

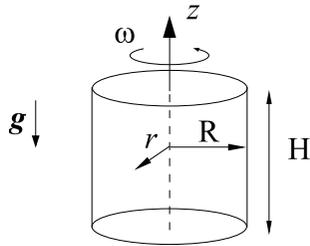


# TD 26 Physique statistique

## Exercice 1

*D'après Mines-Ponts 05*

Un réservoir cylindrique de rayon  $R$ , de hauteur  $H$ , est rempli complètement par un fluide de masse volumique  $\mu_0$  au repos. Le réservoir tourne à une vitesse angulaire  $\omega$  constante autour de l'axe vertical ( $Oz$ ) du cylindre; il entraîne le fluide dans son mouvement. On se place en régime permanent. On note  $g$  l'intensité du champ de pesanteur et  $r$  la distance à l'axe de rotation. Les phénomènes ne dépendront explicitement que de la variable radiale  $r$ .



1 - Montrer que la pression  $P(r)$  satisfait l'équation différentielle

$$\frac{dP}{dr} = \omega^2 r \mu(r)$$

On précisera le phénomène décrit par cette équation et le référentiel dans lequel elle s'applique. On négligera la dépendance de  $P$  selon la cote  $z$ .

2 - On suppose dans cette question que la masse volumique  $\mu_0$  est constante, ce que l'on exprime en disant que le fluide est incompressible. Quelle est, sous cette hypothèse, la loi de la distribution de la pression? On notera  $P(r=0) = P_0$ .

3 - Le fluide est un gaz parfait d'équation d'état  $P(r) = k_B T \mu(r)/m$ , où  $m$  la masse d'une molécule de fluide et  $k_B$  la constante de Boltzmann. Ce gaz est en équilibre thermique. Trouver la loi de la distribution de la pression; cette loi est déterminée ici à une constante multiplicative près, qui est déterminée dans la question qui vient.

4 - En exprimant la conservation de la masse, et en notant  $P_0$  la pression au repos, établir la relation

$$P(r) = P_0 \left( \frac{mR^2\omega^2}{2k_B T} \right) \frac{\exp\left(\frac{m\omega^2 r^2}{2k_B T}\right)}{\exp\left(\frac{m\omega^2 R^2}{2k_B T}\right) - 1} \quad \text{avec} \quad P_0 \left( \frac{mR^2\omega^2}{2k_B T} \right) = \frac{\mu_0 R^2 \omega^2}{2}$$

## Exercice 1

1 - Dans le référentiel tournant à la vitesse angulaire  $\vec{\omega}$ , un élément de volume  $d\tau$  est soumis à

- son poids  $\vec{P} = -\mu g d\tau \vec{e}_z$ ;
- les forces de pression  $-\text{grad} P d\tau$ ;
- à la force d'inertie d'entraînement  $\vec{F}_{ie} = \mu r \omega^2 d\tau \vec{e}_r$ ;
- à la force d'inertie de Coriolis, nulle puisque l'élément est immobile.

À l'équilibre mécanique, nous pouvons écrire

$$-\text{grad} P d\tau + \vec{P} + \vec{F}_{ie} = \vec{0}$$

Soit, suivant  $\vec{e}_r$

$$\frac{dP}{dr} = \mu r \omega^2$$

Cette équation traduit l'équilibre radial d'un élément de volume  $d\tau$ , soumis aux forces pressantes et à la force d'inertie d'entraînement.

2 - Si le fluide est incompressible, alors l'équation précédente s'intègre sous la forme

$$P = P_0 + \frac{\mu_0 \omega^2 r^2}{2}$$

3 - L'équation devient

$$\frac{dP}{dr} = \frac{m\omega^2}{k_B T} P(r) r$$

soit

$$\frac{dP}{P} = \frac{m\omega^2}{k_B T} r dr$$

Par intégration, la température étant constante, il vient

$$P(r) = C^{\text{te}} \exp\left(\frac{m\omega^2 r^2}{k_B T}\right)$$

4 - La conservation de la masse impose que la masse au repos est la même qu'en mouvement. Découpons le cylindre en tore de hauteur H, de rayon  $r$  et d'épaisseur  $dr$ , sa masse vaut  $\mu(r)H2\pi r dr$ ,

