TD 22 milieux conducteur

Les classiques

Exercice 1 — *D'après Centrale*

On considère un milieu conducteur homogène de dimension supposée infinie. On note γ sa conductivité électrique en régime statique. On suppose qu'il y a n porteurs de charge libres par unité de volume, n est supposé indépendant du temps. Chaque porteur de charge libre est de masse m et possède une charge q.

1 - On soumet ce conducteur à un champ électrique permanent et uniforme $\vec{\mathrm{E}}_0$. On admet, suivant le modèle de Drude, que l'interaction des charges fixes sur un porteur de charge libre est assimilable à une force de frottement fluide $\vec{\mathrm{F}} = -h\vec{v}$. Écrire l'équation différentielle du mouvement vérifiée par la vitesse d'un porteur de charge libre.

2 - Montrer que cette vitesse tend vers une vitesse limite $\vec{v}_{\text{lim}}$. On exprimera et définira un temps τ de relaxation du matériau.

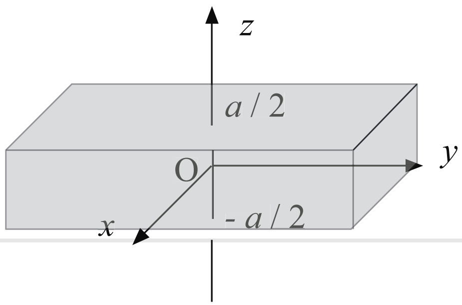
3 - Exprimer la densité volumique de courant $\vec{j}$ en fonction de v_{lim}, n et q. En déduire la relation entre γ,q,n et h.

4 - On suppose que le conducteur possède un électron libre par atome. La matériau considéré est de l'acier (alliage de fer avec du carbone en faible proportion). Préciser les ordres de grandeurs de n,h et τ.

Données : $\mu_{\text{acier}} = 8.10^3$ kg.m^{-3} , $\mathrm{M}_{\text{acier}} = 60$ g.mol^{-1} , $\gamma_{\text{acier}} = 1.10^7$ S.m^{-1}, $\mathcal{N} = 6.10^{23}$ mol^{-1}, $e = 1{,}6.10^{-19}$ C, $m_e = 9.10^{-31}$ kg.

Exercice 2

On considère deux plans infinis P et P$'$ parallèles au plan Oxy et coupant l'axe Oz en $z = -a/2$ et $z = +a/2$. Ces deux plans définissent un conducteur de cuivre de conductivité γ.



On suppose que le métal est parcouru par une densité de courant $\vec{j} = j\,\vec{e}_y$.

1 - Définir l'orientation de $\vec{\mathrm{B}}(\mathrm{M})$ en tout point M de l'espace.

2 - Calculer $\vec{\mathrm{B}}(\mathrm{M})$ à l'aide du théorème d'Ampère.

3 - Retrouver l'expression de $\vec{\mathrm{B}}(\mathrm{M})$ à l'intérieur du conducteur grâce à l'équation de Maxwell-Ampère.

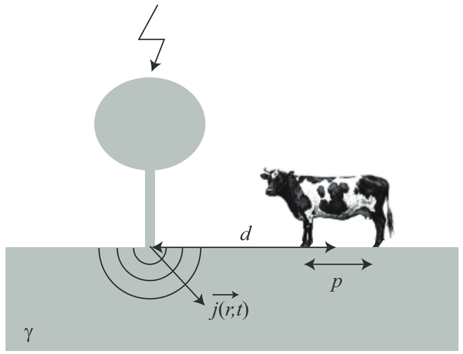
4 - Calculer la puissance volumique dissipée par effet Joule en fonction de γ, j et μ_0.

5 - Évaluer le vecteur de Poynting.

6 - Effectuer un bilan d'énergie sur un cube de conducteur de côté a. Conclure.

Exercice 3

On modélise un éclair par un fil rectiligne parcouru par un courant I(t).



