TD 24 fonction d'onde

Exercice 1 *D'après CCP 16*

1 - Rappeler quels sont les liens entre la pulsation ω et le vecteur d'onde k d'une onde électromagnétique et les caractéristiques de la particule associée, le photon.
2 - Quels sont les ordres de grandeur de l'énergie, exprimée en eV, d'un photon visible et d'un photon X qui est diffracté par les réseaux cristallins ?
3 - Pour un photon qui se propage dans un milieu d'indice n, justifier pourquoi sa quantité de mouvement (impulsion) vaut en norme nh/λ_0.
4 - Donner le vecteur d'onde et la pulsation de l'onde associée à une particule non relativiste d'énergie E et de quantité de mouvement $\vec{p} = m\dot{x}\,\vec{e}_x$.
5 - Etablir la longueur d'onde associée à un électron, initialement immobile, non relativiste, accéléré avec une différence de potentiel U.
6 - Déterminer la valeur de U, pour laquelle on obtiendrait la même longueur d'onde que celle d'un photon X de $\lambda = 0{,}1$ nm.
Données :

- constante de Planck : $h = 6{,}62.10^{-34}$ J.s
- vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3{,}00.10^{8}$ m.s^{-1}
- masse d'un électron : $m = 9{,}1.10^{-31}$ kg

Exercice 1

1 - Pour un photon dans le vide, on a :

$$\omega = kc$$

avec $k = 2\pi/\lambda$
2 - Pour un photon dans le domaine visible : $\lambda = 600$ nm, l'énergie associée est :

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{hc}{\lambda} = 3{,}3.10^{-19}\ \text{J} = 2{,}1\ \text{eV}}$$

Pour des rayons X, $\lambda = 1$ nm, on en déduit que :

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{hc}{\lambda} = 2{,}0.10^{-16}\ \text{J} = 1{,}2\ \text{keV}}$$

3 - Dans un milieu d'indice n, la célérité d'un photon est : $v = c/n$, on en déduit que

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c} \times \frac{c}{v} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \times n$$

On en déduit que l'impulsion est donnée par :

$$p = \hbar k = \frac{2\pi\hbar n}{\lambda_0} = n\frac{h}{\lambda_0}$$

4 - Par définition, la relation entre quantité de mouvement et vecteur d'onde est :

$$p = \hbar k$$

d'où

$$k = \frac{m\dot{x}}{\hbar}$$

Si son énergie est cinétique alors :

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \text{E} \quad \text{soit} \quad \dot{x} = \sqrt{\frac{2\text{E}}{m}}$$

Ainsi,

$$\boxed{k = \frac{\sqrt{2m\text{E}}}{\hbar}}$$

De même par définition,

$$\text{E} = \hbar\omega$$

On en déduit que

$$\omega = \frac{\text{E}}{\hbar}$$

5 - Un électron possède alors une énergie $\text{E} = e\text{U}$, d'après la relation précédente :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\sqrt{2m\text{E}}}{\hbar}$$

d'où $\boxed{\lambda = \dfrac{h}{\sqrt{2meU}}}$

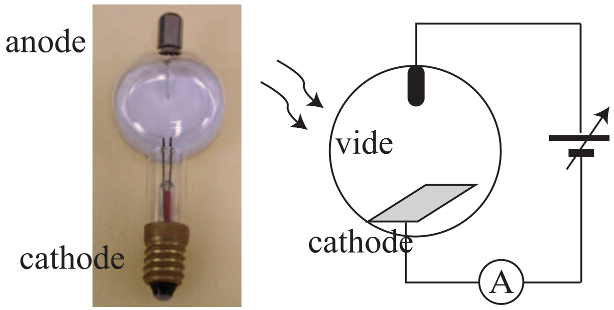
6 - En utilisant les valeurs numériques, on trouve :

$$U = \frac{h^2}{2\lambda^2 me} = 150\ \text{V}$$

Cette tension est donc facilement accessible dans un accélérateur de particules.

Exercice 2

Une cellule photoélectrique de cathode C est montée en série avec un générateur de tension continue G et un ampèremètre A. Les résistances de G et A sont négligeables et la tension fournie par G est réglable.