$$d'o\grave{u} \quad \pi R^2 H \mu_0 = \int_0^R \mu(r) 2\pi H r dr$$

Remplaçons  $\mu$  par son expression en fonction de la pression, il vient, en simplifiant par  $\pi H$

$$R^2 \mu_0 = \int_0^R \frac{mP(r)}{k_B T} r dr = \int_0^R \frac{m}{k_B T} C^{te} \exp\left(\frac{m\omega^2 r^2}{k_B T}\right) r dr$$

d'o\grave{u}

$$C^{te} = P_0 \left( \frac{mR^2\omega^2}{2k_B T} \right) \frac{1}{\exp\left(\frac{m\omega^2 R^2}{2k_B T}\right) - 1}$$

On retrouve bien la formule annoncée.

### Exercice 2

*D'après Oral 2018*

L'air atmosphérique est composé essentiellement de diazote  $N_2$  de masse molaire  $M_{N_2} = 28 \text{ g.mol}^{-1}$  et de dioxygène  $O_2$  de masse molaire  $M_{O_2} = 32 \text{ g.mol}^{-1}$ . Au niveau de la mer, les fractions molaires de ces deux gaz sont telles que  $x_{N_2} \sim 4x_{O_2}$ . Dans le modèle de l'atmosphère isotherme à  $T = 290 \text{ K}$ , calculer le rapport  $\frac{x_{N_2}}{x_{O_2}}$  à 4 000 m d'altitude.

*Données :*

- Constante de Boltzmann :  $k_B = 1,38.10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$
- Nombre d'Avogadro :  $\mathcal{N}_A = 6,02.10^{23} \text{ mol}^{-1}$

### Exercice 2

La probabilité de trouver une molécule à l'altitude  $z$  est donnée par la loi de Boltzmann :

$$\mathcal{P}_{N_2} = A e^{-m_{N_2}gz/k_B T} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{O_2} = B e^{-m_{O_2}gz/k_B T}$$

On en déduit que les fractions massiques suivent une loi analogue :

$$x_{N_2} = A' e^{-m_{N_2}gz/k_B T} \quad \text{et} \quad x_{O_2} = B' e^{-m_{O_2}gz/k_B T}$$

d'o\grave{u}

$$\frac{x_{N_2}}{x_{O_2}} = C^{te} e^{-(m_{N_2}-m_{O_2})gz/k_B T}$$

La détermination de la constante s'obtient à l'aide de la condition limite :

$$\frac{x_{N_2}}{x_{O_2}}(z = 0) = 4$$

En remplaçant les expressions obtenues :

$$\frac{x_{N_2}}{x_{O_2}} = 4 e^{-(m_{N_2}-m_{O_2})gz/k_B T}$$

Avec les valeurs numériques, on obtient

$$\frac{x_{N_2}}{x_{O_2}} = 4 \times e^{-\frac{(28-32) \times 10^{-3} / 6,02 \cdot 10^{23} \times 9,81 \times 4 \cdot 10^3}{1,38 \cdot 10^{-23} \times 290}} = 4,27$$

### Exercice 3

*D'après CCP 17*

Dans le cas du proton (noyau d'hydrogène) qui tourne sur lui-même (rotation propre de vecteur de rotation autour d'un axe  $Oz$ ), on peut lui associer un moment magnétique  $\vec{\mu}_P$ . Placé dans un champ magnétique extérieur uniforme permanent  $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$ , on rappelle l'expression de l'énergie potentielle  $E_{pot} = -\vec{\mu}_P \cdot \vec{B}$ . On admet que le dipôle est colinéaire au champ magnétique et ne peut prendre que deux directions possibles :  $\pm \vec{e}_z$

Nous considérons qu'une population de dipôles, placés dans un champ magnétique extérieur de 1 tesla, en équilibre thermique à la température  $T$ , obéit à la statistique de Boltzmann.

1 - Rappeler, à un facteur multiplicatif près, l'expression de la probabilité d'occuper un état d'énergie  $E$  par un dipôle.

