

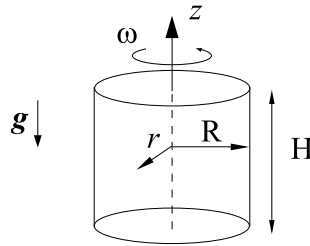


TD 26 Physique statistique

Exercice 1

D'après Mines-Ponts 05

Un réservoir cylindrique de rayon R , de hauteur H , est rempli complètement par un fluide de masse volumique μ_0 au repos. Le réservoir tourne à une vitesse angulaire ω constante autour de l'axe vertical (Oz) du cylindre; il entraîne le fluide dans son mouvement. On se place en régime permanent. On note g l'intensité du champ de pesanteur et r la distance à l'axe de rotation. Les phénomènes ne dépendront explicitement que de la variable radiale r .



1 - Montrer que la pression $P(r)$ satisfait l'équation différentielle

$$\frac{dP}{dr} = \omega^2 r \mu(r)$$

On précisera le phénomène décrit par cette équation et le référentiel dans lequel elle s'applique. On négligera la dépendance de P selon la cote z .

2 - On suppose dans cette question que la masse volumique μ_0 est constante, ce que l'on exprime en disant que le fluide est incompressible. Quelle est, sous cette hypothèse, la loi de la distribution de la pression? On notera $P(r=0) = P_0$.

3 - Le fluide est un gaz parfait d'équation d'état $P(r) = k_B T \mu(r)/m$, où m la masse d'une molécule de fluide et k_B la constante de Boltzmann. Ce gaz est en équilibre thermique. Trouver la loi de la distribution de la pression; cette loi est déterminée ici à une constante multiplicative près, qui est déterminée dans la question qui vient.

4 - En exprimant la conservation de la masse, et en notant P_0 la pression au repos, établir la relation

$$P(r) = P_0 \left(\frac{m R^2 \omega^2}{2 k_B T} \right) \frac{\exp \left(\frac{m \omega^2 r^2}{2 k_B T} \right)}{\exp \left(\frac{m \omega^2 R^2}{2 k_B T} \right) - 1} \quad \text{avec} \quad P_0 \left(\frac{m R^2 \omega^2}{2 k_B T} \right) = \frac{\mu_0 R^2 \omega^2}{2}$$

Exercice 2

D'après Oral 2018

L'air atmosphérique est composé essentiellement de diazote N_2 de masse molaire $M_{N_2} = 28 \text{ g.mol}^{-1}$ et de dioxygène O_2 de masse molaire $M_{O_2} = 32 \text{ g.mol}^{-1}$. Au niveau de la mer, les fractions molaires de ces deux gaz sont telles que $x_{N_2} \sim 4x_{O_2}$. Dans le modèle de l'atmosphère isotherme à $T = 290 \text{ K}$, calculer le rapport $\frac{x_{N_2}}{x_{O_2}}$ à 4 000 m d'altitude.

Données :

- Constante de Boltzmann : $k_B = 1,38.10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$
- Nombre d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6,02.10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Exercice 3

D'après CCP 17

Dans le cas du proton (noyau d'hydrogène) qui tourne sur lui-même (rotation propre de vecteur de rotation autour d'un axe Oz), on peut lui associer un moment magnétique $\vec{\mu}_P$. Placé dans un champ magnétique extérieur uniforme permanent $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$, on rappelle l'expression de l'énergie potentielle $E_{pot} = -\vec{\mu}_P \cdot \vec{B}$. On admet que le dipôle est colinéaire au champ magnétique et ne peut prendre que deux directions possibles : $\pm \vec{e}_z$.

Nous considérons qu'une population de dipôles, placés dans un champ magnétique extérieur de 1 tesla, en équilibre thermique à la température T , obéit à la statistique de Boltzmann.

1 - Rappeler, à un facteur multiplicatif près, l'expression de la probabilité d'occuper un état d'énergie E par un dipôle.

2 - Évaluer le rapport des populations N_+/N_- , en équilibre thermique à la température T , N_+ étant la densité volumique de dipôles de plus grande énergie et N_- étant la densité volumique de dipôles de plus petite

énergie (on admettra que l'on peut effectuer un développement limité à l'ordre 1).

