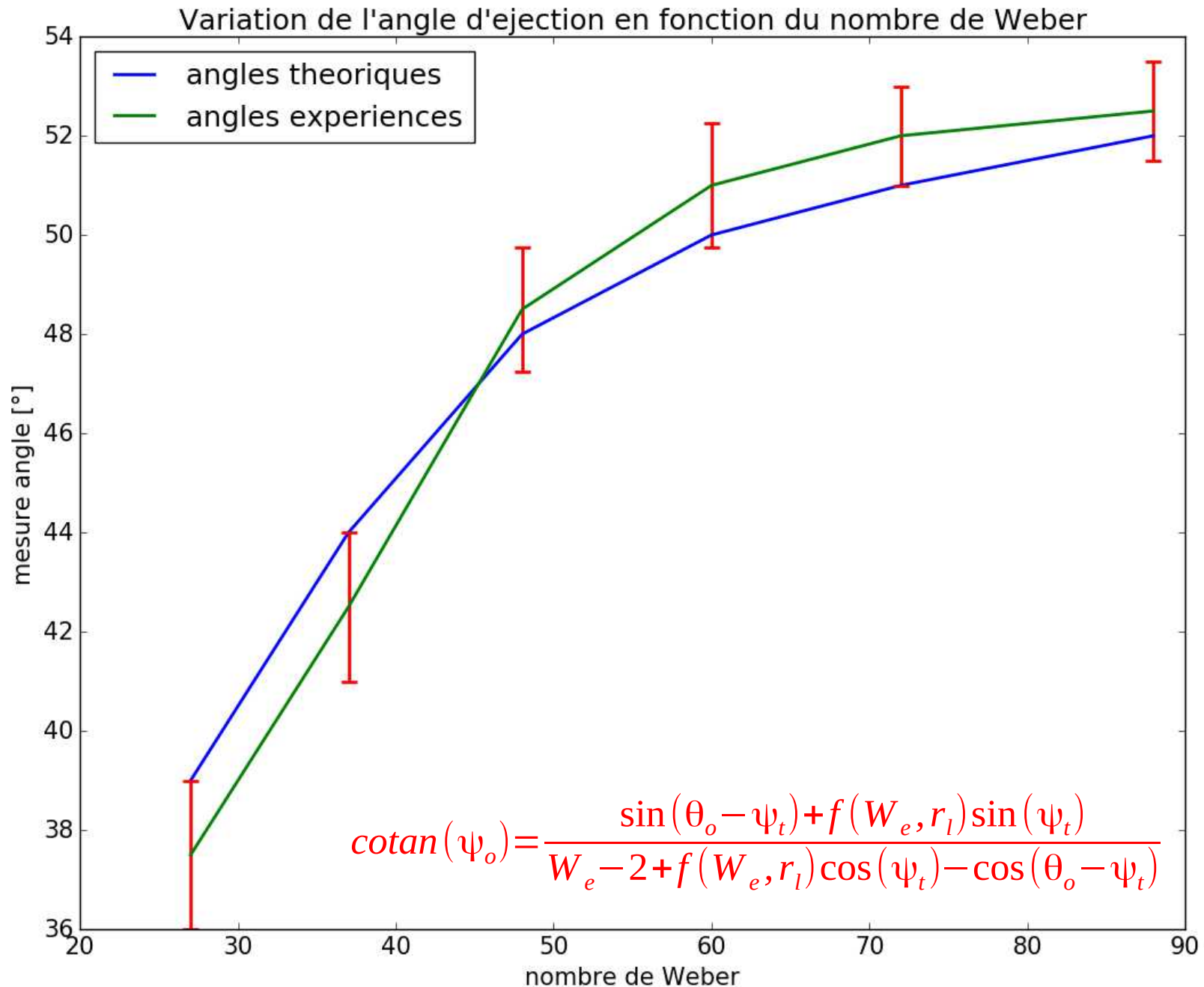
$$F_l = l \gamma (2 \cos(\psi_o) + 0 + \cos(\theta_o - (\psi_o + \psi_t)))$$

.En posant $W_e = \frac{\rho u_o^2 e_o}{\gamma}$ et $f(W_e, r_l) = \frac{W_e r_l}{e_o} \ln(1 + \frac{e_o}{r_l}) - \frac{r_l}{r_l + e_o}$



$$W_e \cos(\psi_o) = 2 \cos(\psi_o) + \cos(\theta_o - (\psi_o + \psi_t)) - f(W_e, r_l) \cos(\psi_o + \psi_t)$$

