

TD 19 Propagation EM

Les classiques

Exercice 1

D'après Centrale 06

On étudie le champ électromagnétique d'un faisceau laser de puissance moyenne $\mathcal{P} = 1 \text{ mW}$, section $s = 4 \text{ mm}^2$. On le modélise par une onde plane progressive monochromatique se propageant suivant l'axe Oz . On note le champ électrique $\vec{E}(z,t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x$ et $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ la base orthonormée cartésienne. On donne $c = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$ et $\mu_0 = 4\pi.10^{-7} \text{ SI}$.

- 1 - Indiquer le sens des termes : onde plane, onde progressive, onde monochromatique. Décrire l'état de polarisation de l'onde laser modélisée.
- 2 - Préciser le sens de propagation de l'onde. Démontrer que $\vec{B} = \vec{e}_z \wedge \vec{E}/c$ à partir de l'équation de Maxwell-Faraday. Calculer le champ magnétique $\vec{B}(z,t)$ de l'onde laser.
- 3 - Calculer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}(z,t)$ de l'onde laser.
- 4 - Donner l'expression littérale, en fonction de $\mathcal{P}$ et s , de l'amplitude E_0 du champ électrique. Calculer numériquement E_0 .

Exercice 2

On considère un milieu linéaire, homogène et isotrope de permittivité absolue $\varepsilon = \varepsilon_r \times \varepsilon_0$ et de perméabilité μ_0 , dans lequel il n'y a ni charge libre ni densité de courant. On considère une onde plane monochromatique de pulsation ω , du point de vue des équations de l'électromagnétisme dans ce milieu, les propriétés seront les mêmes que dans le vide en remplaçant ε_0 par ε .

- 1 - Écrire les équations de Maxwell dans ce milieu.
- 2.a - Montrer simplement que le champ électrique $\vec{E}$ est solution d'une équation vectorielle aux dérivées partielles appelée équation de propagation.
- 2.b - Identifier dans l'équation de propagation, la célérité de l'onde v_ϕ en fonction de c et ε_r .

On suppose que $\vec{E}$ est porté par l'axe Oy , que l'onde est progressive dans la direction $+Ox$ et on appelle E_0 son amplitude.

3 - Donner l'expression de $\vec{E}$ en fonction de E_0, t, x, ω , et k la norme du vecteur d'onde

4 - Démontrer la relation de dispersion : $k^2 = \frac{\varepsilon_r \omega^2}{c^2}$

5 - Démontrer que $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont transversaux et exprimer $\vec{B}$ en fonction de E_0, t, x, ω, c et ε_r .

On appelle $W(x,t)$ la densité volumique d'énergie électromagnétique associée à l'onde.

6 - Donner l'expression de $W(x,t)$ en fonction de E_0, t, x, ω, c et ε_r .

7 - Montrer que W est solution d'une équation de propagation. Exprimer la vitesse de propagation de l'énergie, appelée vitesse v_e en fonction de ω et k puis en fonction de c et ε_r .

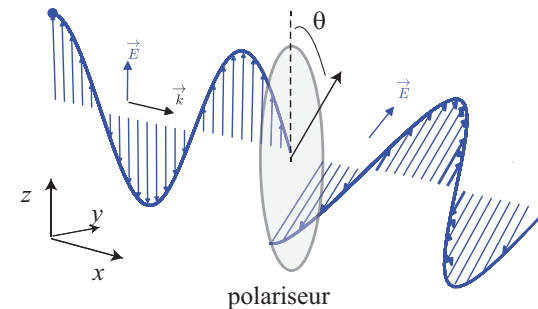
8 - Déterminer l'énergie moyenne traversant une surface plane S normale à Ox pendant un temps Δt en fonction de $S, E_0, \varepsilon_r, c, \Delta t$ et μ_0 .

Exercice 3

Considérons une OPDM polarisée rectilignement selon Oz , d'amplitude E_0 et se propageant selon Ox .

