TD 22 milieux conducteur

Les classiques

Exercice 1 *D'après Centrale*

On considère un milieu conducteur homogène de dimension supposée infinie. On note γ sa conductivité électrique en régime statique. On suppose qu'il y a n porteurs de charge libres par unité de volume, n est supposé indépendant du temps. Chaque porteur de charge libre est de masse m et possède une charge q.

1 - On soumet ce conducteur à un champ électrique permanent et uniforme $\vec{E}_0$. On admet, suivant le modèle de Drude, que l'interaction des charges fixes sur un porteur de charge libre est assimilable à une force de frottement fluide $\vec{F} = -h\vec{v}$. Écrire l'équation différentielle du mouvement vérifiée par la vitesse d'un porteur de charge libre.

2 - Montrer que cette vitesse tend vers une vitesse limite $\vec{v}_{\text{lim}}$. On exprimera et définira un temps τ de relaxation du matériau.

3 - Exprimer la densité volumique de courant $\vec{j}$ en fonction de v_{lim}, n et q. En déduire la relation entre γ,q,n et h.

4 - On suppose que le conducteur possède un électron libre par atome. La matériau considéré est de l'acier (alliage de fer avec du carbone en faible proportion). Préciser les ordres de grandeurs de n,h et τ.

Données : $\mu_{\text{acier}} = 8.10^3$ kg.m^{-3} , $M_{\text{acier}} = 60$ g.mol^{-1} , $\gamma_{\text{acier}} = 1.10^7$ S.m^{-1}, $\mathcal{N} = 6.10^{23}$ mol^{-1}, $e = 1{,}6.10^{-19}$ C, $m_e = 9.10^{-31}$ kg.

Exercice 1

1 - Dans le référentiel galiléen du laboratoire, l'électron est soumis à

- la force de Lorentz : $\vec{f} = q\vec{E}_0$;
- la force de frottement $\vec{F} = -h\vec{v}$;
- son poids considéré comme négligeable en présence d'un champ électrique.

L'application du principe fondamental de la dynamique conduit à

$$m\dot{\vec{v}} = q\vec{E}_0 - h\vec{v}$$

2 - L'équation différentielle sous forme canonique devient :

$$\dot{\vec{v}} + \frac{1}{\tau}\vec{v} = \frac{q\vec{E}_0}{m} \text{ avec } \tau = m/h$$

Lorsque la vitesse limite est atteinte : $\dot{v} = 0$

d'où
$$0 = q\vec{E}_0 - h\vec{v}_{\text{lim}} \text{ soit } \vec{v}_{\text{lim}} = \frac{q\vec{E}_0}{h}$$

3 - Par définition $\vec{j} = n^\star q\vec{v}_{\text{lim}} = \frac{n^\star q^2}{h}\vec{E}_0$. Pour un conducteur ohmique $\vec{j} = \gamma\vec{E}$,

d'où
$$\gamma = \frac{n^\star q^2}{h}$$

4 - Avec un électron libre par atome, le nombre d'électrons par unité de volume dans l'acier vaut :

$$n^\star = \frac{\mathcal{N}_{\mathcal{A}}\mu}{M} = 8.10^{28} \text{ m}^{-3}$$

Grâce à la conductivité, on obtient :

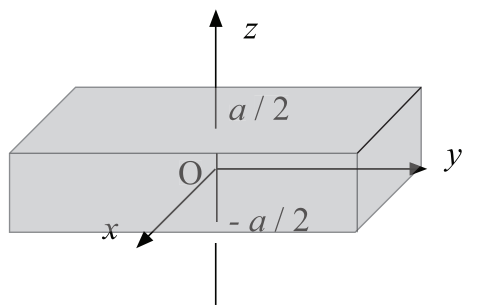
$$h = \frac{n^\star q^2}{\gamma} = 0{,}2.10^{-15} \text{ kg.s}^{-1}$$

Enfin, on obtient $\tau = \dfrac{m}{h} = 4.10^{-14}$ s

Exercice 2

On considère deux plans infinis P et P′ parallèles au plan Oxy et coupant l'axe Oz en $z = -a/2$ et $z = +a/2$. Ces deux plans définissent un conducteur de cuivre de conductivité γ.

On suppose que le métal est parcouru par une densité de courant $\vec{j} = j\,\vec{e}_y$.

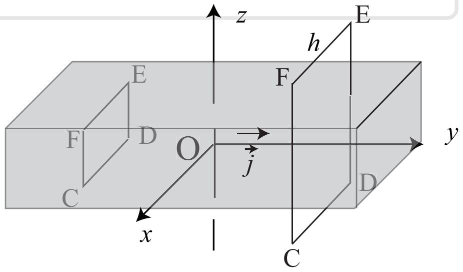


1 - Définir l'orientation de $\vec{B}(M)$ en tout point M de l'espace.

2 - Calculer $\vec{B}(M)$ à l'aide du théorème d'Ampère.

3 - Retrouver l'expression de $\vec{\mathrm{B}}(\mathrm{M})$ à l'intérieur du conducteur grâce à l'équation de Maxwell-Ampère.
4 - Calculer la puissance volumique dissipée par effet Joule en fonction de γ, j et μ_0.
5 - Évaluer le vecteur de Poynting.
6 - Effectuer un bilan d'énergie sur un cube de conducteur de côté a. Conclure.

Exercice 2



1 - Le vecteur densité de courant est source de champ magnétique, le plan $(\mathrm{M}, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est plant de symétrie pour le courant, on en déduit que

$$\vec{\mathrm{B}}(\mathrm{M}) = \mathrm{B}(\mathrm{M})\,\vec{e}_x$$

La densité de courant est invariante par translation selon y et x, on en déduit que

$$\vec{\mathrm{B}}(x,y,z) = \vec{\mathrm{B}}(z)$$

Utilisons un contour d'Ampère rectangulaire CDEF dans le plan Mxz, de hauteur $2z$ et de largeur h.
Par définition :

$$\oint_{\mathrm{CDEF}} \vec{\mathrm{B}}.\mathrm{d}\vec{\ell} = 2\mathrm{B}(z)h$$

Le courant enlacé vaut

$$2zh \times j \text{ si } z < a/2 \text{ et } ah \times j \text{ sinon}$$

L'application du théorème d'Ampère conduit à

$$\vec{\mathrm{B}}(z) = \begin{cases} \mu_0 j a/2 \text{ si } z > a \\ \mu_0 j z \text{ si } z > a \end{cases}$$

3 - L'expression du rotationnel en coordonnées cartésiennes est :

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{B}_z}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathrm{B}_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \mathrm{B}_x}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathrm{B}_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \mathrm{B}_y}{\partial x} - \dfrac{\partial \mathrm{B}_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