Expérience 2 : Variation de la vitesse u_o du filet d'eau



Expérience 3 : Variation du rayon de courbure r_l du dispositif

		$\psi_o(u_o=1,5\text{ m.s}^{-1})$	$\psi_o(u_o=2,5\text{ m.s}^{-1})$
$r_{l,1}=2,5\text{ cm}$	théorique	45	55
	expérimentale	42 ± 2	56 ± 2
$r_{l,2}=3,5\text{ cm}$	théorique	43	52
	expérimentale	42 ± 2	55 ± 2
$r_{l,3}=4,5\text{ cm}$	théorique	42	49
	expérimentale	41 ± 2	51 ± 2

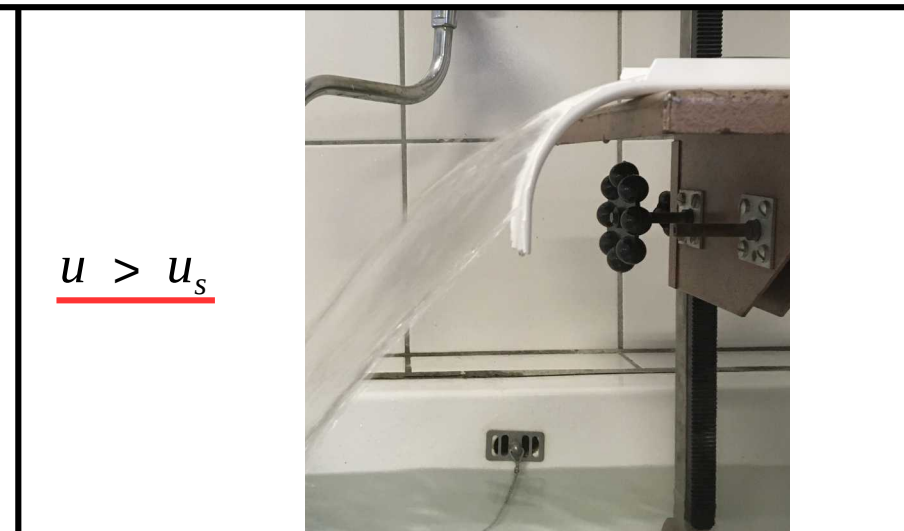
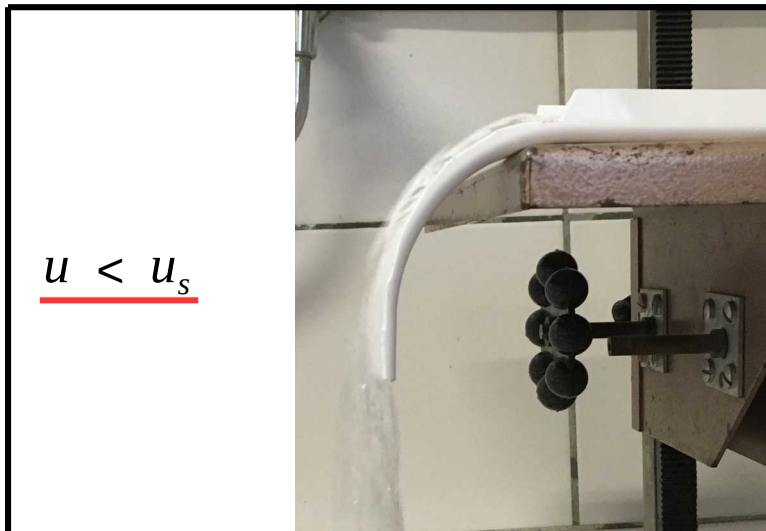
➡ Cohérent car le filet s'éjecte moins lorsque r_l est grand.