1 - Proposer une expression du champ électrique $\vec{E}_1$ et du champ magnétique associé.

Cette onde travers un polariseur faisant un angle θ avec l'axe Oz . Le champ en sortie du polariseur est polarisé selon l'axe de celui-ci et l'amplitude est obtenue en projetant le champ électrique sur l'axe du polariseur.



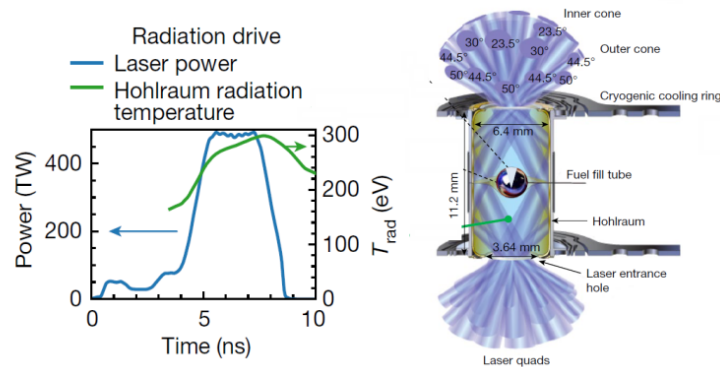
- 2 - Déterminer l'expression du nouveau champ électrique $\vec{E}_2$.
- 3 - En déduire l'expression du champ magnétique.
- 4 - Exprimer la valeur moyenne du vecteur de Poynting avant le polariseur $\langle \vec{R}_1 \rangle$ en fonction de E_0 , c et ε_0
- 5 - Soit $\langle \vec{R}_2 \rangle$ la valeur moyenne du vecteur de Poynting après le polariseur, montrer que

$$\frac{\|\langle \vec{R}_2 \rangle\|}{\|\langle \vec{R}_1 \rangle\|} = \cos^2 \theta$$

Problème ouvert

Exercice 4

En 2021, des chercheurs du US National Ignition Facility concentrent 192 lasers dans un volume cylindrique afin d'obtenir de la fusion inertielle, nouvelle source d'énergie prometteuse. L'allure temporelle du pulse laser est donnée sur l'encadrement de la figure ci-dessous.



Fonctionnement du réacteur à fusion inertielle, d'après *Burning plasma achieved in inertial fusion* Nature 2021.

- 1 - Justifier l'appellation laser Mega Joule pour ce type de dispositif.
- 2 - Estimer la norme du champ électrique au niveau de l'ouverture du foyer de diamètre $d = 3,6$ mm. Justifier alors que la matière se retrouve sous forme de plasma avec cette impulsion laser.

Les difficiles

Exercice 5

Une gouttelette d'huile (point brillant) portée par le courant d'air scintille en passant dans les franges. En mesurant la cadence du scintillement on peut calculer la vitesse de la particule, donc du courant d'air qui la porte. Cette technique de vélocimétrie laser est employée intensivement en soufflerie, pour des vitesses de 0 à 1500 m/s. Elle fournit des mesures de vitesses locales et instantanées, en n'utilisant que de la lumière et un aérosol. Elle n'est donc pas intrusive et permet de fouiller en détail des écoulements aérodynamiques complexes. Elle est facilement utilisable pour mesurer des vitesses entre des pales en mouvement ou à proximité d'objets mobiles.

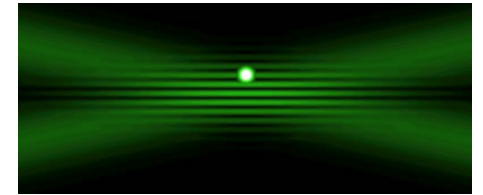


FIGURE 1 – Franges d'interférences pour vélocimétrie laser. ©ONERA 1996-2006

On considère une onde plane progressive de pulsation ω et de vecteur d'onde $\vec{k}_1$ tel que :

$$\vec{k}_1 = k [\cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_y]$$

Le champ électrique est polarisé selon $\vec{e}_z$ et se propage dans le vide.