On éclaire la cathode de la cellule avec une radiation monochromatique de longueur d'onde λ dans le vide. G est branchée de telle manière que le courant dans A est nul lorsque la tension aux bornes de G est supérieure à une certaine tension U_s.

1 - Indiquer sur un schéma les polarités des bornes de G.

2 - Un photon d'énergie ε arrivant sur la cathode C peut provoquer l'émission d'un électron d'énergie cinétique $\mathcal{E}_c$. Écrire les relations qui existent entre :

- $\mathcal{E}_c$ et la tension U_s ;
- ε, $\mathcal{E}_c$ et le travail d'extraction w_0 d'un électron de la cathode C.

3 - Pour $\lambda = \lambda_1 = 0{,}4047\ \mu$m, $U_s = U_1 = 1{,}18$ V et pour $\lambda = \lambda_2 = 0{,}4358\ \mu$m, $U_s = U_2 = 0{,}96$ V. Déterminer la valeur de la constante de Planck h, et la valeur de la longueur d'onde λ_0 correspondant au seuil photoélectrique de la cellule.

Données : $c = 3{,}00.10^8$ m.s^{-1}, $e = 1{,}6.10^{-19}$ C.

Exercice 2

1 - Le courant circule du pole (+) au pole (-) dans le sens inverse des électrons. On en déduit que l'anode est le pole (-) et la cathode le pole (+).

2 - L'énergie du photon permet d'extraire un électron et de lui transmettre une énergie cinétique. On s'attend à ce que :

$$\boxed{\varepsilon = w_0 + \mathcal{E}_C}$$

Lorsque la différence de potentielle est U_S, le courant est nul, c'est à dire que l'énergie cinétique de l'électron est nulle. La conservation de l'énergie mécanique impose :

$$\mathcal{E}_M(anode) = \mathcal{E}_M(cathode)$$

soit $$-eV_{cathode} + \mathcal{E}_C = -eV_{anode}$$

d'où $$\boxed{\mathcal{E}_C = eU_s}$$

3 - L'énergie d'un photon est donnée par :

$$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

La différence d'énergie entre les photons est communiquée uniquement en énergie cinétique pour l'électron. On en déduit que :

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \mathcal{E}_{C,1} - \mathcal{E}_{C,2} = e(U_1 - U_2)$$

En remplaçant l'expression de l'énergie d'un photon, on en déduit que :

$$\boxed{h = \frac{e(U_1 - U_2)}{c}\frac{\lambda_2\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}}$$

A.N. : $$\boxed{h = 6{,}65.10^{-34}\ \text{m}^2.\text{kg.s}^{-1}}$$

Le travail d'extraction vaut alors :

$$w_0 = \varepsilon - eU_s$$

A.N. : $\boxed{w_0 = 3{,}0.10^{19}\ \mathrm{J} = 1{,}9\ \mathrm{eV}}$

d'où $\boxed{\lambda_0 = \dfrac{cw_0}{h} = 655\ \mathrm{nm}s}$

Exercice 3

Soit $\psi(x,t)$ la fonction d'onde d'une particule de masse m pouvant se déplacer sur l'axe Ox :

$$\psi(x,t) = \mathrm{A}\exp\Big(-\frac{m\omega_0 x^2}{2\hbar} - i\frac{\omega_0}{2}t\Big)$$

1 - Quelles sont les dimensions des constantes A et ω_0 ?
2 - Quelles sont les valeurs possibles de A ?
3 - Quel type d'état est représenté par cette fonction d'onde ? Quelle est l'énergie de la particule ?
4 - À quelle énergie potentielle V(x) est soumise cette particule ?
5 - Dans quel(s) type(s) de situation rencontre-t-on cette énergie potentielle ?
6 - Quelle est la valeur moyenne $< x >$ de la position x de la particule ? Plus précisément, si on prépare N $\gg 1$ systèmes dans cet état et que l'on mesure pour chacun d'entre eux la position x de la particule, quelle est la moyenne des mesures réalisées ?
7 - Qu'en est-il de la moyenne quadratique $< x^2 >$?
8 - Que dire de l'étalement des mesures en quantité de mouvement dans cet état ?
Données :

- pour pour $\alpha > 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha u^2}\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\infty} u^2 e^{-\alpha u^2}\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{4\alpha^3}}$$