III. Conséquences sur la vitesse seuil de ruissellement u_s

u_s est telle que $\psi_o = 0$ et $\psi_t = 90^\circ$ $\longrightarrow$

$$u_s = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho r_l \ln\left(1 + \frac{e_o}{r_l}\right)} \left(1 + \sin(\theta_o) + \frac{r_l}{r_l + e_o}\right)}$$

		$u_s (m.s^{-1})$
$r_{l,1} = 2,5 \text{ cm}$	théorique	0,3
	expérimentale	$0,3 \pm 0,1$
$r_{l,2} = 3,5 \text{ cm}$	théorique	0,4
	expérimentale	$0,5 \pm 0,1$
$r_{l,3} = 4,5 \text{ cm}$	théorique	0,5
	expérimentale	$0,7 \pm 0,1$



Bilan

- . Modélisation pertinente du filet d'eau pour comprendre l'effet étudié.
 - . Couplage hydro-capillaire manifeste, au centre de la démarche.
 - . Seuil critique de ruissellement mis en évidence et quantifié.
-
- . Accès difficile à la vitesse précise du fluide.
 - . Vitesse manifestement pas uniforme dans le filet d'eau.
 - . Profil du filet d'eau à géométrie complexe et non parallélépipédique.

Bibliographie

1. Capillarity and Wetting Phenomena Drops, Bubbles, Pearls, Waves (2005).
Pierre-Gilles de Gennes
Frangoise Brochard-Wyart
David Quere
2. MECANIQUE DES FLUIDES Master 1 GDP (2012-2013).
Ph. Marty
3. Déviation des jets par adhérence à une paroi convexe (1958).
Marcel Kadosch
4. Effets du mouillage en hydrodynamique macroscopique :
traînée, impacts et ruissellement (2009).
Cyril Duez
5. Hydrodynamique, service d'Astrophysique, CEA Saclay & Universite Paris
VI
C. Baruteau

Annexes

Détermination de l'épaisseur du film

• Détermination de e_0 :

La conservation du débit volumique s'écrit :

$$\pi r_{\text{tube}}^2 u_0 = e_0 l u(r_l)$$

$$\text{Donc : } e_0 = \frac{\pi r_{\text{tube}}^2}{l} \times \frac{u_0}{u(r_l)}$$

L'écoulement dans le film étant supposé non visqueux, il n'y a pas de perte d'énergie du film liquide. Donc $u_0 = u(r_l)$.

Ainsi :

$$e_0 = \frac{\pi r_{\text{tube}}^2}{l}$$

Démonstrations I.2)

I.2)

- $\Delta P = P_D - P_E = \gamma \left(\frac{1}{r_m} + \frac{1}{R} \right)$ où $R \gg r_m$.

D'où l'approximation plausible :

$$\Delta P = \frac{\gamma}{r_m}$$

- (i) Avec r_l :

- $r_l - h_m = r_l \cos(\psi_t)$

D'où : $h_m = r_l (1 - \cos(\psi_t))$

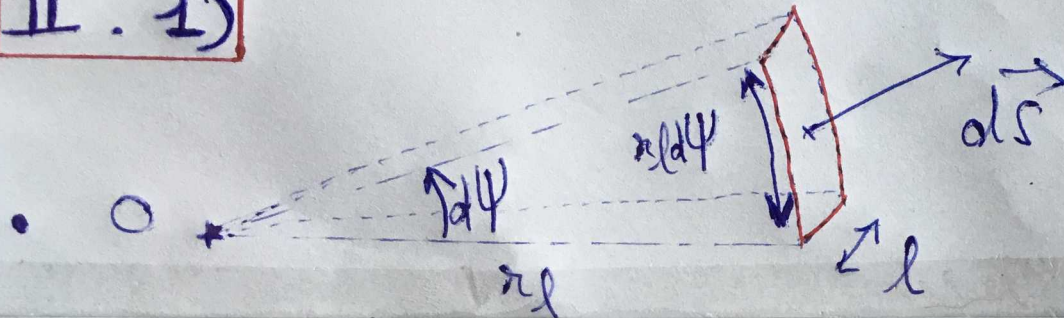
- (ii) Avec r_m :

- $h_m - r_m = r_m \cos(\theta_0 - \psi_t)$

D'où : $h_m = r_m (1 + \cos(\theta_0 - \psi_t))$

Démonstrations II.1)

II. 1)



• De plus : $\vec{dS} \cdot \vec{e}_z \approx r l d\psi \times l \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)$
D'où :

$$F_{adh} = \iint_{\Sigma} \Delta P \vec{dS} \cdot \vec{e}_z = \int_{\psi_0 + \psi_f}^{\frac{\pi}{2}} \Delta P \times l \times \sin(\psi) r l d\psi.$$

Démonstrations II.2)

.Bilan de quantité de mouvement :

