TD 28 Elec

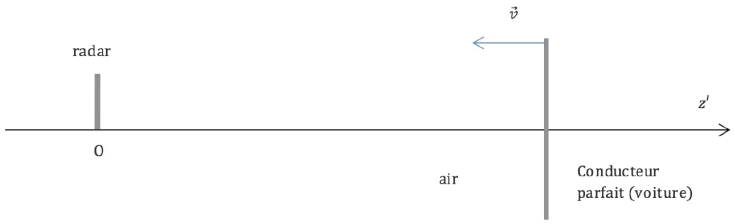
Exercice 1 *D'après E3A 18*

1 - Décalage Doppler

L'effet Doppler est la modification de la fréquence d'une onde lorsque l'émetteur et le récepteur sont en mouvement relatif. Si la distance entre émetteur et récepteur diminue, la fréquence perçue est plus élevée que la fréquence émise par l'émetteur, et inversement.

1 - Citer un exemple de la vie courante illustrant l'effet Doppler.

On s'intéresse au cas de l'onde émise par le radar qui se réfléchit sur une voiture, modélisée par un plan conducteur parfait se déplaçant à une vitesse constante v en direction du radar. On cherche à déterminer la fréquence de l'onde réfléchie par la voiture au niveau de l'antenne du radar. Pour cela, on choisit d'une part de garder un modèle d'onde plane pour l'onde émise, d'autre part de placer l'origine d'un axe (Oz') au niveau de l'antenne.



Au voisinage du radar, l'onde émise a pour expression $s(t,0) = \mathrm{S}_0 e^{j\omega t}$. On appelle d_0 la distance entre la voiture et le radar à la date $t = 0$.

2 - Déterminer l'expression de l'onde au niveau de la voiture de position $z'(t)$ en fonction de S_0, ω, c, v et d_0.

3 - En déduire que l'onde reçue au niveau du véhicule a une fréquence apparente $f' = f \times (1 + v/c)$.

La relation précédente décrit l'effet Doppler dans le cas d'un émetteur fixe et d'un récepteur mobile se rapprochant à la vitesse v. Dans le cas opposé (récepteur fixe, émetteur se rapprochant à la vitesse), la fréquence de l'onde réceptionnée est $f'' = \frac{f'}{1-v/c}$

4 - Montrer que dans le cas où $v \ll c$, la fréquence de l'onde réceptionnée après réflexion sur le véhicule s'exprime de manière approchée : $f_r \approx f + 2vf/c$. Dans la suite, on notera $f_\mathrm{D} = 2vf/c$.

5 - Comparer pour une onde électromagnétique de fréquence $f = 1$ GHz les valeurs f et f_r pour des valeurs usuelles de v. Que penser d'une mesure directe par un CAN de f_r dans le but d'en déduire f_D ? On argumentera la réponse en évaluant les conditions de stockage de l'information.

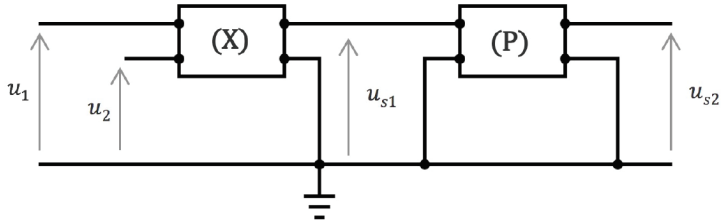
2 - Mesure de la fréquence Doppler

On niveau de l'antenne du radar, on dispose de deux tensions sinusoïdales correspondant aux ondes électromagnétiques émise et réceptionnée par le radar. On note :

- $u_1(t) = u_{1m}\cos(\omega_1 t)$ la tension correspondant à l'onde émise ($\omega 1 = 2\pi f$).
- $u_2(t) = u_{2m}\cos(\omega_2 t + \varphi)$ la tension correspondant à l'onde réfléchie ($\omega 2 = 2\pi fr$).

  On rappelle que les résultats de la partie D conduisent à définir une fréquence $f_\mathrm{D} = f_r - f \ll f_r$ telle que $f_\mathrm{D} \ll f_r$ et $f_\mathrm{D} \ll f$ et ayant pour expression : $f_\mathrm{D} = 2f\frac{v}{c}$.