1 - Proposer une écriture en notation complexe pour le champ électrique $\vec{E}_1$ et le champ magnétique $\vec{B}_1$ de cette onde. Les représenter sur un schéma.

On considère une autre onde de mêmes amplitude, pulsation, polarisation, mais de vecteur d'onde $\vec{k}_2$, symétrique de $\vec{k}_1$ par rapport à Ox .

2 - Préciser $\vec{k}_2$, $\vec{E}_2$, $\vec{B}_2$ pour cette onde. Les ajouter sur le schéma précédent.

3 - On superpose les deux ondes précédentes. Déterminer les champs électriques et magnétiques résultants. S'agit-il d'une onde progressive ? stationnaire ?

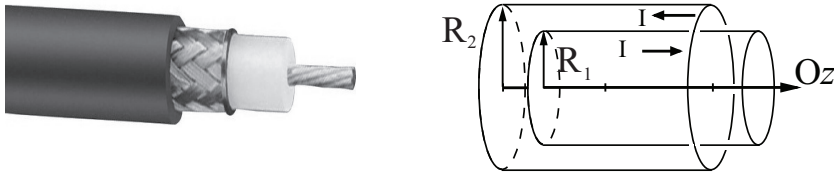
4 - Montrer l'existence de plans équiphases que l'on précisera. Déterminer la direction et la vitesse de propagation de la phase.

- 5 - Déterminer en un point quelconque la valeur moyenne de la densité d'énergie électrique.
- 6 - Dans quels plans l'énergie électrique est elle minimale ? Dans quels plans est elle maximale ?
- 7 - Déterminer la valeur moyenne du vecteur de Poynting associé à cette onde. Commenter sa direction.

Exercice 6

D'après centrale 08, Oral ENSEA 18

Un câble coaxial utilisé pour transporter des signaux électrique est composé de deux conducteurs cylindriques de rayons R_1 et $R_2 > R_1$. L'espace entre les deux conducteurs est un matériau diélectrique assimilé au vide dans cet exemple.



On suppose qu'entre les armatures existe un champ électrique $\vec{E}$ sous la forme $\vec{E}(r,z,t) = E_0(r) \cos(\omega t - kz) \vec{e}_r$.

- 1 - Dans quelle direction l'onde se propage-t-elle ?
- 2 - Proposer une forme pour $E_0(r)$, on notera $E_0(R_1) = E_1$.
- 3 - En déduire le champ magnétique $\vec{B}(r,z,t)$.
- 4 - L'onde électromagnétique existant entre les conducteurs est elle une onde plane ? Quelle propriété vérifie $\vec{k}$, $\vec{E}$ et $\vec{B}$.
- 5 - Exprimer la puissance transportée entre les cylindres en fonction de R_1 , R_2 , E_1 , μ_0 et c

Données :

- $\text{rot } \vec{U} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \theta} - \frac{\partial U_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial U_r}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r U_\theta}{\partial r} - \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$
- $\text{div } \vec{U} = \frac{1}{r} \frac{\partial r U_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial U_z}{\partial z}$

Exercice 7

D'après Centrale 07

On considère deux ondes électromagnétiques planes progressives, monochromatiques, de même pulsation ω , se propageant dans le vide dans la même direction et le même sens (celui de l'axe Oz). On notera c la célérité de la lumière dans le vide. $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est une base orthonormée associée au trièdre (Ox, Oy, Oz) . Les deux ondes sont polarisées rectilignement selon le même axe Ox . On a alors deux polarisations parallèles. On note E_1 et E_2 les amplitudes, supposées positives, des champs électriques des deux ondes. L'onde (2) présente un retard de phase ϕ par rapport à l'onde (1).