- $< \mathrm{X} >= \int_{-\infty}^{\infty} x|\psi^2(x,t)|\mathrm{d}x$
- $< \mathrm{X}^2 >= \int_{-\infty}^{\infty} x|\psi^2(x,t)|\mathrm{d}x$

Exercice 3

1 - ω_0 est en rad.s^{-1}, la normalisation de la probabilité entraîne :

$$\int |\phi|^2 \mathrm{d}x = 1$$

donc $[\mathrm{A}] = m^{-1/2}$
2 - La condition de normalisation s'écrit :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,t)|^2\mathrm{d}x = 1 \quad \text{soit} \quad |\mathrm{A}|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-m\omega_0 x^2/\hbar}\mathrm{d}x = |\mathrm{A}|^2\sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega_0}} = 1$$

On en déduit que :

$$\mathrm{A} = \Big(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\Big)^{1/4} e^{i\theta}$$

En l'absence d'information sur la phase, on peut choisir : $e^{i\theta} = 1$
3 - Il s'agit de la fonction d'onde associée à un état stationnaire. Par identification avec le terme en $\exp(-i\mathrm{E}t/\hbar)$, l'énergie est donc

$$\mathrm{E} = \frac{\hbar\omega_0}{2}$$

4 - L'équation de Schrödinger s'écrit

$$\mathrm{V}(x)\psi - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

Calculons les dérivées de la fonction d'onde :

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = \frac{-m\omega_0 x}{\hbar}\mathrm{A}\exp\Big(-\frac{m\omega_0 x^2}{2\hbar} - i\frac{\omega_0}{2}t\Big)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \Big(-\frac{m\omega_0}{\hbar} + \frac{m^2\omega_0^2 x^2}{\hbar^2}\Big)\mathrm{A}\exp\Big(-\frac{m\omega_0 x^2}{2\hbar} - i\frac{\omega_0}{2}t\Big)$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{-i\omega_0}{2}\mathrm{A}\exp\Big(-\frac{m\omega_0 x^2}{2\hbar} - i\frac{\omega_0}{2}t\Big)$$

En injectant la forme proposée dans l'équation de Schrödinger, on obtient

$$\mathrm{V}(x)\psi - \frac{\hbar^2}{2m}\Big(-\frac{m\omega_0}{\hbar} + \frac{m^2\omega_0^2 x^2}{\hbar^2}\Big)\psi = i\hbar\frac{-i\omega_0}{2}\psi$$

Après simplification, il vient :

$$\mathrm{V}(x) = \frac{1}{2}m\omega_0 x^2$$

5 - Il s'agit d'un oscillateur harmonique de type ressort ou d'un développement limité d'une énergie potentielle au voisinage d'une position d'équilibre

6 - $|\psi|^2$ est paire en x la position moyenne est donc $< x >= 0$, c'est la position d'équilibre évoquée avant ;

7 - On obtient :

$$< x^2 >= \int x^2 |\psi|^2 \mathrm{d}x = \frac{\hbar}{2m\omega_0}$$

8 - Par définition, l'écart type est donné par :

$$\Delta x = \sqrt{< x^2 > - < x >^2} = \sqrt{< x^2 >}$$

D'après le principe d'incertitude d'Heisenberg, l'indétermination devient :

$$\Delta x \Delta p_x \geqslant \hbar/2 \quad \text{soit} \quad \sqrt{< x^2 >}\Delta p_x \geqslant \hbar/2$$

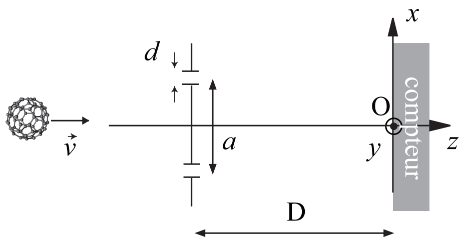
On obtient donc

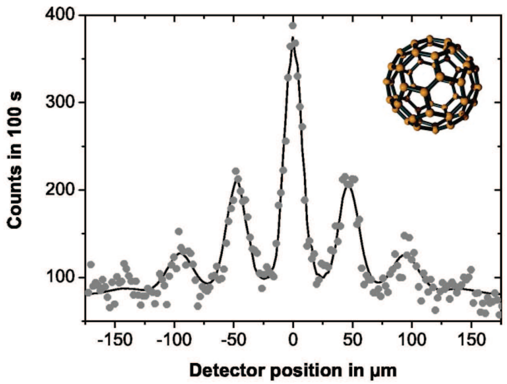
$$\Delta p_x \geqslant \sqrt{2m\hbar\omega_0}$$

