TD 20 Réflexion

Exercice 1 *D'après CCP 07,14*

On se place dans l'espace rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Une onde plane progressive monochromatique à polarisation rectiligne de pulsation ω et de vecteur d'onde $\vec{k}$ se propage dans le vide dans la direction (Ox), dans le sens des x croissants :

$$\vec{E}_i(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\, \vec{e}_y$$

En $x = 0$, elle arrive sur la surface plane d'un miroir métallique parfaitement conducteur (on admet que dans un tel conducteur, les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont nuls) et donne naissance à une onde réfléchie se propageant dans la direction (Ox) dans le sens des x décroissants :

$$\vec{E}_r(x,t) = \vec{E}_{0r} \cos(\omega t + kx)$$

1 - Écrire les conditions aux limites que doivent vérifier les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sur le plan d'équation $x = 0$ qui limite l'espace entre le vide et le miroir métallique en précisant bien la signification de tous les termes intervenant dans les équations.

2 - Montrer que le champ électrique réfléchi est lui aussi polarisé suivant l'axe Oy et établir l'expression du vecteur $\vec{E}_{0r}$ en fonction de $\vec{E}_0$ et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

3 - Déterminer les expressions en fonction du temps du champ magnétique incident $\vec{B}_i$ et du champ magnétique réfléchi $\vec{B}_r$

4 - En déduire les densités surfaciques de charges et de courant sur le métal.

5 - Déterminer le champ électrique $\vec{E}$ et le champ magnétique $\vec{B}$ du champ électromagnétique résultant de l'onde incidente et de l'onde réfléchie dans le demi-espace $x < 0$. Caractériser l'onde résultante.

6 - Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ de l'onde résultante ainsi que sa valeur moyenne $< \vec{\Pi} >$ au cours d'une période $T = 2\pi/\omega$. Commenter.

Un deuxième plaque métallique est positionnée en $x = -L$.

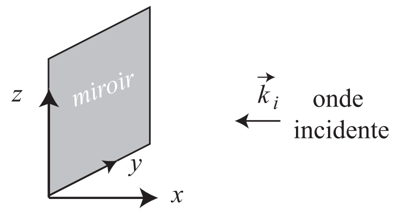
7 - Quelle est la condition sur le champ électriques au niveau de cette plaque métallique ? En déduire que la pulsation ω_n est quantifiée à l'intérieur de la cavité. On l'exprimera sous la forme $\omega_n = n \times \omega_0$.

Données :

$\cos a + \cos b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$, $\cos a - \cos b = 2\sin\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{b-a}{2}$

Exercice 2 *D'après CCP 13*

Une onde plane progressive monochromatique se propage dans le vide dans la direction (Ox) et dans le sens des x décroissants.



On note E_0 l'amplitude du champ électrique incident $\vec{E}_i$ polarisé selon $\vec{z}$.

En $x = 0$, elle arrive sur la surface plane d'un miroir métallique parfaitement conducteur.

1 - Écrire l'onde électrique et magnétique $\vec{E}_i$ et $\vec{B}_i$.

2 - En appliquant les relations de continuité (également appelée relation de passage) justifier l'existence d'un champ réfléchi noté $\vec{E}_r$ et $\vec{B}_r$.

3 - Justifier que la pulsation du champ réfléchi est identique à celle du champ incident.

4 - Déterminer les expressions des champs $\vec{E}_r$ et $\vec{B}_r$.

5 - Déterminer le champ total résultant $\vec{E}_{tot}$ et $\vec{B}_{tot}$ et caractériser l'onde résultante.

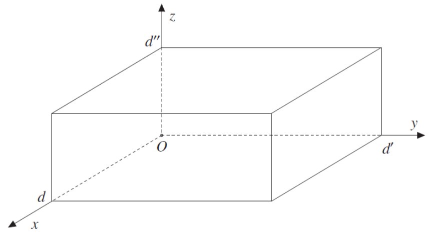
6 - Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ de l'onde résultante ainsi que sa valeur moyenne $< \vec{\Pi} >$ au cours d'une période $T = 2\pi/\omega$. Commenter.