3 - À quelle orientation correspond la population la plus nombreuse à l'équilibre thermique à 37°C ?

On note $\eta = \frac{N_+ - N_-}{N_+ + N_-}$ la différence relative de population entre les deux niveaux.

4 - Exprimer, à l'équilibre thermique, la différence relative (toujours à l'ordre 1) en fonction de μ_P , k_B , T et B_0 .

5 - Donner sa valeur numérique pour des protons placés dans un champ de 1 tesla, à une température de 37°C et commenter.

Données :

- $\mu_P = 1,4 \cdot 10^{-26} \text{ J.T}^{-1}$
- $k_B = 1,4 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$

Exercice 4

D'après Oral Mines 19, CCP 21

On considère un système de N particules indépendantes pouvant exister dans 3 états d'énergie égaux à 0, ε et 2ε . Le système est en équilibre avec un thermostat de température T.

1 - Quelle est l'énergie moyenne du système pour :

- $T \ll \frac{\varepsilon}{k_B}$?
- $T \gg \frac{\varepsilon}{k_B}$?
- $T = \frac{\varepsilon}{k_B}$?

2 - Quelle est la capacité thermique pour :

- $T \ll \frac{\varepsilon}{k_B}$?
- $T \gg \frac{\varepsilon}{k_B}$?

Que peut-on déduire des deux résultats précédents ?

3 - Déterminer la capacité thermique d'un ensemble de N particules.

Exercice 5

D'après Mines-Ponts 17

Les énergies accessibles à un oscillateur harmonique en régime quantique sont de la forme :

$$E_n = (n + 1/2)\hbar\omega, \quad n \in \mathbb{N}$$

Albert Einstein eût l'idée en 1907 de rendre compte de la vibration des molécules diatomiques de façon quantique dans un solide afin de tenter de régler certains problèmes de la physique classique dans le traitement du comportement des solides à basse température.

On considère un ensemble d'oscillateurs harmoniques quantique à l'équilibre thermique à la température T. La probabilité $\pi(E)$ qu'une molécule de ce gaz se trouve dans un état d'énergie E_n s'écrit :

$$\pi(E_n) = A \exp(-\beta E_n)$$

où β est une fonction de k_B et de T uniquement.

1 - Par analyse dimensionnelle, exprimer β en fonction de k_B et de T.

2 - Exprimer la constante A en fonction de $\hbar$, ω et β .

3 - En déduire l'expression de l'énergie moyenne $\langle E \rangle$ de l'ensemble de ces N particules en fonction de $\hbar$, ω , β et N.

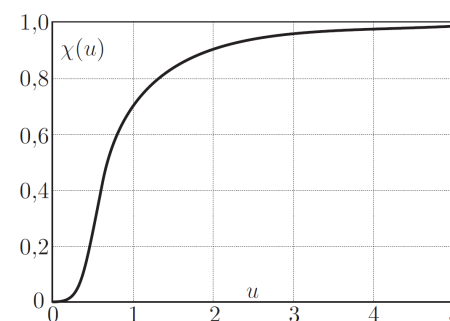
4 - Montrer que la capacité thermique molaire à volume constant $c_{V,m}$ de ce gaz s'écrit :

$$c_{V,m} = R \frac{\xi^2}{\sinh^2 \xi} \quad \text{avec} \quad \xi = \beta \hbar \omega / 2$$

On désigne par T_v la température, dite de vibration, caractéristique des vibrations de la molécule qui est telle que $T_v = \frac{\hbar \omega}{k_B}$.

5 - Réécrire l'expression de $c_{V,m}$ en fonction de T_v et T.

6 - La figure ci-contre représente l'allure de la fonction :



$$\chi(u) = u^{-2} / \sinh^2(u^{-1})$$

Représentation de la fonction

$\chi(u)$

La table ci-dessous fournit la température de vibration de quelques molécules diatomiques. Commenter ces valeurs.

Molécule	$^1\text{H}_2$	$^2\text{H}_2$	$^1\text{H}^2\text{H}$	Cl_2	Br_2	HCl	HBr
T_v [K]	6 220	4 390	5 380	808	463	4 230	3 790