Exercice 4

D'après Am.J.Phys 2002

L'expérience des fentes d'Young permet de tester les modèles quantiques et notamment la dualité onde-particule de la matière. Des molécules de C_{60} appelées fullerènes traversent une à une des fentes d'Young avec une vitesse moyenne de $v = 117$ m.s^{-1} (incertitude relative de 17%). Les fentes d'Young, larges de 55 nm, sont séparées de $a = 100$ nm l'une de l'autre. On réalise le comptage des molécules sur un écran situé à D = 1,04 m des fentes.





La longueur de d'onde de De Broglie associé à une molécule est donnée par $\lambda_{DB} = h/mv$ où h est la constante de Planck, m la masse de la molécule et v sa vitesse.

1 - Mesurer, à partir des résultats expérimentaux, la longueur d'onde De Broglie des molécules de fullerènes.

2 - Montrer que les résultats concordent avec les mesures de vitesse.

3 - Montrer que la taille de la figure de diffraction est compatible avec la théorie de la diffraction.

4 - D'après l'écart de vitesse, estimer les variations de longueur d'onde de De Broglie puis la longueur de cohérence de la source de molécules de fullerènes. *Données* : $h = 6{,}62.10^{-34}$ m^2.kg.s^{-1}, $m = 1{,}2.10^{-24}$ kg.

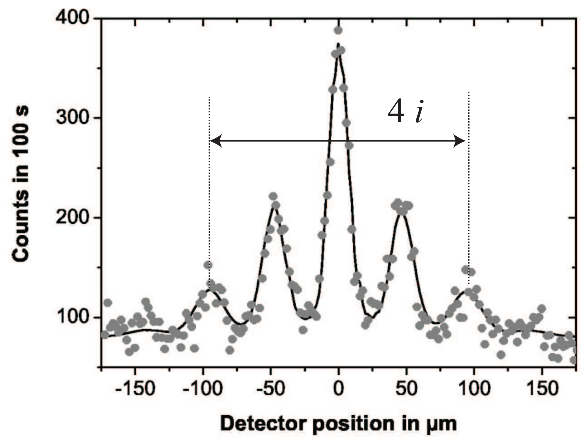
Exercice 4

1 - Selon les interférences avec des fentes d'Young, l'interfrange est donné par

$$i = \frac{\lambda \mathrm{D}}{a}$$

La distance entre deux pics permet de mesurer l'interfrange :

$$4i = 190\ \mu\text{m} \quad \text{soit} \quad i = 47{,}5\ \mu\text{m}$$



La longueur de d'Onde de De Broglie est donc donnée par

$$\boxed{\lambda = \frac{ai}{\mathrm{D}} = 4{,}57\ \text{pm}}$$

2 - D'après la formule donnée par l'énoncé :

$$\lambda_{DB} = \frac{h}{mv} = 4{,}71 \text{ pm}$$

L'incertitude relative sur la vitesse étant de 17%, l'écart entre les deux valeurs est justifiable.

3 - Notons L la largeur de la figure d'interférence. L'angle de diffraction est donné par

$$\tan\theta \approx \theta = \frac{L}{2D} = \frac{\lambda}{d}$$

où b est la largeur des fentes d'Young. On obtient donc :

$$L = \frac{2\lambda D}{b} \approx 180\ \mu\text{m}$$

La taille de la figure est de l'ordre de $L_{mesure} \sim 200\ \mu$m ce qui correspond bien à la valeur prédite par la diffraction.