1 - Représenter le courant dans une base adaptée. Sachant que les nuages sont chargées négativement, déterminer sur le schéma précédent le sens du courant.

2 - Justifier que le champ magnétique est de la forme : $\vec{\mathrm{B}}(\mathrm{M},t) = \mathrm{B}(r,t)\,\vec{e}_\theta$ en coordonnées cylindriques. Montrer que l'expression du champ magnétique peut se mettre sous la forme $\mathrm{B}(r,t) = \mathrm{K}\frac{\mathrm{I}(t)}{r}$ où K est une constante à déterminer. On justifiera soigneusement les hypothèses employées.

En cas d'orage, il est préconisé de ne pas s'abriter sous un arbre. On considère la situation suivante : une vache se situe près d'un arbre qui est traversé verticalement par l'éclair. On considère que la Terre possède une conductivité électrique γ et une densité volumique de courant $\vec{j}(r,t) = j(r,t)\,\vec{e}_r$ en coordonnées sphériques.

3 - Montrer que $j(r,t) = \frac{\mathrm{I}(t)}{2\pi r^2}$.

4 - Rappeler la loi d'Ohm locale et déterminer l'expression du champ électrique et en déduire une expression du potentiel sachant qu'il est est

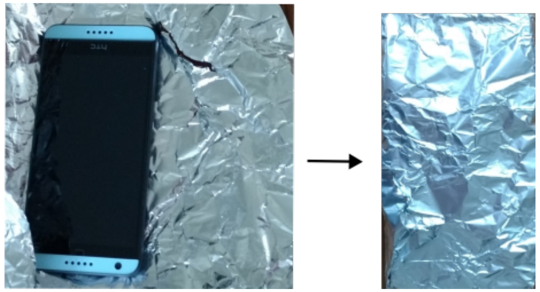
nul à l'infini.
5 - On note U_p la tension entre les pattes avant et arrière de la vache. En considérant que $d \gg p$, montrer que $U_p \sim \frac{Ip}{2\pi\gamma d^2}$
6 - On note d_{min} la distance pour laquelle il y a danger c'est à dire si un courant de 30 mA circule dans le corps dont la résistance est estimée à $R = 100\,\text{k}\Omega$. Dans cette situation, on a $I = 15\,\text{kA}$, $\gamma = 30\,\text{mS/m}$ et $p = 2\,\text{m}$. Déterminer l'expression de d_{min} et la calculer.
7 - Est il plus dangereux pour un homme ou une vache de s'abriter sous un arbre ?

Exercice 4 — *D'après CCP 14*

On impose un champ magnétique variable de la forme $\vec{B} = B_0 \cos\omega t\, \vec{e}_z$ dans le demi espace $x < 0$ avec $\omega = 3.10^2$ rad.s^{-1}. Un métal non magnétique, de conductivité $\gamma = 5{,}3.10^7\ \Omega^{-1}.\text{m}^{-1}$ occupe l'espace $x > 0$.
1 - En appliquant la loi d'Ohm locale, comparer les normes de la densité de courant volumique $\vec{j}$ et du courant de déplacement $\varepsilon_0 \partial\vec{E}/\partial t$. On supposera que $\vec{E}$ est de la forme $\vec{E} = E_0 \cos\omega t \vec{u}$ où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire.
2 - En évaluant $\vec{\text{rot}}\,\vec{\text{rot}}\,\vec{B}$, montrer que le champ magnétique suit une loi de diffusion de la forme : $\Delta\vec{B} = K\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$
On exprimera K en fonction de μ_0 et γ. Dans quel autre domaine de la physique une telle équation apparaît ?
3 - Montrer qu'une solution de l'équation précédente dans le métal est de la forme : $\vec{B} = B_0 e^{-x/\delta} \cos(\omega t - x/\delta)\,\vec{e}_z$.
On exprimera alors δ en fonction de ω, μ_0 et γ.
4 - En utilisant l'équation de Maxwell-Ampère, déterminer le champ électrique dans le métal.
5 - En déduire l'expression du courant volumique et le représenter à $t = 0$.
6 - Calculer la valeur de δ. justifier que la distance caractéristique δ porte la dénomination d'épaisseur de peau.
Données : permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}9.10^{-12}$ F.m^{-1} ; $\vec{\text{rot}}\,\vec{\text{rot}}\,\vec{X} = \vec{\text{grad}}\,\text{div}\,\vec{X} - \Delta X$; $\mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1$.