- 1 - Exprimer les champs électriques $\vec{E}_1, \vec{E}_2$ et les champs magnétiques $\vec{B}_1, \vec{B}_2$, caractérisant les deux ondes en notation complexe. Calculer pour chacune des deux ondes les moyennes temporelles des vecteurs de Poynting $\langle \vec{\Pi}_1 \rangle$ et $\langle \vec{\Pi}_2 \rangle$. Pour simplifier les calculs, on utilisera le fait que

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0}$$

où $\underline{X}^*$ correspond au conjugué de $\underline{X}$.

- 2 - Exprimer pour l'onde résultante la moyenne temporelle du vecteur de Poynting $\langle \vec{\Pi} \rangle$.
 - 3 - On introduit les intensités : $I_1 = \langle \vec{\Pi}_1 \rangle \cdot \vec{e}_z$, $I_2 = \langle \vec{\Pi}_2 \rangle \cdot \vec{e}_z$ et $I = \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \vec{e}_z$. Relier I à I_1 , I_2 et ϕ . Quelle formule obtient-on ?
- Les deux ondes sont désormais polarisées rectilignement, l'onde (1) selon Ox et l'onde (2) selon Oy . On a alors deux polarisations orthogonales. L'onde (2) présente toujours le déphasage par rapport à l'onde (1).
- 4 - Reprendre les calculs précédents afin d'écrire I en fonction des mêmes quantités.
 - 5 - Conclure sur les conditions nécessaires à des interférences d'ondes planes progressives monochromatiques polarisées rectilignement se propageant sur le même axe.

Corrigés

Exercice 1

1 - Une onde plane est une onde dont la valeur de la vibration est uniforme sur tous les plans perpendiculaires à la direction de propagation.

Une onde progressive est une onde qui se propage suivant une direction (ici l'axe Oz) et donc peut se mettre sous la forme : $E(z,t) = f(z - ct)$.

Une onde monochromatique est une onde ne possédant qu'une longueur d'onde dans son spectre. Dans le cas étudié, l'onde est polarisée rectilignement suivant $\vec{e}_x$.

2 - Le champ électrique s'écrivant $E_0 \cos(\omega t - kz)$, l'onde se propage selon les z croissants. Utilisons l'équation de Maxwell-Faraday et la notation complexe pour obtenir le champ $\vec{B}$:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{soit} \quad -i\vec{k} \wedge \vec{E} = -i\omega \vec{B}$$

avec $\vec{k} = k\vec{e}_z$. On obtient alors : $\vec{B} = \frac{kE_0}{\omega} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y$

3 - Par définition : $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}_0 \wedge \vec{B}}{\mu_0}$. Dans le cas d'une propagation dans le vide, $k = \omega/c$, de plus $\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1$, on en déduit que

$$\vec{\Pi} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz) \vec{e}_z$$

4 - Le vecteur de Poynting est le vecteur indiquant la puissance rayonnée par unité de surface, on en déduit que

$$| \langle \vec{\Pi} \rangle | = \frac{\mathcal{P}}{s} \quad \text{soit} \quad \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} = \frac{\mathcal{P}}{s}$$

On obtient alors : $E_0 = \sqrt{\frac{2\mu_0 c \mathcal{P}}{s}} = 217 \text{ V.m}^{-1}$.

Exercice 2

1 - Les équations de Maxwell s'écrivent dans le milieu :

$$(MG) \text{ div } \vec{E} = 0 \quad (MT) \text{ div } \vec{B} = 0$$

$$(MF) \text{ rot } \vec{E} = -i\omega \vec{B} \quad (MA) \text{ rot } \vec{B} = i\omega \mu_0 \varepsilon \vec{E}$$

2.a - En appliquant la formule du double rotationnel, on obtient :

$$\text{rot rot } \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E}$$

En utilisant les équations de Maxwell¹, on en déduit que :

$$\text{rot} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \text{grad } 0 - \Delta \vec{E} \quad \text{soit} \quad -\frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) = -\Delta \vec{E}$$

d'où
$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

dont la célérité vérifie : $\mu_0 \varepsilon v_\phi^2 = 1$ soit $v_\phi = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$.