4 - L'écart de vitesse permet d'obtenir l'écart en longueur d'onde :

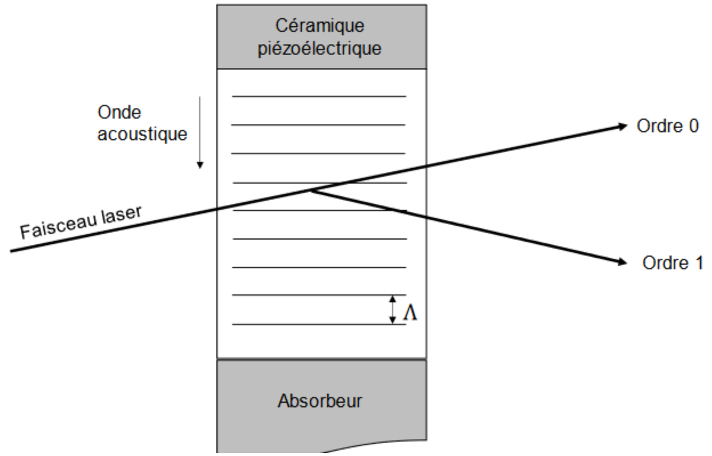
$$\Delta\lambda = \frac{h}{m}\frac{\Delta v}{v^2} = 0{,}8 \text{ pm}$$

La longueur de cohérence de la source de fullerènes est donc donnée par

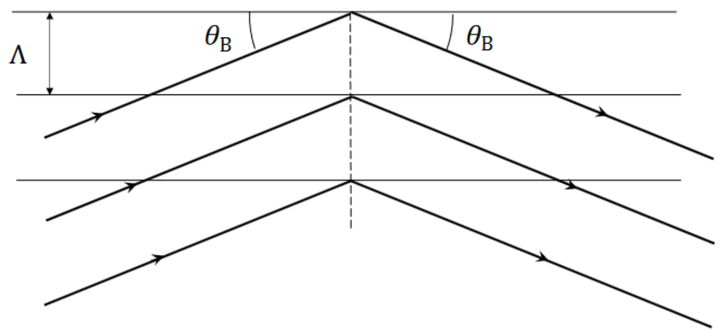
$$\boxed{L_C = \lambda \times \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = 28 \text{ pm}}$$

Exercice 5 *D'après CCinP 22*

La mesure de l'intensité de la lumière diffusée par la particule permet de déterminer la norme de la composante de sa vitesse selon la direction perpendiculaire aux franges, mais pas son signe. Une cellule de Bragg (représentée ci-dessous) est constituée d'une céramique piézoélectrique qui émet des ondes planes acoustiques de fréquence $f_S = 40$MHz, se propageant à la célérité $c_S = 4130 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ dans un cristal de phosphure de gallium GaP. La périodicité de l'onde acoustique forme un réseau de pas Λ, longueur d'onde de l'onde acoustique, sur lequel le faisceau laser peut venir se diffracter par un effet acousto-optique.



Pour modéliser la diffraction du faisceau laser par l'onde acoustique, on considère que les plans d'ondes de l'onde acoustique se comportent comme des miroirs semi-réfléchissants. On assimile le faisceau laser à un ensemble de rayons parallèles se réfléchissant sur ces plans, en négligeant les réflexions multiples (**figure 12**).



1 - L'indice optique du phosphure de gallium GaP est $n_{GaP} = 3{,}32$. Calculer la longueur d'onde λ du laser dans le phosphure de gallium en fonction de λ_0.

2 - L'ordre 1 du réseau correspond à un angle d'incidence θ_B, appelé angle de Bragg, tel que deux rayons se réfléchissant sur des plans

successifs ont une différence de marche égale à une longueur d'onde dans le vide λ_0. Déterminer l'expression de l'angle de Bragg en fonction de λ, c_S et f_S. Faire l'application numérique.

La propriété remarquable d'une cellule de Bragg est qu'elle modifie la fréquence de l'onde laser lors de sa réflexion sur le réseau acoustique. Cet effet s'interprète en introduisant la notion de phonon, qui est une particule associée à l'onde acoustique, au même titre que le photon est une particule associée à une onde lumineuse. Les expressions de l'énergie et de la quantité de mouvement d'un phonon en fonction de la fréquence et de la longueur d'onde de l'onde acoustique ont la même forme que celles du photon.