Problème ouvert

Exercice 5



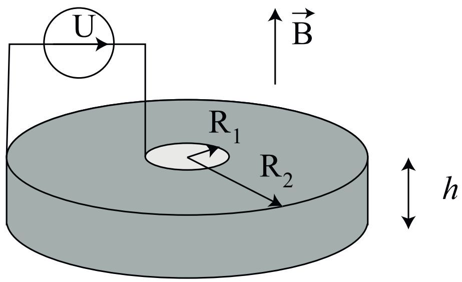
On emballe un smartphone dans une feuille d'aluminium d'épaisseur $e = 20\,\mu$m. Le smartphone est conçu pour recevoir ou émettre des ondes de fréquence $f = 2{,}4\,\text{GHz}$ typiquement.
On estime qu'un signal de puissance suffisante vaut $1\,\mu$W et correspond à « 5 barres »de réception. Une atténuation de 100 dB ne permet plus de réceptionner suffisamment le signal.
Déterminer un ordre de grandeur de la puissance de l'onde en sortie de la feuille d'aluminium.
Données :

- conductivité de l'aluminium : $\sigma = 38 \cdot 10^6\,\text{S}\cdot\text{m}^{-1}$
- échelle en décibel (dB) : $X_{dB} = 10 \log \frac{P}{P_0}$

Les difficiles

Exercice 6

On considère un anneau métallique cylindrique compris entre les rayon R_1 et R_2 et d'épaisseur h, on note σ sa conductivité. On applique une différence de potentiel entre la face interne et externe du dispositif. On supposera que les grandeurs utilisées sont indépendantes de z.



1 - Déterminer la résistance électrique de cet anneau.
2 - On plonge cet anneau dans un champ magnétique $\vec{B} = B_0\,\vec{e}_z$ uniforme. On modélise les interactions du métal sur les électrons par une

force de frottement fluide $\vec{f} = -m\vec{v}/\tau$. Déterminer l'équation reliant la densité volumique de courant $\vec{j}$, le champ électrique $\vec{E}$ et le champ magnétique $\vec{B}$. On notera n le nombre d'électrons par unité de volume et e la charge élémentaire.
3 - On admet que le champ électrique reste radial dans l'anneau. En déduire que la résistance du disque est modifiée par effet **Corbino** et vaut alors :

$$R' = R(1 + C_H \sigma^2 B_0^2)$$

où $C_h = 1/ne$,

Exercice 7

Une onde électromagnétique plane, progressive et harmonique de pulsation ω, est transmise dans un conducteur et s'y propage parallèlement à l'axe Oz suivant les z croissants. Le champ électrique $\vec{E}_t(z,t)$ de l'onde transmise s'écrit, en notation complexe $\underline{\vec{E}_t}(z,t) = E_{to}e^{i(\omega t - \underline{k}z)}\vec{e}_x$, avec E_{to} constante positive et $\underline{\vec{k}} = (k_1 + ik_2)\,\vec{e}_z$, vecteur d'onde complexe pour lequel k_1 et k_2 sont réels.
1 - L'onde électromagnétique est-elle polarisée ? Si oui, de quelle polarisation s'agit-il ?
2 - En utilisant la loi d'Ohm locale et les équations de Maxwell établir l'équation de diffusion satisfaite par le champ électrique.
3 - Montrer que la relation de dispersion définissant le vecteur d'onde complexe k s'écrit : $\underline{k}^2 = -i\omega\mu_0\sigma_0$.
4 - Pour une propagation selon les z croissants, déterminer le signe de k_1 et l'expression des composantes k_1 et k_2 en fonction des grandeurs ω, μ_0 et σ_0.
5 - Déterminer l'expression du champ électrique réel $\vec{E}_t(z,t)$ en faisant apparaître une grandeur δ homogène à une longueur.
6 - Tracer la courbe représentative de l'amplitude du champ électrique en fonction de z.
7 - Déterminer l'expression du champ magnétique noté $\vec{B}_t(z,t)$.
8 - Montrer que la valeur moyenne du vecteur de Poynting s'écrit :