Le schéma de principe de la mesure du décalage en fréquence fD est donné ci-dessous :



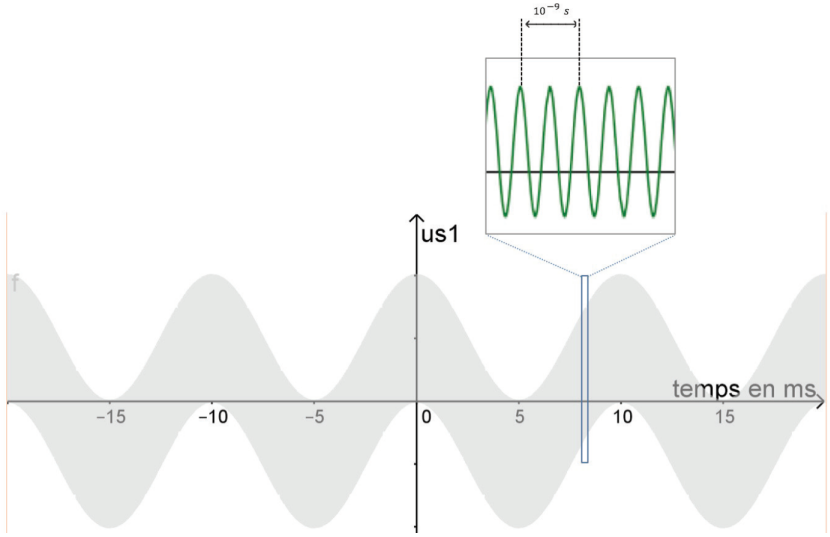
Le multiplieur (X) réalise l'opération : $u_{s1}(t) = \mathrm{K}u_1(t) \times u_2(t)$.

1 - Linéariser l'expression de $u_{s1}(t)$.

2 - En déduire l'allure du spectre en amplitude de la tension $u_{s1}(t)$.
3 - Quelle doit-être la fonction du quadripôle (P) pour obtenir une tension de sortie sous la forme :

$$u_{s2}(t) \approx \mathrm{K}' \cos(2\pi f_{\mathrm{D}} t + \varphi)$$

4 - Proposer, en justifiant, une structure électrique pour ce quadripôle ainsi que des valeurs réalistes pour les composants choisis si on veut mesurer des vitesses de l'ordre de 30 m.s^{-1}. On donne ci-dessous la courbe représentant $u_{s1}(t)$ et un zoom sur une petite portion de celle-ci.



5 - Justifier l'allure de cette courbe.
6 - Représenter sur votre copie l'allure de la courbe $u_{s2}(t)$ en indiquant l'échelle de temps.
7 - Déterminer la vitesse de la voiture.

3 - Le radar FMCW

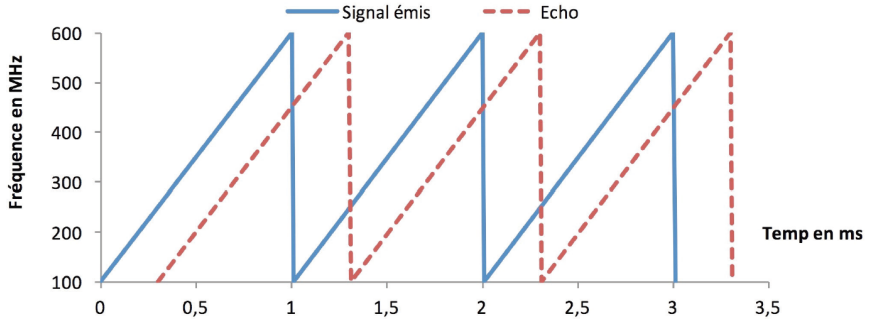
Le radar à onde continue tel qu'il a été présenté plus haut ne permet pas de mesurer la distance du radar à la cible, ce qui est problématique dans le cas d'une utilisation dans l'aviation ou la marine. Une possibilité pour y remédier est d'utiliser un radar à onde continue modulé en fréquence. Ce radar émet un « chirp », signal sinusoïdal dont la fréquence instantanée évolue au cours du temps. D'une manière générale, on peut écrire $s(t) = s_0 \cos(\varphi(t))$ et définir une fréquence instantanée :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

Dans le cas d'un radar FMCW, le signal émis est défini par :