La réflexion du laser sur le réseau à l'angle de Bragg s'envisage alors de la façon suivante : un photon du laser d'énergie E_L et de quantité de mouvement $\vec{p}_L$ absorbe un phonon de l'onde acoustique, d'énergie E_S et de quantité de mouvement $\vec{p}_S$: après absorption, le photon du laser a acquis une énergie E'_L et une quantité de mouvement $\overrightarrow{p'_L}$ (**figure 13**).

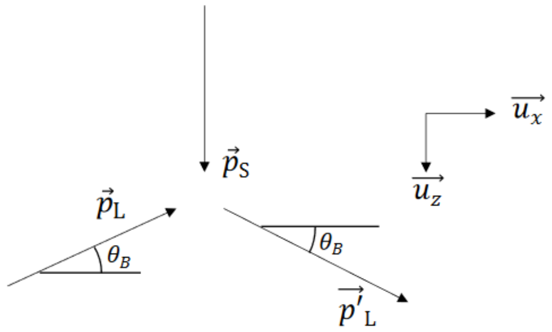


figure 13

3 - En traduisant la conservation de l'énergie lors de l'absorption du phonon par le photon du laser, montrer que la fréquence f'_L du laser après réflexion est égale à $f_L + f_S$.
4 - En traduisant la conservation du vecteur quantité de mouvement lors de l'absorption du phonon, montrer qu'on peut retrouver l'expression de l'angle de Bragg établie précédemment. Comme $f_S \ll f_L$, on négligera la variation de longueur d'onde du photon avant et après absorption du phonon.
En introduisant une cellule de Bragg sur le trajet du premier faisceau laser, on modifie la fréquence de ce faisceau. Ainsi, deux ondes lumineuses de fréquences f'_L et f_L interfèrent au croisement des deux faisceaux . Un calcul permet de montrer que l'éclairement en un point M de la zone d'interférences a pour expression :

$$\varepsilon(M, t) = 2\varepsilon_0 \left[1 + \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda_0} \sin\alpha \left(y + \frac{\lambda_0 f_S}{2\sin\alpha} t\right)\right)\right]$$

5 - Montrer que les franges défilent à une vitesse v_{franges} dont on donnera l'expression. Préciser dans quel sens ces franges défilent.
6 - Expliquer comment le défilement de ces franges permet de déterminer le sens de parcours d'une particule d'ensemencement à travers la zone d'interférences.

Exercice 5

1 - Par définition, dans un milieu d'indice n, la vitesse vaut : $v = c/n$. En utilisant les relations $v = \lambda/T$ et $c = \lambda_0/T$, la longueur d'onde vaut :

$$\lambda = \lambda_0/n = 155\,\text{nm}$$

2 - Il s'agit de la formule des réseaux dans un milieu d'indice n :

$$\delta = 2n\Lambda \sin\theta_B = \lambda_0 \quad \text{soit} \quad \theta_B = \arcsin\frac{lambda}{2\Lambda} = \arcsin\frac{lambda}{2c_S/f_s} = 7{,}5 \cdot 10^{-4}\,\text{rad}$$

3 - Par conservation de l'énergie, avec $E = hf$:

$$E'_L = E_L + E_S \quad \text{soit} \quad f'_L = f_L + f_S$$

4 - La conservation de la quantité de mouvement s'écrit selon les deux axes :

$$p_L \cos\theta_B = p_L \cos\theta_B \quad \text{et} \quad p_S = 2p_L \sin\theta_B$$

Par définition de la quantité de mouvement : $p_S = h/\Lambda$ et $p_L = h/\lambda$, on en déduit que :

$$\frac{1}{\Lambda} = \frac{2}{\lambda} \sin \theta_{\mathrm{B}}$$

On retrouve bien :

$$\sin \theta_{\mathrm{B}} = \frac{\lambda}{2\Lambda}$$

5 - D'après l'expression fournie, on reconnaît un déplacement vers les $y < 0$ à la vitesse $\lambda_0 f_{\mathrm{S}}/2 \sin \alpha$.

6 - Une particule qui se déplace à une vitesse v dans le référentiel du laboratoire aura donc une vitesse $v \pm v_{frange}$ par rapport aux franges. La fréquences de scintillement sera donc supérieure ou inférieure à celle sans déplacement des franges.