$$<\vec{\Pi}_t(z,t)> = \frac{E_{t0}^2 e^{-2z/\delta}}{2\mu_0\omega\delta} e^{-2z/\delta}\,\vec{e}_z$$

9 - L'onde traverse une feuille d'aluminium sur une épaisseur $a = 1{,}0 \times 10^{-4}$ m. Calculer la valeur de δ, puis le coefficient d'atténuation défini par :

$$A = \frac{\| < \vec{\Pi}_t(z = a,t) > \|}{\| < \vec{\Pi}_t(z = 0,t) > \|}$$

Données :

- conductivité électrique de l'aluminium $\sigma_0 = 3{,}8.10^7$ S.m^{-1}
- permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}9.10^{-12}$ F.m^{-1}
- perméabilité du vide : $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m^{-1}

Exercice 8 — *D'après Centrale 06*

On considère un milieu métallique occupant le demi-espace $z > 0$. Le métal est supposé ohmique et on note $\sigma = 7{,}6.10^7$ S.m^{-2} sa conductivité électrique. On étudie les propriétés d'une onde électromagnétique dont le champ électrique, dans le métal, s'écrit en notation complexe

$$\underline{\vec{E}} = E_0(z)\,\vec{e}_x e^{i(\omega t - kz)}$$

1 - Écrire la loi d'Ohm locale liant le vecteur densité de courant et le champ $\vec{E}$ ainsi que la loi locale de conservation de la charge électrique.
2 - En utilisant une des équations de Maxwell et les expressions précédentes montrer que la densité volumique de charge ρ vérifie l'équation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{\tau} = 0$$

Calculer numériquement τ. Sachant qu'on utilise des signaux dont la fréquence est inférieure à 10^9 Hz, que peut-on en conclure pour la densité volumique de charge dans un métal ?
3 - On peut montrer, dans les mêmes conditions que précédemment, que l'équation de Maxwell-Ampère dans un métal s'écrit localement $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j}$. Établir que l'équation de propagation du champ électrique s'écrit

$$\vec{\Delta}\vec{E} = \mu_0\sigma\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

4 - Établir l'équation différentielle vérifiée par $E_0(z)$. On admet que les solutions de cette équation peuvent se mettre sous la forme

$$\vec{\mathrm{E}} = \alpha \mathrm{E}_0\, \vec{e}_x e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - z/\delta)} + \beta \mathrm{E}_0\, \vec{e}_x e^{z/\delta} e^{i(\omega t + z/\delta)}$$

avec $\delta = \sqrt{2/\mu_0 \sigma \omega}$. Commenter ces expressions. Montrer qu'un des coefficient α ou β est nul.

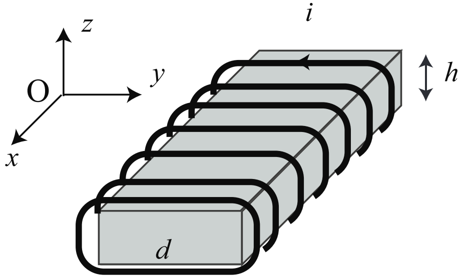
5 - Donner l'expression de la densité de courant. Expliquer qualitativement comment se traduit le principe de conservation de l'énergie pour le phénomène étudié.