D'après l'orientation du champ magnétique $\vec{\mathrm{B}}(\mathrm{M}) = \mathrm{B}(\mathrm{M})\,\vec{e}_x$, ainsi :

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{\partial \mathrm{B}_x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \mathrm{B}_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

D'après les variables dont dépend le champ magnétique $\vec{\mathrm{B}}(x,y,z) = \mathrm{B}(z)\,\vec{e}_x$, ainsi :

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{\partial \mathrm{B}_x}{\partial z} \\ 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que l'équation de Maxwell-Ampère se résume à :

$$\frac{\partial \mathrm{B}_x}{\partial z} = \mu_0 j \quad \text{soit} \quad \mathrm{B}_x = \mu_0 j z$$

4 - Dans le conducteur, la puissance volumique cédée aux porteurs de charge est donnée par :

$$\mathcal{P}_{vol} = \vec{j}.\vec{\mathrm{E}}$$

D'après la loi d'Ohm locale, il vient :

$$\mathcal{P}_{vol} = \frac{j^2}{\gamma}$$

5 - Le vecteur de Poynting, est définie par :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{\mathrm{E}} \wedge \vec{\mathrm{B}}}{\mu_0}$$

d'où

$$\vec{\Pi} = -\frac{\vec{j} \wedge \mathrm{B}}{\mu_0 \gamma} = \frac{j^2}{\gamma} z\,\vec{e}_z$$

6 - Calculons le flux du vecteur de Poynting à travers un cube de côté a. Seules les contributions sur la face supérieure ($z = +a/2$) et inférieure ($z = -a/2$) sont non-nulles. Les vecteurs surface étant opposé au vecteur de Poynting car orientés vers l'extérieur, il vient :

$$\int\int \vec{\Pi}\mathrm{d}\vec{\mathrm{S}} = -\Pi(z = +a/2) \times a^2 - \Pi(z = -a/2) \times a^2$$

On obtient donc

$$\iint \vec{\Pi}\mathrm{d}\vec{S} = -\frac{j^2}{\gamma}a^3$$

Calculons la puissance cédée aux porteurs de charge :

$$\mathcal{P} = \iiint_{cube} \mathcal{P}_{vol}\mathrm{d}\tau = \frac{j^2}{\gamma}a^3$$

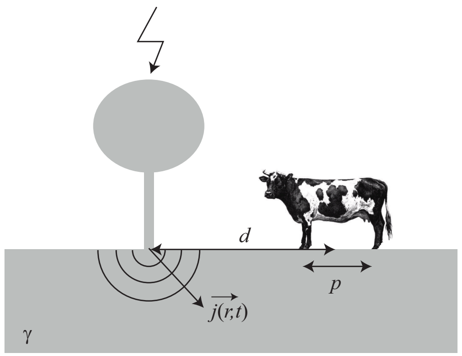
On en déduit l'égalité :

$$\iint \vec{\Pi}\mathrm{d}\vec{S} + \iiint_{cube} \mathcal{P}_{vol}\mathrm{d}\tau = 0$$

On peut donc conclure que l'intégralité de l'énergie contenue dans le champ électromagnétique est dissipée par effet Joule dans le conducteur.

Exercice 3

On modélise un éclair par un fil rectiligne parcouru par un courant $\mathrm{I}(t)$.



1 - Représenter le courant dans une base adaptée. Sachant que les nuages sont chargées négativement, déterminer sur le schéma précédent le sens du courant.

2 - Justifier que le champ magnétique est de la forme : $\vec{\mathrm{B}}(\mathrm{M},t) = \mathrm{B}(r,t)\,\vec{e}_\theta$ en coordonnées cylindriques. Montrer que l'expression du champ magnétique peut se mettre sous la forme $\mathrm{B}(r,t) = \mathrm{K}\frac{\mathrm{I}(t)}{r}$ où K est une constante à déterminer. On justifiera soigneusement les hypothèses employées.

En cas d'orage, il est préconisé de ne pas s'abriter sous un arbre. On considère la situation suivante : une vache se situe près d'un arbre qui est traversé verticalement par l'éclair. On considère que la Terre possède une conductivité électrique γ et une densité volumique de courant $\vec{j}(r,t) = j(r,t)\,\vec{e}_r$ en coordonnées sphériques.

3 - Montrer que $j(r,t) = \frac{\mathrm{I}(t)}{2\pi r^2}$.

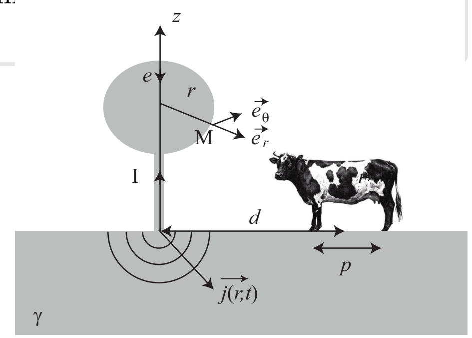
4 - Rappeler la loi d'Ohm locale et déterminer l'expression du champ électrique et en déduire une expression du potentiel sachant qu'il est est nul à l'infini.

5 - On note U_p la tension entre les pattes avant et arrière de la vache. En considérant que $d \gg p$, montrer que $\mathrm{U}_p \sim \frac{\mathrm{I}p}{2\pi\gamma d^2}$

6 - On note d_{min} la distance pour laquelle il y a danger c'est à dire si un courant de 30 mA circule dans le corps dont la résistance est estimée à $\mathrm{R} = 100\,\mathrm{k\Omega}$. Dans cette situation, on a $\mathrm{I} = 15\,\mathrm{kA}$, $\gamma = 30\,\mathrm{mS/m}$ et $p = 2\,\mathrm{m}$. Déterminer l'expression de d_{min} et la calculer.

7 - Est il plus dangereux pour un homme ou une vache de s'abriter sous un arbre ?

Exercice 3



1 - On utilise la base cylindrique pour représenter le courant. Ce dernier est orienté dans le sens opposé du déplacement des électrons, il s'agit donc d'un courant orienté selon $+\mathrm{O}z$.

2 - Tout plan contenant l'axe Oz est un plan de symétrie du courant, on en déduit que le champ est perpendiculaire à ce plan soit selon $\vec{e}_\theta$. L'invariance du courant par rotation autour de Oz ainsi que par translation selon z indique le champ magnétique ne dépend ni de θ ni de z. Nous supposerons que l'intensité varie sur une durée $\tau >> r/c$ de sorte que les conditions de l'ARQS soit valide. L'application du théorème d'Ampère sur un cercle de rayon r nous permet d'écrire que :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{\mathrm{B}}\cdot\vec{\mathrm{d}\ell} = \mu_0\mathrm{I}(t) \quad \text{soit} \quad \mathrm{B}(r,t) = \frac{\mu_0\mathrm{I}(t)}{2\pi r}\,\vec{e}_\theta$$

.