Données :

$\cos a + \cos b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$, $\cos a - \cos b = 2\sin\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{b-a}{2}$

Exercice 3 *D'après CCP 17*

Depuis son invention, le four à micro-ondes a immédiatement envahi les cuisines des particuliers. On s'intéresse ici à un modèle simplifié de son fonctionnement et de la protection de sa paroi.



La fréquence des ondes utilisées dans un four à micro-ondes est généralement égale à 2,50 GHz.

1 - Justifier, à l'aide d'un calcul, pourquoi les ondes utilisées dans le four à micro-ondes sont qualifiées d'ondes centimétriques.

2 - Les fours à micro-ondes peuvent parfois perturber les liaisons Wi-Fi. Nommer le phénomène responsable de cette perturbation et déduire la fréquence des ondes Wi-Fi en justifiant la réponse.

Dans un modèle approché simplifié, on considérera le four à micro-ondes comme un parallélépipède rectangle d'arêtes parallèles aux axes Ox, Oy et Oz, Oz étant la verticale ascendante et de faces d'équations : $x = 0$ et $x = d$; $y = 0$ et $y = d'$; $z = 0$et $z = d''$

On mène une étude simplifiée de l'onde présente dans le four à micro-ondes. On admet que l'onde résultante à l'intérieur du four s'écrit sous la forme

$$\vec{\mathrm{E}}(x, y, z, t) = \mathrm{E}_0(x)\cos(\omega t - kz)\,\vec{e}_y$$

où $\mathrm{E}_0(x)$ n'est pas une constante mais dépend effectivement de x, ω est la pulsation de l'onde et k la norme du vecteur d'onde associé.

On suppose que le four est vide, c'est-à-dire sans aliment et donc rempli d'air, de caractéristiques assimilables avec une excellente approximation à celles du vide.

3 - Écrire les quatre équations de Maxwell dans le vide, sans charge ni courant.

4 - Montrer que l'équation de propagation relative au champ $\vec{\mathrm{E}}$ est :

$$\Delta\vec{\mathrm{E}} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{\mathrm{E}}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

5 - À partir de l'équation précédente, déterminer l'équation différentielle que doit nécessairement vérifier $\mathrm{E}_0(x)$.

6 - À quelle condition sur ω, $u'k$ et c, la solution de cette équation est-elle oscillante ? On admet pour la suite que cette condition est satisfaite.

On rappelle la relation de passage du champ électrique $\vec{\mathrm{E}}$ à l'interface entre deux milieux différents indicés 1 et 2

$$\vec{\mathrm{E}}_2 - \vec{\mathrm{E}}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{12}$$

avec σ la densité surfacique de charge au niveau de l'interface entre les deux milieux et $\vec{n}_{12}$ le vecteur unitaire directeur normal à la surface allant du milieu 1 au milieu 2.

On suppose que les parois du four à micro-ondes sont des parois épaisses constituées de conducteur parfait. On peut montrer que le champ électrique à l'intérieur d'un conducteur parfait est nul.

7.a - En déduire que le champ électrique total est nul au niveau des parois $x = 0$ et $x = d$.

7.b - Écrire les conditions aux limites que cela impose pour $\mathrm{E}_0(x)$.

8 - Montrer que cela entraîne

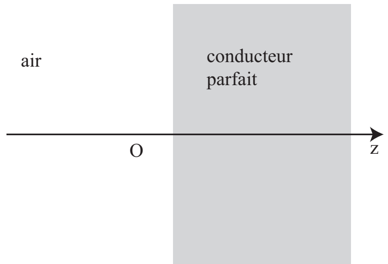
$$\mathrm{E}_0(x) = \mathrm{A}\sin\left(\frac{n\pi x}{d}\right)$$

avec A une constante qu'on ne déterminera pas et n un entier.

En déduire la relation de dispersion entre n, d, k et ω.