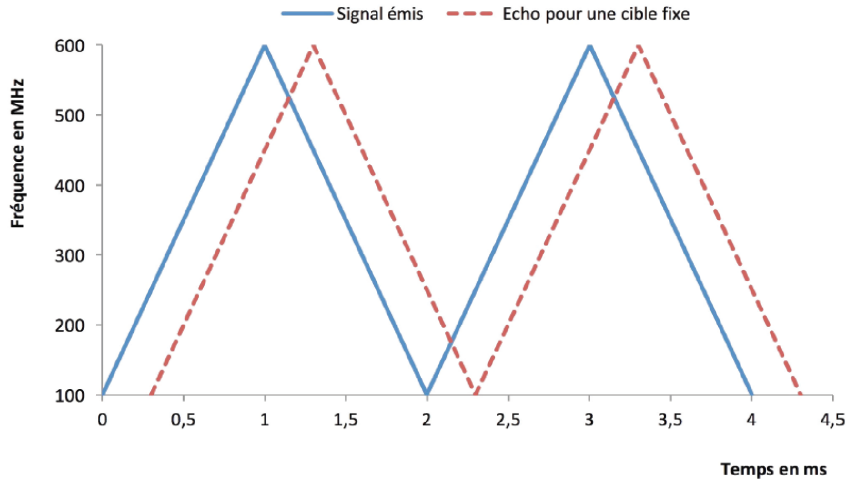
$$s(t) = s_0 \cos\left(2\pi\left(f_0 t + \frac{\mathrm{B}}{2\mathrm{T}}t^2\right)\right) \text{ pour } 0 < t < \mathrm{T}$$

et est émis avec une période de répétition T. On donne ci-dessous le graphique représentant la fréquence instantanée $f(t)$ du signal émis et celle $f_r(t)$ de l'écho dans le cas où le radar vise une cible fixe à la distance d_0.



1 - Déterminer l'expression littérale de la fréquence $f(t)$ du signal $s(t)$.
2 - À l'aide du graphique, déterminer f_0, B et T.
3 - On appelle $f_m = f - f_r$ le décalage en fréquence entre le signal émis et le signal réfléchi. Ce décalage peut être mesuré par une méthode analogue à celle décrite dans la partie précédente pour mesurer f_{D}. Déterminer la distance d_0 en fonction de f_m, B, T et c.
4 - Si l'on souhaite obtenir une précision de 1 m sur la distance de la cible, avec quelle précision doit-on mesurer f_m ? Commenter.
5 - Quelle est la distance maximale à laquelle la cible peut se trouver sans qu'il n'y ait ambiguïté dans la mesure ? Faire l'application numérique et commenter.

6 - On considère maintenant que la cible est en mouvement, par exemple qu'elle se rapproche du radar avec une vitesse v. Peut-on alors accéder à la vitesse et à la distance de la cible ? Justifier.
Pour pallier ce problème, on peut choisir une modulation triangulaire de la fréquence de l'onde émise, comme indiqué sur la figure ci-dessous. On effectue alors deux mesures du décalage en fréquence entre les signaux émis et réfléchis, Δf_a sur la partie ascendante de la variation de fréquence et Δf_b sur la partie descendante.



7 - Comment peut-on accéder à f_m et f_D à l'aide des valeurs de Δf_a et Δf_b ? On pourra supposer que $f_\mathrm{D} < fm$.
8 - Application numérique : on mesure $\Delta f_a = 10,000600\mathrm{MH}z$ et $\Delta f_b = -9,999400\mathrm{MH}z$. Déterminer la vitesse de la cible (supposée se rapprocher du radar) et sa distance au radar en considérant qu'au moment de l'émission, la fréquence était de 500 MHz.

Exercice 1

4 - Décalage Doppler

1 - Le son émis par une sirène d'une ambulance se déplaçant devant un piéton est un exemple d'effet Doppler.
2 - L'onde au niveau de la voiture est donnée par

$$s(t,z') = \mathrm{S}_0 e^{j(\omega t - z'/c)}$$

La voiture se déplaçant à la vitesse v, il vient :

$$s(t,z') = \mathrm{S}_0 e^{j(\omega t - (d_0 - vt)/c}$$

3 - La réécriture de cette onde est :

$$s(t,z') = \mathrm{S}_0 e^{j(\omega(1+v/c)t - d_0/c}$$

On en déduit que la nouvelle pulsation est :

$$\omega' = \omega(1+v/c) \quad \text{soit} \quad f' = f(1+v/c)$$

4 - En faisant un développement limité au premier ordre en v/c :

$$f'' = f'(1+v/c+o(v/c)) = f(1+v/c) \times (1+v/c+o(v/c))$$

On en déduit que :

$$f'' = f(1+2v/c+o(v/c))$$

5 - Pour un déplacement de 30 $\mathrm{m.s}^{-1}$, le décalage en fréquence est de 200 Hz. D'après le théorème de Shanon, pour mesurer une fréquence de 1 GHz, il faut une fréquence d'échantillonnage de

$$\mathrm{F}_e = 2f = 2 \text{ Ghz} \quad \text{soit} \quad \mathrm{T}_e = \frac{1}{\mathrm{F}_e} = 0{,}5 \text{ ns}$$

Cette dernière n'est pas accessible au CAN de premier prix.
De plus, pour mesurer avec une précision de $f_\mathrm{D} \approx 200$ Hz la fréquence f, il faut une durée d'acquisition de

$$\mathrm{T}_{total} = \frac{1}{f_\mathrm{D}} \approx 5 \text{ ms}$$

Il faut donc une collection d'échantillon de

$$\mathrm{N} = \frac{\mathrm{T}_{total}}{\mathrm{T}_e} = 10^7 \, points$$

Il faudrait donc un processeur performant pour traiter l'information !