3 - En supposant que le courant se répartisse uniformément sur une demi-sphère de rayon r, on peut écrire que : $\mathrm{I}(t) = j(r,t)\times 2\pi r^2$.

4 - D'après la loi d'Om locale, $\vec{j} = \gamma\vec{\mathrm{E}}$, on en déduit que : $\vec{\mathrm{E}}(r,t) = \gamma\frac{\mathrm{I}}{\pi r^2}\,\vec{e}_r$. L'ARQS étant supposé valide, on en déduit l'expression du potentiel par la relation $\vec{\mathrm{E}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{V}$. Par intégration, il vient :

$$-\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{I}}{\pi\gamma r^2} \quad \text{soit} \quad \mathrm{V}(r) = \frac{\mathrm{I}}{\pi\gamma r}$$

5 - La différence de potentiel est donné par :

$$\mathrm{U}_p = \mathrm{V}(d-p/2) - \mathrm{V}(d+p/2) = \frac{\mathrm{I}}{\pi\gamma(d-p/2)} - \gamma\frac{\mathrm{I}}{\pi\gamma(d+p/2)}$$

En utilisant un développement limité :

$$\frac{1}{d-p/2} = \frac{1}{d}\frac{1}{1-p/d} \approx \frac{1}{d}(1+\frac{p}{d}) \quad \text{et} \quad \frac{1}{d+p/2} = \frac{1}{d}\frac{1}{1+p/d} \approx \frac{1}{d}(1-\frac{p}{d})$$

On obtient alors $\mathrm{U}_p = \frac{\mathrm{I}p}{\pi\gamma d^2}$

6 - En cas de danger, $\mathrm{U}_{p,max} = \mathrm{RI}_{max} = 3\cdot 10^3\,\mathrm{V}$. On obtient donc la distance minimale vérifiant :

$$d_{min} = \sqrt{\frac{\mathrm{I}p}{\pi\gamma \mathrm{U}_{p,max}}} = 10\,\mathrm{m}$$

7 - La dépendance de la tension de pas U_p étant proportionnelle à p, une vache a plus de risque qu'un homme.

Exercice 4 *D'après CCP 14*

On impose un champ magnétique variable de la forme $\vec{\mathrm{B}} = \mathrm{B}_0 \cos\omega t\,\vec{e}_z$ dans le demi espace $x < 0$ avec $\omega = 3.10^2$ rad.s^{-1}. Un métal non magnétique, de conductivité $\gamma = 5{,}3.10^7\ \Omega^{-1}$.m^{-1} occupe l'espace $x > 0$.

1 - En appliquant la loi d'Ohm locale, comparer les normes de la densité de courant volumique $\vec{j}$ et du courant de déplacement $\varepsilon_0\partial\vec{\mathrm{E}}/\partial t$. On supposera que $\vec{\mathrm{E}}$ est de la forme $\vec{\mathrm{E}} = \mathrm{E}_0\cos\omega t\vec{u}$ où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire.

2 - En évaluant $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{B}}$, montrer que le champ magnétique suit une loi de diffusion de la forme : $\Delta\vec{\mathrm{B}} = \mathrm{K}\dfrac{\partial\vec{\mathrm{B}}}{\partial t}$

On exprimera K en fonction de μ_0 et γ. Dans quel autre domaine de la physique une telle équation apparaît ?

3 - Montrer qu'une solution de l'équation précédente dans le métal est de la forme : $\vec{\mathrm{B}} = \mathrm{B}_0 e^{-x/\delta}\cos(\omega t - x/\delta)\,\vec{e}_z$.

On exprimera alors δ en fonction de ω, μ_0 et γ.

4 - En utilisant l'équation de Maxwell-Ampère, déterminer le champ électrique dans le métal.

5 - En déduire l'expression du courant volumique et le représenter à $t = 0$.

6 - Calculer la valeur de δ. justifier que la distance caractéristique δ porte la dénomination d'épaisseur de peau.

Données : permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}9.10^{-12}$ F.m^{-1} ; $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{X}} = \vec{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{X}} - \Delta\mathrm{X}$; $\mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1$.

Exercice 4

1 - Dans le métal, l'équation de Maxwell-Ampère se résume à

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{B}} = \mu_0\gamma\vec{\mathrm{E}}$$

2 - Évaluons le double rotationnel de deux manières différentes :

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{B}} = \vec{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{B}} - \Delta\vec{\mathrm{B}}$$

En utilisant l'équation de Maxwell-Flux ($\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{B}} = 0$), il vient :

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{B}} = -\Delta\vec{\mathrm{B}}$$

Par ailleurs, d'après l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{B}} = \vec{\mathrm{rot}}\left(\mu_0\gamma\vec{\mathrm{E}}\right) = \mu_0\gamma\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{E}}$$

D'après l'équation de Maxwell-Faraday, on en déduit que :

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{B}} = -\mu_0\gamma\frac{\partial\vec{\mathrm{B}}}{\partial t} \quad \text{soit} \quad \Delta\vec{\mathrm{B}} = \mu_0\gamma\frac{\partial\vec{\mathrm{B}}}{\partial t}$$

3 - Vérifions chaque terme de l'égalité précédente :

$$\frac{\partial\mathrm{B}(x,t)}{\partial x} = \frac{-1}{\delta}\mathrm{B}_0 e^{-x/\delta}\cos(\omega t - x/\delta) - \frac{-1}{\delta}\mathrm{B}_0 e^{-x/\delta}\sin(\omega t - x/\delta)$$

soit
$$\frac{\partial\mathrm{B}(x,t)}{\partial x} = \frac{\mathrm{B}_0}{\delta}e^{-x/\delta}(\sin(\omega t - x/\delta) - \cos(\omega t - x/\delta))$$

Évaluons la dérivée seconde :

$$\frac{\partial^2\mathrm{B}(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{\mathrm{B}_0}{\delta^2}e^{-x/\delta}(\sin(\omega t-x/\delta)-\cos(\omega t-x/\delta)) - \frac{\mathrm{B}_0}{\delta^2}e^{-x/\delta}(\cos(\omega t-x/\delta)-\sin(\omega t-x/\delta))$$

Ainsi,
$$\frac{\partial^2\mathrm{B}(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\mathrm{B}_0}{\delta^2}e^{-x/\delta}(-2\sin(\omega t - x/\delta))$$