2 - Évaluer le rapport des populations  $N_+/N_-$ , en équilibre thermique à la température  $T$ ,  $N_+$  étant la densité volumique de dipôles de plus grande énergie et  $N_-$  étant la densité volumique de dipôles de plus petite énergie (on admettra que l'on peut effectuer un développement limité à l'ordre 1).

3 - À quelle orientation correspond la population la plus nombreuse à l'équilibre thermique à  $37^\circ\text{C}$  ?

On note  $\eta = \frac{N_+ - N_-}{N_+ + N_-}$  la différence relative de population entre les deux

niveaux.

4 - Exprimer, à l'équilibre thermique, la différence relative (toujours à l'ordre 1) en fonction de  $\mu_P$ ,  $k_B$ ,  $T$  et  $B_0$ .

5 - Donner sa valeur numérique pour des protons placés dans un champ de 1 tesla, à une température de 37°C et commenter.

Données :

- $\mu_P = 1,4 \cdot 10^{-26} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1}$
- $k_B = 1,4 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

### Exercice 3

1 - La probabilité d'occuper un état d'énergie  $E$  est donnée par :

$$p(E) = A e^{-E/k_B T}$$

2 - Par définition :  $E_+ = \mu_P B_0$  et  $E_- = -\mu_P B_0$ . Le dipole n'a que deux orientations possibles, on suppose qu'il suit la distribution de Boltzmann. Pour un ensemble de dipole, le nombre de dipole dans un état donné étant proportionnel à la probabilité d'être dans cet état, on peut écrire :

$$N_+ = A e^{-E_+/k_B T} \quad \text{et} \quad N_- = A e^{-E_-/k_B T}$$

On en déduit que :

$$N_+ = A e^{-\mu_P B_0/k_B T} \quad \text{et} \quad N_- = A e^{\mu_P B_0/k_B T}$$

Ainsi le rapport est donné par :

$$\frac{N_+}{N_-} = e^{-2\mu_P B_0/k_B T} \approx 1 - 2\mu_P B_0/k_B T$$

3 - Dans l'approximation des faibles énergie, on obtient :  $N_+ < N_-$ .

4 - En remplaçant les valeurs obtenues, on obtient :

$$\eta = -\frac{\mu_P B_0}{k_B T}$$

5 - On obtient :

$$\eta \approx 3 \cdot 10^{-6}$$

Il y a donc quasiment autant de dipole orienté dans un sens que dans l'autre.

### Exercice 4

*D'après Oral Mines 19, CCP 21*

On considère un système de  $N$  particules indépendantes pouvant exister dans 3 états d'énergie égales à 0,  $\varepsilon$  et  $2\varepsilon$ . Le système est en équilibre avec un thermostat de température  $T$ .

1 - Quelle est l'énergie moyenne du système pour :

$$\bullet T \ll \frac{\varepsilon}{k_B} ? \bullet T \gg \frac{\varepsilon}{k_B} ? \bullet T = \frac{\varepsilon}{k_B} ?$$

2 - Quelle est la capacité thermique pour :

$$\bullet T \ll \frac{\varepsilon}{k_B} ? \bullet T \gg \frac{\varepsilon}{k_B} ?$$

Que peut-on déduire des deux résultats précédents ?

3 - Déterminer la capacité thermique d'un ensemble de  $N$  particules.

### Exercice 4

1 - La probabilité d'avoir un atome dans chaque niveau d'énergie est donnée par :

$$\mathcal{P}(0) = A, \mathcal{P}(\varepsilon) = A e^{-\varepsilon/k_B T} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}(2\varepsilon) = A e^{-2\varepsilon/k_B T}$$

D'après la normalisation :

$$\mathcal{P}(0) + \mathcal{P}(\varepsilon) + \mathcal{P}(2\varepsilon) = 1$$

d'où

$$A = \frac{1}{1 + e^{-\varepsilon/k_B T} + e^{-2\varepsilon/k_B T}}$$

L'énergie moyenne est alors donnée par :

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \mathcal{P}(0) \times 0 + \mathcal{P}(\varepsilon) \times \varepsilon + \mathcal{P}(2\varepsilon) \times 2\varepsilon$$