II. 2)

• Relation fondamentale de la dynamique, projetée sur (Oz) , au système fermé par Σ :

$$\iint_{\Sigma} \rho u_0^2 d\vec{S} \cdot \vec{e}_z = F_{adh} + Fl$$

Mais $\iint_{\Sigma} \rho u_0^2 d\vec{S} \cdot \vec{e}_z = I_{S,z} - I_{e,z}$

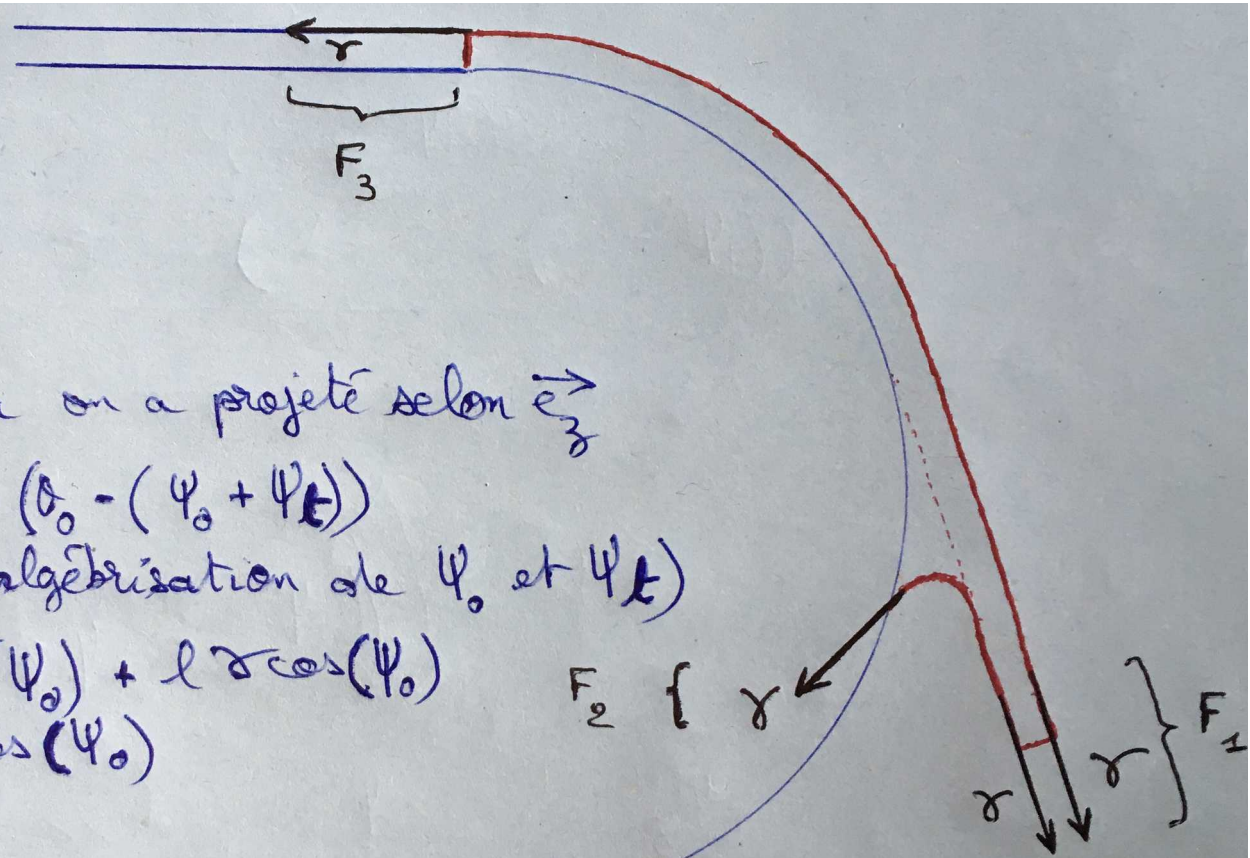
$= \rho_0 l \rho u_0^2 \cos(\psi_0) - 0$

(théorème d'Euler)
(car fluide parfait et incompressible et écoulement permanent)

↑
car on a projeté selon $\vec{e}_z$.