3 - L'onde se propage selon +Ox, on en déduit que $\vec{k} = +k\vec{e}_x$

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

4 - En injectant la formulation de $\vec{E}$ dans l'équation de propagation, on en déduit que :

$$\Delta \vec{E} = -k^2 \vec{E}, \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E} \quad \text{soit} \quad k^2 = \frac{\varepsilon_r \omega^2}{c^2}$$

5 - D'après l'équation de Maxwell-Gauss et Maxwell-flux en notation complexe, on en déduit que : $-i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$ et $-i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$.

On en déduit que $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux au vecteur $\vec{k}$. Il s'agit d'une onde transversale.

Pour une OPPM se propageant selon +Ox, l'utilisation de la notation complexe sur l'équation de Maxwell-Faraday permet d'écrire :

$$i\omega \vec{B} = -ik \vec{e}_x \wedge \vec{E}$$

En utilisant la relation de dispersion, on en conclut que :

$$\vec{B} = \sqrt{\varepsilon_r} \frac{\vec{e}_x \wedge \vec{E}}{c} = \sqrt{\varepsilon_r} \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z$$

6 - Par définition, on a :

$$W(x,t) = W_{el} + W_{mag} = \frac{1}{2} \varepsilon E(x,t)^2 + \frac{1}{2\mu_0} B(x,t)^2$$

1. On suppose le milieu non dispersif, c'est-à-dire que ε_r est une constante. En réalité, le seul milieu véritablement non dispersif est le vide comme cela sera discuté au chap. ??

En remplaçant les champs, on obtient : $W(x,t) = \varepsilon_0 \varepsilon_r E_0^2 \cos^2(\omega t - kx)$.
En remplaçant le vecteur d'onde, on obtient :

$$W(x,t) = \varepsilon_0 \varepsilon_r E_0^2 \cos^2(\omega t - \frac{\sqrt{\varepsilon_r} \omega}{c} x)$$

7 - On peut remarquer que $W(x,t) = W(x - v_\phi t)$ donc que W est solution de l'équation de d'Alembert définie plus haut. Par identification, la vitesse de propagation de l'énergie est la même que la vitesse de phase ce qui est normal car le milieu est non-dispersif.

$$v_g = v_\phi = c/\sqrt{\varepsilon_r}$$

8 - Par définition du vecteur de Poynting :

$$\vec{R}(x,t) = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \sqrt{\varepsilon_r} \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kx) \vec{e}_x$$

On en déduit que

$$\langle \vec{R}(x,t) \rangle = \sqrt{\varepsilon_r} \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_x$$

L'énergie moyenne traversant S pendant $\Delta t = 1$ s est donnée par :

$$\mathcal{E} = \iint_S \langle \vec{R}(x,t) \rangle \cdot dS \vec{e}_x \times \Delta t = \sqrt{\varepsilon_r} \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \times S \times \Delta t$$

Exercice 3

1 - On peut proposer : $\vec{E}_1(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z$. Pour une OPPM, le champ magnétique associé vérifie :

$$\vec{B}_1(x,t) = \frac{\vec{e}_x \wedge \vec{E}_1}{c} = -\frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

2 - En projetant l'amplitude et la direction de polarisation :

$$\vec{E}_2(x,t) = E_0 \cos \theta \cos(\omega t - kx) (\cos \theta \vec{e}_z + \sin \theta \vec{e}_y)$$

3 - Pour une OPPM, le champ magnétique associé vérifie :

$$\vec{B}_2(x,t) = \frac{\vec{e}_x \wedge \vec{E}_2}{c} = \frac{E_0 \cos \theta}{c} \cos(\omega t - kx) (\sin \theta \vec{e}_z - \cos \theta \vec{e}_y)$$

4 - Par définition du vecteur de Poynting :

$$\vec{R}_1 = \frac{\vec{E}_1 \wedge \vec{B}_1}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kx) \vec{e}_x$$

On en déduit que la valeur moyenne vaut, avec $\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1$:

$$\langle \vec{R}_1 \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2 c}{2} \vec{e}_x$$