Par ailleurs, la dérivée temporelle vérifie :

$$\frac{\partial \mathrm{B}(x,t)}{\partial t} = -\mathrm{B}_0 \omega e^{-x/\delta} \sin(\omega t - x/\delta)$$

On en conclut que l'équation de diffusion précédente est valide si

$$\frac{2}{\delta^2} = \mu_0 \gamma \omega \quad \text{soit} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$$

4 - L'équation de Maxwell-Ampère se résume à $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{B}} = \mu_0 \gamma \vec{\mathrm{E}}$.
Le champ magnétique ne dépend que de x et est porté par $\vec{e}_z$, projetons l'équation de Maxwell-Ampère sur l'axe Oy :

$$-\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial x} = \mu_0 \gamma \mathrm{E}_y$$

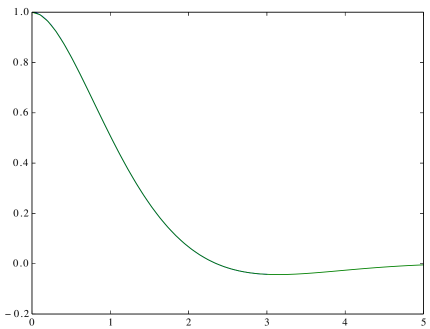
d'où $$\vec{\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{B}_0}{\mu_0 \gamma \delta} e^{-x/\delta} (\sin(\omega t - x/\delta) - \cos(\omega t - x/\delta))\, \vec{e}_y$$

5 - D'après la loi d'Ohm locale, on en déduit que :

d'où $$\vec{j}(x,t) = \gamma \vec{\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{B}_0}{\mu_0 \delta} e^{-x/\delta} (\sin(\omega t - x/\delta) - \cos(\omega t - x/\delta))\, \vec{e}_y$$

Pour $t = 0$, on obtient :

$$\vec{j}(x,0) = \gamma \vec{\mathrm{E}} = -\frac{\mathrm{B}_0}{\mu_0 \delta} e^{-x/\delta} (\sin(x/\delta) + \cos(x/\delta))\, \vec{e}_y = -\frac{\mathrm{B}_0}{\mu_0 \delta} e^{-x/\delta} \sqrt{2} \sin(x/\delta - \pi/4)\, \vec{e}_y$$

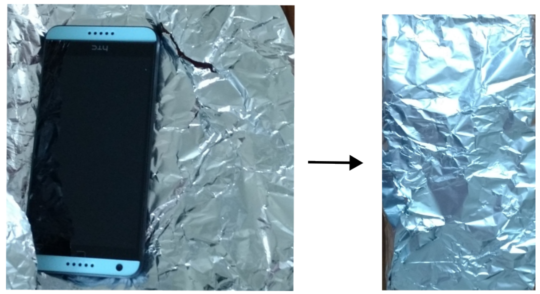


6 - La distance caractéristique de décroissance du courant volumique est $\delta = 1$ cm. Comme il est principalement contenu dans une couche d'épaisseur δ, il est légitime d'appeler cette grandeur « épaisseur de peau ».

Problème ouvert

Exercice 5

On emballe un smartphone dans une feuille d'aluminium d'épaisseur $e = 20\,\mu$m. Le smartphone est conçu pour recevoir ou émettre des ondes de fréquence f = 2,4 GHz typiquement.



On estime qu'un signal de puissance suffisante vaut 1 μW et correspond à « 5 barres »de réception. Une atténuation de 100 dB ne permet plus de réceptionner suffisamment le signal.
Déterminer un ordre de grandeur de la puissance de l'onde en sortie de la feuille d'aluminium.
Données :

- conductivité de l'aluminium : $\sigma = 38 \cdot 10^6\,\mathrm{S} \cdot \mathrm{m}^{-1}$
- échelle en décibel (dB) : $\mathrm{X}_{d\mathrm{B}} = 10 \log \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}_0}$

Exercice 5

Puisque l'onde traverse l'épaisseur e, elle est atténuée par effet de peau. On calcule l'épaisseur de peau ici : $\delta = 1{,}7\,\mu$m.

Le champ électrique décroit en $e^{-x/\delta}$ tout comme le champ magnétique. Le vecteur de Poynting $\vec{\Pi} = \vec{\mathrm{E}} \wedge \vec{\mathrm{B}}/\mu_0$ décroît deux fois plus rapidement, il est atténué par le facteur $e^{-2e/\delta} = 6 \cdot 10^{-11}$ à la traversée de la feuille d'aluminium. L'atténuation est donc donnée par :

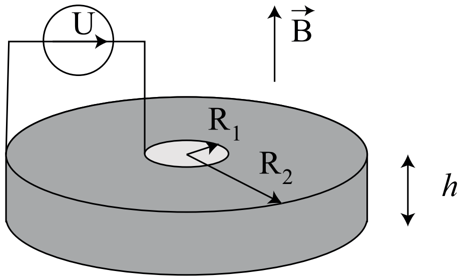
$$\mathrm{A}_{d\mathrm{B}} = 10 \log \frac{\Pi_{max}}{\Pi_{recu}} = 10 \log 6 \cdot 10^{-11} = 102\,\mathrm{dB}$$

L'atténuation est supérieure à la limite de réception, le téléphone n'est pas capable de recevoir le signal.

Les difficiles

Exercice 6

On considère un anneau métallique cylindrique compris entre les rayon R_1 et R_2 et d'épaisseur h, on note σ sa conductivité. On applique une différence de potentiel entre la face interne et externe du dispositif. On supposera que les grandeurs utilisées sont indépendantes de z.