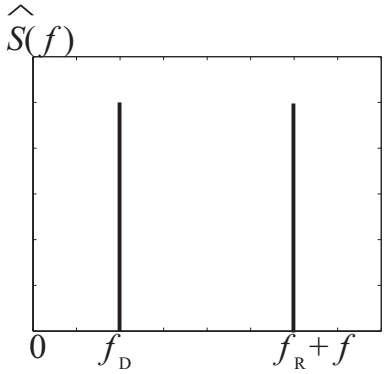
J.B

5 - Mesure de la fréquence Doppler

1 - Linéarisons la valeur de u_{s1} :

$$u_{s1}(t) = \frac{\mathrm{K}u_{2m}u_{1m}}{2}\Big(\cos\left((\omega_1+\omega_2)t+\phi\right)+\cos\left((\omega_2-\omega_1)t+\phi\right)\Big)$$

2 - Le spectre présente deux pics :



3 - Le quadripole doit être un filtre passe bas de fréquence de coupure supérieure à f_{D}.
4 - On peut proposer un filtre RC avec $\mathrm{R} = 1$ kΩ et $\mathrm{C} = 10$ nF.
5 - On observe la superposition d'une oscillation rapide avec une oscillation lente.
6 - Un filtre passe bas permettra de récupérer l'oscillation lente moyenne soit une sinusoïde de période 10 ms
7 - Comme $f_{\mathrm{D}} = 2v/c \times f$, on en déduit que

$$v = 15 \text{ m.s}^{-1}$$

6 - Le radar FMCW

1 - Par identification : $\phi = 2\pi(f_0 t + \frac{\mathrm{B}t^2}{2\mathrm{T}})$, on en déduit que

$$f(t) = f_0 + \frac{\mathrm{B}t}{\mathrm{T}}$$

2 - Par lecture graphique, la période du signal est $\mathrm{T} = 1$ ms, on en déduit que

$$f_0 = 100 \text{ MGHz} \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = 500 \text{ MHz}$$

3 - L'écho est décalé de $\tau \approx 0{,}3$ ms. Pour un aller et retour :

$$2d_0 = c \times \tau$$

Le décalage en fréquence entre l'onde émise et reçue vaur alors

$$f_m \approx 150 \text{ MHz} = \frac{\mathrm{B}\tau}{\mathrm{T}}$$

Ainsi la distance vaut :

$$d_0 = \frac{c\tau}{2} = \frac{c\mathrm{T}f_m}{2\mathrm{B}} = 45 \text{ km}$$

4 - Si l'on veut une précision de 1 m, la relation précédente impose :

$$\Delta f_m = \frac{2\mathrm{B}}{c\mathrm{T}}\Delta d_0 \approx 3 \text{ kHz}$$

5 - Pour éviter les ambiguités sur les mesures, il est nécéssaire que le décalage soit inférieur à la période soit :

$$\tau < \mathrm{T}$$

On en déduit que

$$d_{max} = \frac{c\mathrm{T}}{2} = 150 \text{ km}$$

Il y a peu de chance que le signal reçu ait alors l'amplitude suffisante....
6 - L'écart de fréquence devient alors :

$$f_m = f(t) - (f(t-\tau) + f_{\mathrm{D}}) = \frac{2\mathrm{B}d_0}{c\mathrm{T}} - 2fv/c$$

Il n'y a qu'une équation pour deux inconnues v et d_0.
7 - Les décalages sont alors de :

$$\Delta f_a = \frac{2\mathrm{B}d_0}{c\mathrm{T}} - 2fv/c \quad \text{et} \quad \Delta f_b = -\frac{2\mathrm{B}d_0}{c\mathrm{T}} - 2fv/c$$

La somme des décalages permet de retrouver la vitesse :

$$\Delta f_a + \Delta f_b = -4fv/c$$

La différence permet de retrouver la distance :

$$\Delta f_a - \Delta f_b = \frac{4\mathrm{B}d_0}{c\mathrm{T}}$$

8 - Avec les valeurs annoncées :

$$v = 180 \text{ m.s}^{-1} \quad \text{et} \quad d_0 = 3 \text{ km}$$