6 - Calculer numériquement δ pour $f = 50$ Hz; 50 kHz; 50 MHz. Montrer que le courant a tendance à se localiser à la surface du conducteur sur une épaisseur de l'ordre de quelques δ. Justifier la dénomination d'épaisseur de peau pour δ.

Exercice 9 — *D'après X 23*

Certaines forges utilisent des spires alimentées par un courant alternatif permettant de chauffer les métaux par courants induits. L'objectif est de trouver les meilleurs paramètres de travail pour optimiser la puissance transmise à la pièce métallique. On considère une barre métallique infinie, de section $d \times h$ comme représentée sur le schéma ci-dessous. On admet que les équations de Maxwell dans un milieu possédant des propriétés magnétiques sont inchangées hormis μ_0 qui devient $\mu = \mu_0 \mu_r$.

1 - En adaptant les équations de Maxwell à la géométrie du problème, déterminer l'équation vérifiée par le champ $\vec{\mathrm{B}}(x,y,z,t) = \underline{\mathrm{B}}_x(x,y,z) e^{i\omega t}\, \vec{e}_x$ lorsque les bobines sont traversées par des courants sinusoïdaux à la pulsation ω avec $\delta = \sqrt{2/\mu\sigma\omega}$.



2 - Dans l'hypothèse d'une plaque mince ($h \ll d$), on peut négliger la dépendance suivant y, montrer que

$$\underline{\mathrm{B}}(z) = \mathrm{B}_s \frac{e^{(1-i)z/\delta} + e^{-(1-i)z/\delta}}{e^{(1-i)h/2\delta} + e^{-(1-i)h/2\delta}}$$

où B_s est l'amplitude du champ magnétique à la surface du métal.

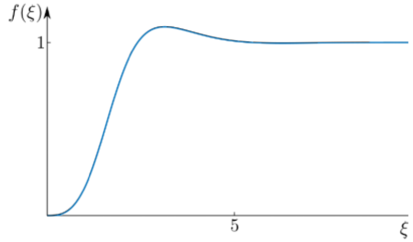
3 - Exprimer le vecteur densité de courant $\underline{\vec{j}}$.

4 - Calculer la puissance moyenne dissipée par effet joule, par unité de surface dans le métal, sur une épaisseur h. Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme : $\mathrm{P_J} = \mathrm{P}_0 f(\xi)$ où $\xi = h/2\delta$ et :

$$f(\xi) = \frac{\sinh \xi - \sin \xi}{\cosh \xi + \cos \xi}$$

On utilisera le fait que $< \mathcal{P}_{vol} >= \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\underline{\vec{j}} \cdot \underline{\vec{\mathrm{E}}}^*)$.

5 - On donne l'allure de la fonction f sur la courbe ci-contre. En s'aidant de la figure, déterminer quelle est la meilleure fréquence de travail pour maximiser la puissance dissipée par effet Joule dans la plaque. Cette valeur vous paraît-elle raisonnable pour une plaque d'1 mm d'épaisseur faite d'acier (de perméabilité relative $\mu_r = 100$ et de conductivité électrique $\sigma = 10^7$ S.m^{-1} ?



Exercice 1

1 - Dans le référentiel galiléen du laboratoire, l'électron est soumis à

- la force de Lorentz : $\vec{f} = q\vec{\mathrm{E}}_0$;
- la force de frottement $\vec{\mathrm{F}} = -h\vec{v}$;
- son poids considéré comme négligeable en présence d'un champ électrique.

L'application du principe fondamental de la dynamique conduit à

$$m\dot{\vec{v}} = q\vec{\mathrm{E}}_0 - h\vec{v}$$

2 - L'équation différentielle sous forme canonique devient :

$$\dot{\vec{v}} + \frac{1}{\tau}\vec{v} = \frac{q\vec{\mathrm{E}}_0}{m} \text{ avec } \tau = m/h$$

Lorsque la vitesse limite est atteinte : $\dot{v} = 0$