1 - Déterminer la résistance électrique de cet anneau.
2 - On plonge cet anneau dans un champ magnétique $\vec{B} = B_0\,\vec{e}_z$ uniforme. On modélise les interactions du métal sur les électrons par une force de frottement fluide $\vec{f} = -m\vec{v}/\tau$. Déterminer l'équation reliant la densité volumique de courant $\vec{j}$, le champ électrique $\vec{E}$ et le champ magnétique $\vec{B}$. On notera n le nombre d'électrons par unité de volume et e la charge élémentaire.
3 - On admet que le champ électrique reste radial dans l'anneau. En déduire que la résistance du disque est modifiée par effet **Corbino** et vaut alors :

$$R' = R(1 + C_H\sigma^2 B_0^2)$$

où $C_h = 1/ne$,

Exercice 6

1 - Pour déterminer la résistance, relions le courant à la différence de potentiel. Par définition, la densité de courant est donnée par :

$$I = \iint j \cdot d\vec{S} = 2\pi r h j(r) \quad \text{soit} \quad j(r) = \frac{I}{2\pi r h}$$

Le problème étant invariant par rotation selon θ, en utilisant la loi d'Ohm locale, il vient : $\vec{j} = \sigma\vec{E} = -\sigma\dfrac{dV}{dr}$
Par intégration, on obtient la différence de potentiel :

$$V(R_1) - V(R_2) = U = \frac{I}{2\pi\sigma h}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

On en déduit l'expression de la résistance : $R = \dfrac{\ln R_2/R_1}{2\pi\sigma h}$
2 - Appliquons le PFD à un électron dans le métal, en régime permanent, on obtient :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = 0 = -e(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B}) - m\vec{v}/\tau$$

Par définition, la densité de courant vaut $\vec{j} = -n^\star e\vec{v}$, on en déduit que :

$$\vec{E} = \frac{m}{n^\star e^2\tau}\vec{j} + \frac{1}{n^\star e}\vec{j}\wedge\vec{B}$$

3 - Décomposons l'équation vectorielle précédente selon $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$:

$$E_r = j_r/\sigma + j_\theta B_0/(n^\star e) \quad \text{et} \quad 0 = j_\theta/\sigma - j_r B_0/(n^\star e)$$

En remplaçant le courant orthoradial, il vient : $E_r = \dfrac{j_r}{\sigma}\left(1 + \dfrac{\sigma^2}{(n^\star e)^2}B_0^2\right)$
Pat intégration sous les mêmes conditions que précédemment, on obtient le résultat attendu :

$$V(R_1) - V(R_2) = U = \frac{I}{2\pi\sigma h}\ln\frac{R_2}{R_1}\left(1 + \frac{\sigma^2}{n^2e^2}B_0^2\right)$$

Il est possible d'interpréter le résultat en comprenant que le champ magnétique dévie les électrons qui doivent passer d'un bord à l'autre et donc augmente la distance parcourue. Un doctorant a tracé les lignes de densité de courant par simulation numérique. On observe bien une augmentation de la distance par rapport à $R_2 - R_1$.

Exercice 7

Une onde électromagnétique plane, progressive et harmonique de pulsation ω, est transmise dans un conducteur et s'y propage parallèlement à l'axe Oz suivant les z croissants. Le champ électrique $\vec{E}_t(z,t)$ de l'onde transmise s'écrit, en notation complexe $\underline{\vec{E}_t}(z,t) = E_{to}e^{i(\omega t - \underline{k}z)}\vec{e}_x$, avec E_{to} constante positive et $\underline{\vec{k}} = (k_1 + ik_2)\,\vec{e}_z$, vecteur d'onde complexe pour lequel k_1 et k_2 sont réels.
1 - L'onde électromagnétique est-elle polarisée ? Si oui, de quelle polarisation s'agit-il ?

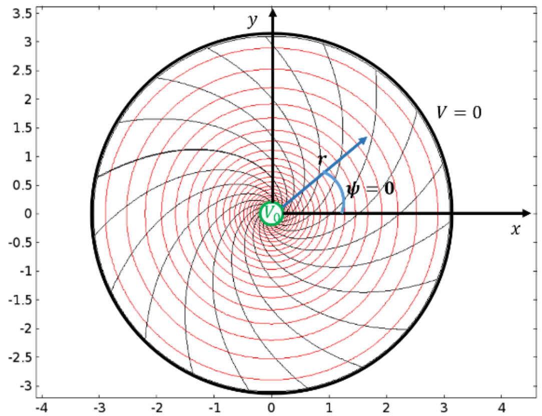


FIGURE 1 – Simulation Comsol de l'effet Hall en géométrie Corbino. Lignes de courant. D'après *Etude des effets magneto-transverses dans les matériaux ferromagnétiques : effets Righi-Leduc planaire et anomal et géométrie Corbino. Thèse B. Madon. 2017.*

2 - En utilisant la loi d'Ohm locale et les équations de Maxwell établir l'équation de diffusion satisfaite par le champ électrique.
3 - Montrer que la relation de dispersion définissant le vecteur d'onde complexe k s'écrit : $\underline{k}^2 = -i\omega\mu_0\sigma_0$.
4 - Pour une propagation selon les z croissants, déterminer le signe de k_1 et l'expression des composantes k_1 et k_2 en fonction des grandeurs ω, μ_0 et σ_0.
5 - Déterminer l'expression du champ électrique réel $\vec{\mathrm{E}}_t(z,t)$ en faisant apparaître une grandeur δ homogène à une longueur.
6 - Tracer la courbe représentative de l'amplitude du champ électrique en fonction de z.
7 - Déterminer l'expression du champ magnétique noté $\vec{\mathrm{B}}_t(z,t)$.
8 - Montrer que la valeur moyenne du vecteur de Poynting s'écrit :

$$<\vec{\Pi}_t(z,t)>=\frac{\mathrm{E}_{t0}^2 e^{-2z/\delta}}{2\mu_0\omega\delta}e^{-2z/\delta}\,\vec{e}_z$$

9 - L'onde traverse une feuille d'aluminium sur une épaisseur $a = 1{,}0 \times 10^{-4}$ m. Calculer la valeur de δ, puis le coefficient d'atténuation défini par :

$$\mathrm{A} = \frac{||<\vec{\Pi}_t(z=a,t)>||}{||<\vec{\Pi}_t(z=0,t)>||}$$

Données :

- conductivité électrique de l'aluminium $\sigma_0 = 3{,}8.10^7$ S.m^{-1}
- permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}9.10^{-12}$ F.m^{-1}
- perméabilité du vide : $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m^{-1}

Exercice 7

1 - Le champ électrique est porté par $\vec{e}_x$ donc l'onde est polarisée selon $\vec{e}_x$.
2 - En appliquant le double rotationnel on montre que :

$$\Delta\vec{\mathrm{E}} = \mu_0\sigma\frac{\partial\vec{\mathrm{E}}}{\partial t}$$

3 - Injectons le champ complexe dans l'équation de propagation :

$$(-i\underline{k})^2\vec{\mathrm{E}} = \mu_0\sigma i\omega \times \vec{\mathrm{E}} \quad \text{soit} \quad \underline{k}^2 = -i\omega\mu_0\sigma_0$$

4 - Injectons $\underline{k}$ dans le champ électrique

$$\underline{\vec{\mathrm{E}}_t}(z,t) = \mathrm{E}_{to}e^{i(\omega t-(k_1+_ik_2)z)} = \mathrm{E}_{to}e^{k_2 z}e^{i(\omega t-k_1 z)}\vec{e}_x$$