En remplaçant les probabilités, on obtient :

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{\varepsilon \times e^{-\varepsilon/k_B T} + 2\varepsilon \times e^{-2\varepsilon/k_B T}}{1 + e^{-\varepsilon/k_B T} + e^{-2\varepsilon/k_B T}}$$

Par passage à la limite, on obtient les résultats suivants :

$$\langle \mathcal{E} \rangle (T \ll \varepsilon/k_B) \rightarrow 0$$

$$\langle \mathcal{E} \rangle (T \gg \varepsilon/k_B) \rightarrow \varepsilon$$

$$\langle \mathcal{E} \rangle (T = \varepsilon/k_B) \rightarrow \frac{\varepsilon/e2\varepsilon/e^2}{1 + 1/e + 1/e^2}$$

2 - La capacité thermique est définie par :

$$C_V = \left. \frac{d \langle \mathcal{E} \rangle}{dT} \right|_{V=Cte}$$

Afin de faciliter les calculs, multiplions numérateur et dénominateur par  $e^{\varepsilon/k_B T}$  :

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{\varepsilon + 2\varepsilon \times e^{-\varepsilon/k_B T}}{e^{\varepsilon/k_B T} + 1 + e^{-\varepsilon/k_B T}} = \varepsilon \frac{1 + 2 \times e^{-\varepsilon/k_B T}}{1 + 2 \cosh(\varepsilon/k_B T)}$$

En utilisant les propriétés de trigonométrie hyperbolique :

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \varepsilon \frac{1 + 2 \cosh(\varepsilon/k_B T) - 2 \sinh(\varepsilon/k_B T)}{1 + 2 \cosh(\varepsilon/k_B T)} = \varepsilon \left( 1 - 2 \frac{\sinh(\varepsilon/k_B T)}{1 + 2 \cosh(\varepsilon/k_B T)} \right)$$

### Exercice 5

*D'après Mines-Ponts 17*

Les énergies accessibles à un oscillateur harmonique en régime quantique sont de la forme :

$$E_n = (n + 1/2)\hbar\omega \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

Albert Einstein eût l'idée en 1907 de rendre compte de la vibration des molécules diatomiques de façon quantique dans un solide afin de tenter de régler certains problèmes de la physique classique dans le traitement du comportement des solides à basse température.

On considère un ensemble d'oscillateurs harmoniques quantique à l'équilibre thermique à la température T. La probabilité  $\pi(E)$  qu'une molécule de ce gaz se trouve dans un état d'énergie  $E_n$  s'écrit :

$$\pi(E_n) = A \exp(-\beta E_n)$$

où  $\beta$  est une fonction de  $k_B$  et de T uniquement.

1 - Par analyse dimensionnelle, exprimer  $\beta$  en fonction de  $k_B$  et de T.

2 - Exprimer la constante A en fonction de  $\hbar$ ,  $\omega$  et  $\beta$ .

3 - En déduire l'expression de l'énergie moyenne  $\langle E \rangle$  de l'ensemble de ces N particules en fonction de  $\hbar$ ,  $\omega$ ,  $\beta$  et N.

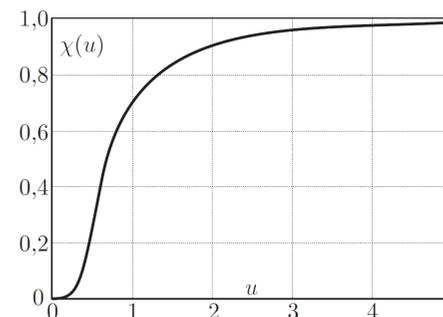
4 - Montrer que la capacité thermique molaire à volume constant  $c_{V,m}$  de ce gaz s'écrit :

$$c_{V,m} = R \frac{\xi^2}{\sinh^2 \xi} \quad \text{avec} \quad \xi = \beta \hbar \omega / 2$$

On désigne par  $T_v$  la température, dite de vibration, caractéristique des vibrations de la molécule qui est telle que  $T_v = \frac{\hbar\omega}{k_B}$ .

5 - Réécrire l'expression de  $c_{V,m}$  en fonction de  $T_v$  et T.