Donc $F_{adh} + Fl = \rho u_0^2 l \cos(\psi_0)$

Expression de F_l :



$F_l = F_1 + F_2 + F_3$

- ① $F_3 = 0$ car on a projeté selon $\vec{e}_z$
- ② $F_2 = l\gamma \cos(\theta_0 - (\psi_0 + \psi_t))$
(au vue de l'algébrisation de ψ_0 et ψ_t)
- ③ $F_1 = l\gamma \cos(\psi_0) + l\gamma \cos(\psi_0)$
 $= 2l\gamma \cos(\psi_0)$

D'où :

$$F_l = l\gamma \left(\cos(\theta_0 - (\psi_0 + \psi_t)) + 2\cos(\psi_0) \right)$$

Lien $\psi_0 - \psi_t$:

• On pose $W_e = \frac{\rho u_0^2 e_0}{\gamma}$ et $f(W_e, r_l) = \frac{W_e r_l}{e_0} \ln\left(1 + \frac{e_0}{r_l}\right) - \frac{r_l}{r_l + e_0}$
 Ainsi, d'après II. 1) et II. 2) ① :

$$\rho u_0^2 l e_0 \cos(\psi_0) = r_l l \left(\frac{\gamma}{r_l + e_0} - \rho u_0^2 \ln\left(1 + \frac{e_0}{r_l}\right) \right) \cos(\psi_0 + \psi_t) + l \gamma [\cos(\theta_0 - (\psi_0 + \psi_t)) + 2\cos(\psi_0)]$$

En divisant par l et γ :

$$W_e \cos(\psi_0) = \frac{1}{\gamma} \underbrace{\left(\frac{\gamma r_l}{r_l + e_0} - \rho u_0^2 r_l \ln\left(1 + \frac{e_0}{r_l}\right) \right)}_{- \gamma f(W_e, r_l)} \cos(\psi_0 + \psi_t) + \cos(\theta_0 - (\psi_0 + \psi_t)) + 2\cos(\psi_0)$$

D'où:

$$W_e \cos(\psi_0) = 2\cos(\psi_0) + \cos(\theta_0 - (\psi_0 + \psi_t)) - f(W_e, r_l) \cos(\psi_0 + \psi_t)$$

Expression de ψ_0 :

II. 2) (bis)

1) après II. 2) :

$$(W_e - 2) \cos(\psi_0) = -f(W_e, \lambda l) [\cos(\psi_0) \cos(\psi l) - \sin(\psi_0) \sin(\psi l)] + \cos(\psi_0 + \psi l - \theta_0)$$

$$\Rightarrow (W_e - 2) \cos(\psi_0) = -f(W_e, \lambda l) [\cos(\psi_0) \cos(\psi l) - \sin(\psi_0) \sin(\psi l)] + \cos(\psi_0) \cos(\psi l - \theta_0) - \sin(\psi_0) \sin(\psi l - \theta_0)$$

$$\Rightarrow (W_e - 2) \cotan(\psi_0) = -f(W_e, \lambda l) [\cos(\psi l) \cotan(\psi_0) - \sin(\psi l)] + \cotan(\psi_0) \cos(\psi l - \theta_0) - \sin(\psi l - \theta_0)$$

$$\Rightarrow \cotan(\psi_0) [W_e - 2 + f(W_e, \lambda l) \cos(\psi l) - \cos(\psi l - \theta_0)] = -\sin(\psi l - \theta_0) + f(W_e, \lambda l) \sin(\psi l)$$

2) où :

$$\cotan(\psi_0) = \frac{\sin(\theta_0 - \psi l) + f(W_e, \lambda l) \sin(\psi l)}{W_e - 2 + f(W_e, \lambda l) \cos(\psi l) - \cos(\psi l - \theta_0)}$$

Démonstration II.3)

II.3) u_s est telle que $\psi_0 = 0$ et $\psi_t = 90^\circ$.

Donc, d'après I.3):

$$\frac{1}{1 + \cos(\theta_0 - \frac{\pi}{2})} = \frac{\gamma}{rl \left(\rho u_s^2 \ln\left(1 + \frac{e_0}{rl}\right) - \frac{\gamma}{rl + e_0} \right)}$$

Donc
$$\rho u_s^2 \ln\left(1 + \frac{e_0}{rl}\right) - \frac{\gamma}{rl + e_0} = \frac{\gamma}{rl} \left(1 + \cos\left(\theta_0 - \frac{\pi}{2}\right) \right)$$

Donc
$$\rho u_s^2 \ln\left(1 + \frac{e_0}{rl}\right) = \frac{\gamma}{rl + e_0} + \frac{\gamma}{rl} (1 + \sin(\theta_0))$$

D'où:

$$u_s = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho \ln\left(1 + \frac{e_0}{rl}\right) rl} \left(\frac{rl}{rl + e_0} + 1 + \sin(\theta_0) \right)}$$