Pour une propagation selon les z croissants, il faut donc $k_1 > 0$
En utilisant le fait que $-i = e^{-i\pi/2}$, les vecteurs d'onde possibles sont donc :

$$\underline{k} = \pm e^{-i\pi/4}\sqrt{\omega\mu_0\sigma_0}$$

On obtient alors pour une propagation selon les z croissants : $\underline{k} = (1-i)\sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma_0}{2}}$ soit

$$k_1 = \sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma_0}{2}} \quad \text{et} \quad k_2 = -\sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma_0}{2}}$$

5 - Posons $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma_0}}$, il vient : $\underline{\vec{\mathrm{E}}_t}(z,t) = \mathrm{E}_{to}e^{-z/\delta}e^{i(\omega t-z/\delta)}\vec{e}_x$
6 - On attend la figure suivante à différents instants t :
7 - Utilisons l'équation de Maxwell-Faraday en notation complexe :

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\underline{\vec{\mathrm{E}}_t} = -\frac{\partial\underline{\vec{\mathrm{B}}_t}}{\partial t}$$

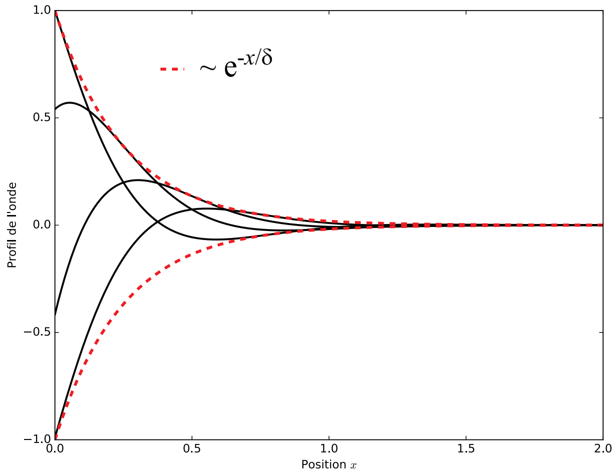


FIGURE 2 – Onde électromagnétique dans un métal : effet de peau.

Soit

$$\frac{\partial \mathrm{E}_{to}e^{-z/\delta}e^{i(\omega t - z/\delta)}}{\partial z}\,\vec{e}_y = -i\omega \underline{\mathrm{B}}_t\,\vec{e}_y$$

On obtient en notation complexe :

$$\underline{\vec{\mathrm{B}}}_t(z,t) = (1+i)\frac{1}{\delta\omega}\mathrm{E}_{to}e^{-z/\delta}e^{i(\omega t - z/\delta)}\,\vec{e}_y$$

En notation réelle, il vient :

$$\vec{\mathrm{B}}_t(z,t) = \frac{1}{\delta\omega}\mathrm{E}_{to}e^{-z/\delta}\Big(\cos(\omega t - z/\delta) - \sin(\omega t - z/\delta)\Big)\,\vec{e}_y$$

8 - Par définition :

$$\vec{\Pi}_t(z,t) = \frac{\vec{\mathrm{E}}_t \wedge \vec{\mathrm{B}}_t}{\mu_0}$$

En remplaçant les champs en notation réelle :

$$\vec{\Pi}_t(z,t) = \frac{1}{\delta\omega}\mathrm{E}_{to}^2 e^{-2z/\delta}\cos(\omega t - z/\delta)\Big(\cos(\omega t - z/\delta) - \sin(\omega t - z/\delta)\Big)\,\vec{e}_z$$

On en déduit que : $<\vec{\Pi}_t(z,t)>= \frac{1}{2\delta\omega}\mathrm{E}_{to}^2 e^{-2z/\delta}\,\vec{e}_z$.

9 - Avec l'expression précédente, le coefficient d'atténuation devient :

$$\mathrm{A} = e^{-2a/\delta}$$

Avec les valeurs numériques :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{2\pi \times 14.10^6 \times 4\pi.10^{-7} \times 3{,}8.10^7}} = 22\ \mu\mathrm{m}$$

On en déduit que $\mathrm{A} \approx 1{,}1.10^{-4}$. L'onde est vraiment très atténuée par la feuille d'aluminium.

Exercice 8 *D'après Centrale 06*

On considère un milieu métallique occupant le demi-espace $z > 0$. Le métal est supposé ohmique et on note $\sigma = 7{,}6.10^7$ S.m^{-2} sa conductivité électrique. On étudie les propriétés d'une onde électromagnétique dont le champ électrique, dans le métal, s'écrit en notation complexe

$$\underline{\vec{\mathrm{E}}} = \mathrm{E}_0(z)\,\vec{e}_x e^{i(\omega t - kz)}$$

1 - Écrire la loi d'Ohm locale liant le vecteur densité de courant et le champ $\vec{\mathrm{E}}$ ainsi que la loi locale de conservation de la charge électrique.

2 - En utilisant une des équations de Maxwell et les expressions précédentes montrer que la densité volumique de charge ρ vérifie l'équation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{\tau} = 0$$

Calculer numériquement τ. Sachant qu'on utilise des signaux dont la fréquence est inférieure à 10^9 Hz, que peut-on en conclure pour la densité volumique de charge dans un métal ?

3 - On peut montrer, dans les mêmes conditions que précédemment, que l'équation de Maxwell-Ampère dans un métal s'écrit localement $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{B}} = \mu_0\vec{j}$. Établir que l'équation de propagation du champ électrique s'écrit

$$\vec{\Delta}\vec{\mathrm{E}} = \mu_0\sigma\frac{\partial \vec{\mathrm{E}}}{\partial t}$$

4 - Établir l'équation différentielle vérifiée par $\mathrm{E}_0(z)$. On admet que les solutions de cette équation peuvent se mettre sous la forme

$$\vec{\mathrm{E}} = \alpha \mathrm{E}_0\,\vec{e}_x e^{-z/\delta}e^{i(\omega t - z/\delta)} + \beta \mathrm{E}_0\,\vec{e}_x e^{z/\delta}e^{i(\omega t + z/\delta)}$$

avec $\delta = \sqrt{2/\mu_0\sigma\omega}$. Commenter ces expressions. Montrer qu'un des coefficient α ou β est nul.

5 - Donner l'expression de la densité de courant. Expliquer qualitativement comment se traduit le principe de conservation de l'énergie pour le phénomène étudié.
6 - Calculer numériquement δ pour $f = 50$ Hz; 50 kHz; 50 MHz. Montrer que le courant a tendance à se localiser à la surface du conducteur sur une épaisseur de l'ordre de quelques δ. Justifier la dénomination d'épaisseur de peau pour δ.