5 - Par la même méthode :

$$\langle \vec{R}_2 \rangle = \langle \frac{\vec{E}_2 \wedge \vec{B}_2}{\mu_0} \rangle = \frac{E_0^2 \cos^2 \theta}{\mu_0 c} \langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle \vec{e}_x = \frac{\varepsilon_0 E_0^2 c \cos^2 \theta}{2} \vec{e}_x$$

Ainsi,

$$\langle \vec{R}_2 \rangle = \cos^2 \theta \langle \vec{R}_1 \rangle$$

Exercice 4

1 - La durée de l'impulsion est de $\tau = 4$ ns et la puissance vaut : $\mathcal{P} = 500$ TW.
On en déduit que l'énergie mise en jeu vaut :

$$\mathcal{E} = \mathcal{P} \times \tau = 500 \cdot 10^{12} \times 4 \cdot 10^{-9} = 2 \cdot 10^6 \text{ J} = 2 \text{ MJ}$$

2 - Pour une ouverture de diamètre d , le norme de la valeur moyenne du vecteur de Poynting est donnée par :

$$\| \langle \vec{\Pi} \rangle \| = \frac{\mathcal{P}}{\pi d^2 / 4} = 5 \cdot 10^{17} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

Pour une OPPM, la norme du champ électrique est relié au vecteur de Poynting :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \langle \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_x$$

On en déduit que $E_0 = \sqrt{2\mu_0 c \mathcal{P} / s} = 2 \cdot 10^{10} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$.

Il s'agit d'un champ électrique largement supérieur à la tension disruptive de l'air. Il est donc vraisemblable que toute matière en interaction avec ce champ soit ionisé.

Exercice 5

1 - On peut proposer pour le champ électrique en notation complexe :

$$\vec{E}_1(x,y,t) = E_0 e^{i(\omega t - k \cos \alpha x - k \sin \alpha y)} \vec{e}_z$$

Comme il s'agit d'une OPPM dans le vide, le champ magnétique vérifie :

$$\vec{B}_1(x,y,t) = \frac{\vec{u}_1 \wedge \vec{E}}{c}$$

avec $\vec{u}_1 = \cos \alpha \vec{e}_x - \sin \alpha \vec{e}_y$ on en déduit que :

$$\vec{B}_1(x,y,t) = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - k \cos \alpha x - k \sin \alpha y)} (\sin \alpha \vec{e}_x - \cos \alpha \vec{e}_y)$$

2 - Le champ étant symétrique par rapport à Ox, on en déduit que :

$$\vec{k}_2 = k [\cos \alpha \vec{e}_x - \sin \alpha \vec{e}_y]$$

On peut proposer pour le champ électrique en notation complexe :

$$\vec{E}_2(x,y,t) = E_0 e^{i(\omega t - k \cos \alpha x + k \sin \alpha y)} \vec{e}_z$$

Comme il s'agit d'une OPPM dans le vide, le champ magnétique vérifie :

$$\vec{B}_2(x,y,t) = \frac{\vec{u}_2 \wedge \vec{E}}{c}$$

on en déduit que :

$$\vec{B}_2(x,y,t) = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - k \cos \alpha x + k \sin \alpha y)} (-\sin \alpha \vec{e}_x - \cos \alpha \vec{e}_y)$$

3 - La superposition des deux champs électriques conduit à :

$$\vec{E}_{tot}(x,y,t) = E_0 e^{i(\omega t - k \cos \alpha x)} (e^{-ik \sin \alpha y} + e^{ik \sin \alpha y}) \vec{e}_z$$

soit :

$$\vec{E}_{tot}(x,y,t) = 2E_0 \cos(k \sin \alpha y) e^{i(\omega t - k \cos \alpha x)} \vec{e}_z$$

La superposition des deux champs magnétiques conduit à :

$$\vec{B}_{tot}(x,y,t) = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - k \cos \alpha x)} ((e^{-ik \sin \alpha y} - e^{ik \sin \alpha y}) \sin \alpha \vec{e}_x + (-e^{-ik \sin \alpha y} - e^{ik \sin \alpha y}) \cos \alpha \vec{e}_y)$$

On en déduit que :

$$\vec{B}_{tot}(x,y,t) = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - k \cos \alpha x)} (-2i \sin(k \sin \alpha y) \sin \alpha \vec{e}_x + 2 \cos(k \sin \alpha y) \cos \alpha \vec{e}_y)$$

L'écriture des champs montre qu'il s'agit d'une onde progressive selon les x croissants et stationnaire selon y .