Exercice 4 *D'après E3A 18*

Un radar émet une onde électromagnétique monochromatique de fréquence $f = 1{,}00$ GHz qui se propage dans l 'air que l'on assimilera au vide. On donne : $c = 3,00.10^8$ m.s^{-1}



1 - Quelle est la longueur d'onde associée à l'onde électromagnétique émise ? De quel domaine du spectre électromagnétique s'agit-il ?

On choisit de décrire cette onde électromagnétique comme une onde plane polarisée rectilignement se propageant dans le sens positif de l'axe (Oz) et dont le champ électrique en notation complexe est noté : $\underline{\vec{E}} = E_{0,i} e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_x$

2 - Rappeler les équations de Maxwell dans le vide.

3 - Établir l'équation de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide.

4 - En déduire la relation de dispersion : $\omega^2 = k^2 c^2$.

5 - Établir l'expression complexe du champ magnétique associé à cette onde électromagnétique.

6 - En déduire la valeur moyenne du vecteur de Poynting en fonction de l'amplitude $E_{0,i}$ du champ électrique. Que représente-t-elle ?

Cette onde rencontre maintenant en $z = 0$ et sous incidence normale un plan conducteur parfait occupant tout le demi-espace $z > 0$. Les relations de passage à l'interface entre deux milieux de natures différentes imposent :

- la continuité de la composante tangentielle du champ électrique.
- la continuité de la composante normale du champ magnétique.

7 - Rappeler l'hypothèse du modèle du conducteur parfait. Montrer que cette hypothèse implique que le champ électrique dans le demi-espace $z > 0$ est nul.

8 - En déduire l'existence d'une onde réfléchie ayant la même fréquence que l'onde incidente.

9 - Déterminer l'expression du champ électrique réfléchi dans le demi-espace $z < 0$.

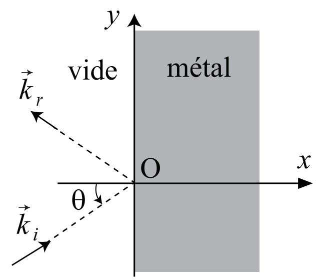
10 - Déterminer les expressions des champs $\vec{B}_i$ et $\vec{B}_r$ évoluant dans l'espace $z < 0$.

11 - Déterminer le champ total résultant des ondes incidentes et réfléchies, noté $\vec{E}_{\text{tot}}(z,t)$ et $\vec{B}_{\text{tot}}(z,t)$ et caractériser l'onde résultante.

12 - Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ de l'onde résultante ainsi que sa valeur moyenne $< \vec{\Pi} >$ au cours d'une période $T = 2\pi/\omega$. Commenter.

Exercice 5

D'après Mines-Ponts 09, Oral Centrale 09



On étudie la réflexion d'une onde électromagnétique monochromatique en incidence oblique sur un miroir métallique parfaitement conducteur. L'espace est rapporté au repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Le demi-espace $x < 0$ est le vide et le demi espace $x > 0$ est rempli par un métal de conductivité électrique infinie. L'onde incidente est une onde plane progressive monochromatique de pulsation ω, de longueur d'onde λ, polarisée rectilignement dans la direction $\vec{e}_z$ et se propageant dans la direction donnée par le vecteur d'onde $\vec{k}_i = k(cos\theta\, \vec{e}_x + sin\theta\, \vec{e}_y)$ où $k = 2\pi/\lambda$.

1 - Donner l'expression des champs électriques et magnétiques incidents notés $\vec{E}_i$ et $\vec{B}_i$.

On note pour l'onde plane réfléchie, ω_r sa pulsation, k_r son vecteur d'onde, $\vec{E}_r$ et $\vec{B}_r$ les champs de l'onde réfléchie.

2 - Donner l'expression de $\vec{E}_r$ et $\vec{B}_r$

3 - Déterminer les expressions réelles du champ électrique $\vec{E}_{\text{tot}}$ et $\vec{B}_{\text{tot}}$ résultant de la superposition des ondes incidente et réfléchie dans le demi-espace $x < 0$.

4 - Donner l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ ainsi que sa valeur moyenne.