6 - La figure ci-contre représente l'allure de la fonction :



$$\chi(u) = u^{-2} / \sinh^2(u^{-1})$$

**Représentation de la fonction**

$\chi(u)$

La table ci-dessous fournit la température de vibration de quelques molécules diatomiques. Commenter ces valeurs.

Molécule	$^1\text{H}_2$	$^2\text{H}_2$	$^1\text{H}^2\text{H}$	$\text{Cl}_2$	$\text{Br}_2$	$\text{HCl}$	$\text{HBr}$
$T_v$ [K]	6 220	4 390	5 380	808	463	4 230	3 790

### Exercice 5

1 - On remarque que  $\beta$  est homogène à l'inverse d'une énergie, on en déduit donc que :

$$\beta = 1/k_B T$$

2 - Il est certain de trouver une particule dans un des états proposés. On peut donc écrire :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi(E_n) = 1$$

En remplaçant l'énergie, l'expression de la probabilité, il vient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} A e^{-\beta \hbar \omega (n+1/2)} = 1$$

En factorisant par  $A e^{-\beta \hbar \omega / 2}$ , on obtient :

$$A e^{-\beta \hbar \omega / 2} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\beta \hbar \omega})^n = 1$$

On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison  $e^{-\beta \hbar \omega}$ , on obtient alors :

$$A e^{-\beta \hbar \omega / 2} \times \frac{1}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}} = 1$$

Développons l'expression :

$$A = (1 - e^{-\beta \hbar \omega}) = e^{\beta \hbar \omega / 2} - e^{-\beta \hbar \omega / 2}$$

d'où

$$A = 2 \sinh \frac{\beta \hbar \omega}{2}$$

3 - Par définition :

$$\langle E \rangle = N \sum_{n=0}^{\infty} E_n \times (\pi(E_n))$$

Injectons les valeurs obtenues précédemment :

$$\langle E \rangle = 2N \sinh \frac{\beta \hbar \omega}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1/2) \hbar \omega e^{-\beta \hbar \omega (n+1/2)}$$

On remarque que (bon fallait y penser...)

$$\langle E \rangle = -AN \frac{d}{d\beta} \left( \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \hbar \omega (n+1/2)} \right)$$

Et donc :

$$\langle E \rangle = -AN \frac{d}{d\beta} \left( \frac{1}{2 \sinh \frac{\beta \hbar \omega}{2}} \right) = \frac{AN}{2} \frac{\hbar \omega / 2 \cosh \frac{\beta \hbar \omega}{2}}{\sinh^2 \frac{\beta \hbar \omega}{2}}$$

On obtient alors :

$$\langle E \rangle = \frac{N \hbar \omega}{2} \frac{\cosh \frac{\beta \hbar \omega}{2}}{\sinh \frac{\beta \hbar \omega}{2}} = \frac{N \hbar \omega}{2} \coth \frac{\beta \hbar \omega}{2}$$

4 - Par définition de la capacité thermique :

$$C_{V,m} = \frac{1}{n} \frac{d \langle E \rangle}{dT}$$

Après un peu de calcul amusant on obtient :

$$C_{V,m} = \frac{-N(\hbar \omega)^2 \sinh^2 \xi - \cosh^2 \xi}{4n k_B T^2 \sinh^2 \xi}$$

Avec  $N/n = \mathcal{N}_A$  et  $R = k_B \mathcal{N}_A$ , on obtient le résultat demandé...

5 - En remplaçant  $\xi = T_V/2T$ , on obtient :

$$C_{V,m} = R \frac{T_V^2}{4T^2 \sinh^2(T_V/2T)}$$

6 - L'évolution de la fonction  $\chi$  permet de dire que le degré de liberté de vibration est activée lorsque la température est supérieure à la température de vibration  $T_V$ . On remarque que plus les atomes sont massifs, plus la température est basse. Pour un oscillateur classique,  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ . La fréquence propre de l'oscillateur et donc la température  $T_V$  est donc une fonction décroissante de la masse.

Le degré de vibration pour  $H_2$  n'est pas activé puisque  $T > 6000$  K : l'état de la matière est donc proche d'un plasma.