4 - Les plans équiphasés sont données pour $\omega t - k \cos \alpha x = C^{te}$. Il s'agit donc de plans d'équations $x = C^{te}$ se propageant selon les x croissants. La vitesse associée à ces plans est donc :

$$v = \frac{\omega}{k \cos \alpha}$$

5 - La densité d'énergie électrique se calcule en utilisant la notation réelle. Elle est donnée par :

$$w_{el} = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} = 2E_0^2 \cos^2(k \sin \alpha y) \cos^2(\omega t - k \cos \alpha x)$$

Avec $\langle \cos^2(\omega t - k \cos \alpha x) \rangle = 1/2$, on en déduit que la valeur moyenne vaut :

$$\langle w_{el} \rangle = E_0^2 \cos^2(k \sin \alpha y)$$

6 - Les plans où l'énergie est minimale sont définis par :

$$y = (n + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{k \sin \alpha}$$

Les plans où l'énergie est maximale sont définis par :

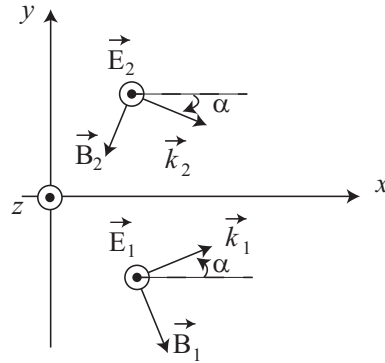
$$y = n \frac{\pi}{k \sin \alpha}$$

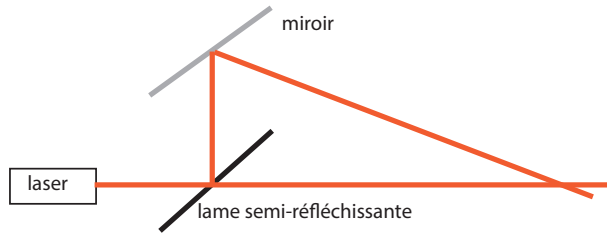
7 - En utilisant la notation réelle, on obtient :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \quad \text{soit} \quad \langle \vec{\Pi}(x,t) \rangle = \frac{4E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(k \sin \alpha y) \vec{e}_x$$

La superposition des deux ondes conduit à une onde progressive selon Ox, il est normal que la direction du vecteur de Poynting soit selon $\vec{e}_x$.

8 - Il est possible d'effectuer une telle superposition avec un laser, une lame semi-réfléchissante et un miroir.





$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_1^2}{\mu_0 c} \frac{r^2}{R_1^2} \cos^2(\omega t - kz) \vec{e}_z$$

La puissance transportée selon Oz vaut alors :

$$\mathcal{P} = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \langle \Pi \rangle r d\theta dr = \frac{\pi E_1^2}{\mu_0 c R_1^2} \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = \frac{\pi E_1^2}{4\mu_0 c} \frac{R_2^4 - R_1^4}{R_1^2}$$

Exercice 6

- 1 - L'onde décrite est propagative selon les z croissants et polarisée radialement.
- 2 - L'espace entre les deux conducteurs étant vide de charge, on peut écrire que : $\text{div } \vec{E} = 0$. Avec l'opérateur fourni, on obtient :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r E_0(r)}{\partial r} = 0 \quad \text{soit} \quad r E_0(r) = C^{\text{te}}$$