Exercice 8

1 - La loi d'Ohm locale et la loi de conservation de la charge s'écrivent respectivement :

$$\vec{j} = \sigma\vec{\mathrm{E}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{j} = 0$$

2 - D'après l'équation de Maxwell-Gauss et la loi d'Ohm local, on peut écrire :

$$\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \text{ soit } \frac{1}{\sigma}\mathrm{div}\,\vec{j} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

En injectant cette équation dans l'équation obtenue précédemment, on obtient :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\rho \text{ soit } \tau = \varepsilon_0/\sigma = 1{,}2.10^{-19}\ \mathrm{s}$$

Devant une valeur aussi faible, on peut raisonnablement supposer que la densité volumique de charge est nulle dans un métal.
3 - Calculons $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{E}}$ à partir du formulaire donné dans l'énoncé :

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{E}} = \vec{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{E}} - \Delta\vec{\mathrm{E}} = -\Delta\mathrm{E} \text{ car } \mathrm{div}\,\vec{\mathrm{E}} = 0 \text{ dans le métal.}$$

Utilisons maintenant l'équation de Maxwell-Faraday puis l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{E}} = \vec{\mathrm{rot}}\left(-\frac{\partial\vec{\mathrm{B}}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{B}} = -\frac{\partial}{\partial t}\mu_0\vec{j}$$

En utilisant la loi d'Ohm locale on en conclut que

$$\Delta\vec{\mathrm{E}} = \mu_0\sigma\frac{\partial\vec{\mathrm{E}}}{\partial t}$$

4 - En coordonnées cartésiennes, le Laplacien s'écrit simplement :

$$\Delta\vec{\mathrm{E}} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\mathrm{E}_0(z)e^{i(\omega t - kz)}\,\vec{e}_x$$

soit
$$\Delta\vec{\mathrm{E}} = \Big(\mathrm{E}_0(z)'' - 2ik\mathrm{E}_0'(z) - k^2\mathrm{E}_0(z)\Big)e^{i(\omega t-kz)}\,\vec{e}_x$$

Or
$$\mu_0\sigma\frac{\partial\vec{\mathrm{E}}}{\partial t} = i\mu_0\sigma\mathrm{E}_0(z)e^{i(\omega t-kz)}\,\vec{e}_x$$

d'où
$$\mathrm{E}_0(z)'' - 2ik\mathrm{E}_0'(z) - k^2\mathrm{E}_0(z) = i\mu_0\sigma\mathrm{E}_0(z)$$

La solution proposée indique une propagation selon l'axe Oz, polarisée selon Ox avec une amplitude variant en fonction de z par les termes $\mathrm{E}_0e^{\pm z/\delta}$. Or l'amplitude de l'onde ne peut diverger dans le métal lorsque $z \to \infty$. On en déduit que

$$\vec{\mathrm{E}} = \mathrm{E}_0\,\vec{e}_x e^{-z/\delta}e^{i(\omega t - z/\delta)} \text{ soit } \beta = 0$$

5 - Ainsi, d'après la loi d'Ohm locale, on obtient :

$$\vec{j} = \sigma\vec{\mathrm{E}} = \sigma\mathrm{E}_0\,\vec{e}_x e^{-z/\delta}e^{i(\omega t - z/\delta)}$$

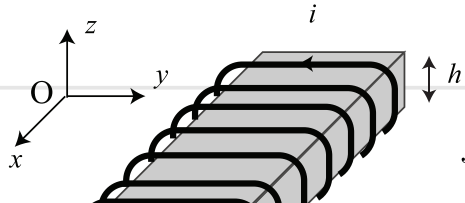
Comme la densité de courant est colinéaire au vecteur $\vec{\mathrm{E}}$, l'onde électromagnétique cède de l'énergie par effet Joule ($\mathcal{P}_\mathrm{V} = \vec{j}.\vec{\mathrm{E}}$) au métal.
6 - Avec les données de l'énoncé on obtient :

$$\delta(50\ \mathrm{Hz}) = 8{,}1\ \mathrm{mm}, \delta(50\ \mathrm{kHz}) = 0{,}26\ \mathrm{mm} \quad \text{et} \quad \delta(50\ \mathrm{MHz}) = 8{,}1\ \mu\mathrm{m}$$

L'amplitude du courant étant nulle pour z supérieur à quelque δ, l'appellation "épaisseur" de peau est justifié vu que les valeurs de δ sont faibles.

Exercice 9 *D'après X 23*

Certaines forges utilisent des spires alimentées par un courant alternatif permettant de chauffer les métaux par courants induits. L'objectif est de trouver les meilleurs paramètres de travail pour optimiser la puissance transmise à la pièce métallique. On considère une barre métallique infinie, de section $d \times h$ comme représentée sur le schéma ci-dessous. On admet que les équations de Maxwell dans un milieu possédant des propriétés magnétiques sont inchangées hormis μ_0 qui devient $\mu = \mu_0\mu_r$.
1 - En adaptant les équations de Maxwell à la géométrie du pro-



blème, déterminer l'équation vérifiée par le champ $\vec{\mathrm{B}}(x,y,z,t) = \underline{\mathrm{B}}_x(x,y,z)e^{i\omega t}\,\vec{e}_x$ lorsque les bobines sont traversées par des courants sinusoïdaux à la pulsation ω avec $\delta = \sqrt{2/\mu\sigma\omega}$.

2 - Dans l'hypothèse d'une plaque mince ($h \ll d$), on peut négliger la dépendance suivant y, montrer que

$$\underline{\mathrm{B}}(z) = \mathrm{B}_s \frac{e^{(1-i)z/\delta} + e^{-(1-i)z/\delta}}{e^{(1-i)h/2\delta} + e^{-(1-i)h/2\delta}}$$

où B_s est l'amplitude du champ magnétique à la surface du métal.

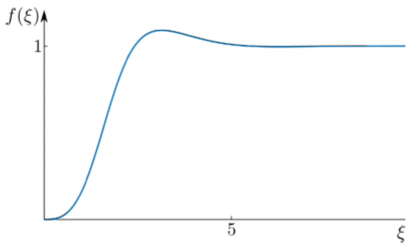
3 - Exprimer le vecteur densité de courant $\vec{\underline{j}}$.

4 - Calculer la puissance moyenne dissipée par effet joule, par unité de surface dans le métal, sur une épaisseur h. Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme : $\mathrm{P_J} = \mathrm{P}_0 f(\xi)$ où $\xi = h/2\delta$ et :

$$f(\xi) = \frac{\sinh\xi - \sin\xi}{\cosh\xi + \cos\xi}$$

On utilisera le fait que $< \mathcal{P}_{vol} >= \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{\underline{j}} \cdot \vec{\underline{\mathrm{E}}}^*)$.