Avec la condition proposée :

$$E_0(r) = E_1 \frac{r}{R_1}$$

- 3 - D'après la loi de Maxwell-Faraday, $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. On en déduit que :

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(E_1 \frac{r}{R_1} \cos(\omega t - kz) \right) \vec{e}_\theta$$

On obtient alors :

$$\vec{B}(r, z, t) = \left(E_1 \frac{r}{R_1} \frac{k}{\omega} \cos(\omega t - kz) \right) \vec{e}_\theta$$

- 4 - Les surfaces équiphases sont des plans $z = C^{\text{te}}$. Il s'agit d'une onde plane inhomogène car l'amplitude dépend de r . Dans le vide $\omega = kc$, on peut donc écrire comme pour les OPPMs :

$$\vec{B} = \frac{\vec{e}_z \wedge \vec{E}}{c}$$

- 5 - Le vecteur de Poynting est défini par :

Exercice 7

- 1 - Les champs électriques sont alors de la forme

$$\vec{E}_1 = E_1 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{E}_2 = E_2 \cos(\omega t - kz - \phi) \vec{e}_x$$

Comme il s'agit d'ondes planes, les champs $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$ vérifient

$$\vec{B}_1 = \frac{\vec{e}_z \wedge \vec{E}_1}{c} \quad \text{et} \quad \vec{B}_2 = \frac{\vec{e}_z \wedge \vec{E}_2}{c}$$

$$\text{d'où} \quad \vec{B}_1 = \frac{E_1}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \vec{B}_2 = \frac{E_2}{c} \cos(\omega t - kz - \phi) \vec{e}_y$$

La valeur moyenne vecteur de Poynting doit se calculer en utilisant la notation réelle

$$\vec{\Pi}_1 = \frac{\vec{E}_1 \wedge \vec{B}_1}{\mu_0} = \frac{E_1^2}{2\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz) \vec{e}_z$$

En utilisant, $\langle \cos^2 \rangle = 1/2$, on en conclut que

$$\langle \vec{\Pi}_1 \rangle = \frac{E_1^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \langle \vec{\Pi}_2 \rangle = \frac{E_2^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_z$$

Il est possible d'utiliser néanmoins la notation complexe avec

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right)$$

- 2 - L'onde résultante est la superposition des champs électriques et magnétique :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \quad \text{et} \quad \vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

Le vecteur de Poynting de l'onde résultante n'est donc pas la somme des vecteurs de Poynting de chaque onde :

$$\vec{E} = (E_1 e^{i(\omega t - kz)} + E_2 e^{i(\omega t - kz - \phi)}) \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{B} = \left(\frac{E_1}{c} e^{i(\omega t - kz)} + \frac{E_2}{c} e^{i(\omega t - kz - \phi)} \right) \vec{e}_y$$

En calculant la moyenne du vecteur de Poynting on obtient alors

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \left(\frac{E_1^2}{2\mu_0 c} + \frac{E_2^2}{2\mu_0 c} + \frac{E_1 E_2}{\mu_0 c} \cos \phi \right) \vec{e}_z$$

3 - En utilisant les intensités, on obtient :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \phi$$

On obtient ainsi la formule des interférences dues à deux ondes.

4 - Si les polarisation sont orthogonales, les champs résultants sont alors :

$$\vec{E} = E_1 e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_x + E_2 e^{i(\omega t - kz - \phi)} \vec{e}_y$$

$$\vec{B} = \frac{E_1}{c} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_y - \frac{E_2}{c} e^{i(\omega t - kz - \phi)} \vec{e}_x$$

En calculant la moyenne du vecteur de Poynting on obtient alors

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \left(\frac{E_1^2}{2\mu_0 c} + \frac{E_2^2}{2\mu_0 c} \right) \vec{e}_z$$

soit

$$I = I_1 + I_2$$

Cette fois ci, le terme dû au déphasage ϕ disparaît.

5 - On peut donc conclure que pour qu'il y ait des interférences, il faut que les OPPM aient la même polarisation