5 - On donne l'allure de la fonction f sur la courbe ci-contre. En s'aidant de la figure, déterminer quelle est la meilleure fréquence de travail pour maximiser la puissance dissipée par effet Joule dans la plaque. Cette valeur vous paraît-elle raisonnable pour une plaque d'1 mm d'épaisseur faite d'acier (de perméabilité relative $\mu_r = 100$ et de conductivité électrique $\sigma = 10^7$ S.m^{-1} ?



Exercice 9

1 - Avec la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \sigma\vec{\mathrm{E}}$ où σ est la conductivité, l'équation de Maxwell Ampère dans un métal, dans l'ARQS devient : $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{B}} = \mu\vec{j}$. En appliquant le double rotationnel, on en déduit l'équation vérifiée par le champ magnétique :

$$\mu\sigma\frac{\partial\vec{\mathrm{B}}}{\partial t} = \Delta\vec{\mathrm{B}}$$

Le problème est invariant par translation selon x, en utilisant la notation complexe proposée, comme le champ est porté par $\vec{e}_x$ et dépend de y et z :

$$\frac{2i}{\delta^2}\underline{\mathrm{B}}_x = \frac{\partial^2\underline{\mathrm{B}}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\underline{\mathrm{B}}_x}{\partial z^2}$$

4 - L'équation devient alors :

$$\frac{2i}{\delta^2}\underline{\mathrm{B}}_x = \frac{\partial^2\underline{\mathrm{B}}_x}{\partial z^2}$$

Recherchons une solution complexe de la forme $\mathrm{B}_x(z) = \mathrm{B}_s e^{ikz}$, on obtient

$$k^2 = -2i/\delta^2 \quad \text{soit} \quad k = \pm e^{-i\pi/4}\sqrt{2}/\delta = \pm\frac{1-i}{\delta}$$

La solution générale en notation complexe devient :

$$\mathrm{B}_x(z) = \alpha e^{(1-i)z/\delta} + \beta e^{-(1-i)z/\delta}$$

La condition limite $\mathrm{B}_x(z = \pm h/2) = \mathrm{B}_s$ se traduit par :

$$\alpha e^{(1-i)h/2\delta} + \beta e^{-(1-i)h/2\delta} = \mathrm{B}_s$$
$$\alpha e^{-(1-i)h/2\delta} + \beta e^{(1-i)h/2\delta} = \mathrm{B}_s$$

En isolant α et β, on obtient :

$$\alpha = \beta = \mathrm{B}_s\frac{e^{(1-i)h/2\delta} - e^{-(1-i)h/2\delta}}{e^{(1-i)h/\delta} - e^{-(1-i)h/\delta}} = \mathrm{B}_s\frac{1}{e^{(1-i)h/2\delta} + e^{-(1-i)h/2\delta}}$$

3 - Par l'équation de Maxwell Ampère, il vient par dérivation :

$$\vec{\underline{j}} = \frac{\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{B}}}{\mu} = \frac{e^{i\omega t}}{\mu}\frac{\partial\mathrm{B}_x}{\partial z}\,\vec{e}_y$$

On obtient après calcul :

$$\vec{\underline{j}} = \frac{\mathrm{B}_s e^{i\omega t}}{\mu}\frac{1}{e^{(1-i)h/2\delta} + e^{-(1-i)h/2\delta}}\left(\frac{1-i}{\delta}e^{(1-i)z/\delta} - \frac{1-i}{\delta}e^{-(1-i)z/\delta}\right)\vec{e}_y$$

4 - En utilisant la notation complexe, on obtient :

$$< \mathcal{P}_{vol} >= \frac{|\underline{\vec{j}}|^2}{2\sigma}$$

On se retrousse les manches, on peut utiliser $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\mathrm{R}e(z_1\overline{z_2})$

$$\begin{aligned} |(1-i)e^{(1-i)z/\delta} - (1-i)e^{-(1-i)z/\delta}| &= 2e^{2z/\delta} + 2e^{-2z/\delta} - 2\mathrm{R}e\left[2e^{-2iz/\delta}\right] \\ &= 4\cosh(2z/\delta) - 4\cos(2z/\delta) \end{aligned}$$

De même pour le dénominateur

$$|e^{(1-i)h/2\delta} + e^{-(1-i)h/2\delta}| = 4\cosh(h/\delta) + 4\cos(h/\delta)$$

Et la simplification de la puissance volumique conduit à

$$< \mathcal{P}_{vol} >= \frac{\mathrm{B}_s^2}{2\mu^2\sigma\delta^2} \frac{\cosh 2z/\delta - \cos 2z/\delta}{\cosh h/\delta + \cos h/\delta}$$

L'intégration de la puissance volumique sur l'épaisseur de la plaque donne alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{surf} &= \int_{z=-h/2}^{h/2} < \mathcal{P}_{vol} > \mathrm{d}z = \frac{\mathrm{B}_s^2}{4\mu^2\sigma\delta} \left[\frac{\sinh 2z/\delta - \sin 2z/\delta}{\cosh h/\delta + \cos h/\delta}\right]_{z=-h/2}^{h/2} \\ &= \frac{\mathrm{B}_s^2}{2\mu^2\sigma\delta} \frac{\sinh h/\delta - \sin h/\delta}{\cosh h/\delta + \cos h/\delta} \end{aligned}$$

où on a utilisé $\sinh h/\delta - \sinh(-h/\delta) = 2\sinh h/\delta$ et $\sin h/\delta - \sin(-h/\delta) = 2\sin h/\delta$

On obtient après calcul $\mathcal{P}_{surf} = \mathrm{P}_0 f(\xi)$ avec $\mathrm{P}_0 = \frac{\mathrm{B}_s^2}{2\mu^2\sigma\delta}$

5 - Sur la courbe, lorsque $\xi \sim 3$, on observe une puissance maximale soit pour $\delta = 1/\sqrt{2\mu_0\mu_r\omega} = h/3$. on peut donc calculer la fréquence avec $\mu_0 = 4\pi{\cdot}10^{-7}$SI :

$$f = \frac{9}{\pi h^2 \mu_0 \mu_r \sigma} = 2\,\mathrm{kHz}$$

Cette valeur est de bonne ordre de grandeur pour les forges à induction (40 kHz). Le choix de la fréquence nécessite obéit à un optimum :

- si la fréquence est trop faible, le métal chauffe mal puisque la puissance dépend de ω ;
- si la fréquence est trop importante, le métal ne chauffe qu'en surface car l'épaisseur de peau est trop faible.