

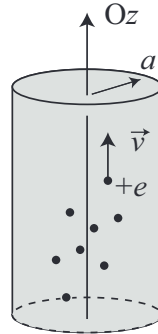
Les classiques

Exercice 1

D'après Oral CCP 18

La magnétohydrodynamique (MHD) est une discipline de la Physique qui décrit le comportement d'un fluide conducteur du courant électrique en présence de champs électromagnétiques. Il s'agit d'un couplage entre la dynamique des fluides, et l'électromagnétisme. On se propose ici de déterminer l'action sur un flux de particules chargées.

Considérons un faisceau de protons de charge $+e$, cylindrique quasi-infini, de rayon a . On suppose que la vitesse des protons est uniforme et vaut $\vec{v} = v_0 \vec{e}_z$. On note n le nombre de protons par unité de volume, on suppose que la vitesse des protons est non-relativiste.



- 1 - Rappeler les 4 équations de Maxwell et les simplifier dans le cadre d'un régime stationnaire.
- 2 - Définir la densité volumique de charge ρ à l'intérieur du faisceau ainsi que le vecteur densité volumique de courant $\vec{j}$.
- 3 - Déterminer le champ électrique $\vec{E}(M)$ pour un point M à l'intérieur du faisceau par la méthode de votre choix.
- 4 - Déterminer le champ magnétique $\vec{B}(M)$ pour un point M à l'intérieur du faisceau par la méthode de votre choix.
- 5 - Déterminer la force exercée sur un proton et montrer qu'un faisceau de protons parfaitement cylindrique n'est pas stable du point de vue mécanique.

Données :

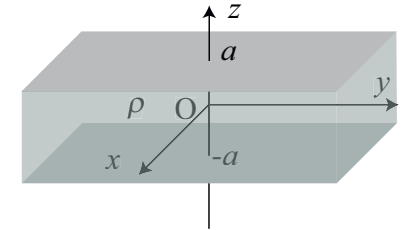
- $\text{div } \vec{U} = \frac{1}{r} \frac{\partial r U_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial U_z}{\partial z}$
- $\text{rot } \vec{U} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \theta} - \frac{\partial U_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial U_r}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r U_\theta}{\partial r} - \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$

- $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$

Exercice 2

D'après Oral CCP 07, 19

Considérons un volume défini en coordonnées cartésiennes par $-a < z < +a$ portant une densité volumique de charge ρ uniforme.



- 1 - Montrer que l'équation vérifiée par le potentiel à l'intérieur du volume ainsi définie est :

$$\frac{d^2 V}{dz^2} + \rho/\epsilon_0 = 0$$

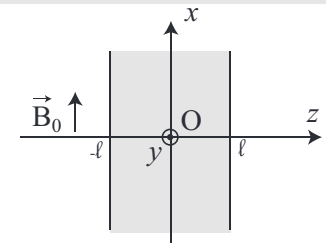
- 2 - Déterminer $V(z \geq 0)$ et tracer le potentiel électrostatique $V(z)$ en tout point de l'espace. On supposera que $V(z = 0) = 0$.
- 3 - Déterminer le champ électrique. Par des considérations de symétrie, justifier la valeur du champ en O.
- 4 - Vérifier que le champ électrique suit l'équation de Maxwell-Gauss.
- 5 - Le champ électrique vérifie-t'il également l'équation de Maxwell-Faraday ?

Exercice 3

D'après CCP 12, Oral CCP 12

La théorie des frères London est une première approche phénoménologique de la supraconductivité. Elle se base sur l'intuition et n'est justifiée que par les expériences. Elle cherche à expliquer l'expulsion du champ magnétique du matériau quelle que soit son histoire. Cet effet fut présenté, dans un premier temps, dans une publication du physicien allemand Walther Meissner mais les théories physiques de l'époque ne suffisaient pas à justifier le diamagnétisme. Intrigué par ce phénomène, Fritz London, se proposa de l'étudier, rejoint plus tard par son frère Heinz en postulant l'existence d'une densité volumique de courant électrique $\vec{j}_L$ relié au champ magnétique local $\vec{B}$ selon la relation

$$\text{rot } \vec{j}_L = -\frac{1}{\mu_0 \Lambda^2} \vec{B}$$



où Λ est une constante, appelée constante de London.

On considère une plaque infinie d'épaisseur 2ℓ délimitée par les plans $z = -\ell$ et $z = +\ell$. Cette plaque est constituée d'un matériau supraconducteur de constante de London Λ . On applique un champ magnétique extérieur $\vec{B} = B_0 \vec{e}_x$ uniforme et constant. Il apparaît donc un champ magnétique à l'intérieur de la plaque. On se propose de déterminer ce champ. Pour des raisons de symétrie et d'invariance, le champ recherché est de la forme $\vec{B}(M) = B(z) \vec{e}_x$

1 - À partir de l'équation de Maxwell-Ampère, déterminer l'unité de la constante Λ .

2 - Dans le cadre d'un régime ne dépendant pas du temps, établir l'équation différentielle vérifiée par la fonction $B(z)$.

3 - Rappeler les conditions de passage pour le champ magnétique et en déduire les valeurs de $B(z)$ en $z = -\ell$ et $z = \ell$ sachant qu'il n'y a pas de courants superficiels.

4 - Résoudre complètement l'équation différentielle. On écrira $B(z)$ sous la forme : $B(z) = D \cosh(z/\Lambda)$ où D est une constante que l'on exprimera en fonction de B_0 , Λ et ℓ .

5 - Tracer l'allure de $B(z)$ en fonction de z dans le cas où $\Lambda \ll \ell$. Proposer un commentaire.

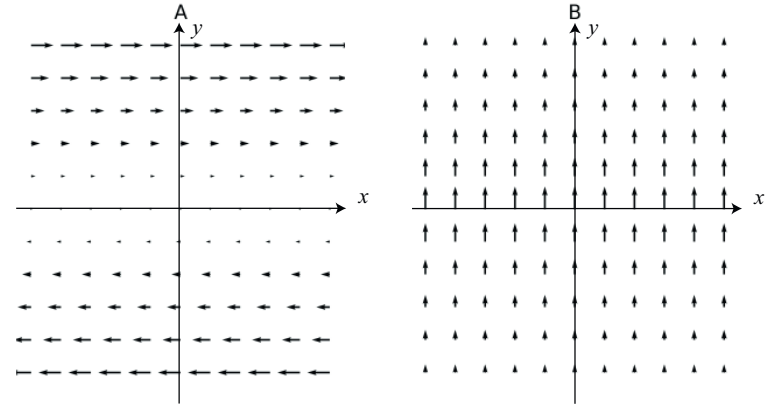
6 - Des courants volumiques sont créés dans la plaque selon la relation de London $\vec{\text{rot}} \vec{j} = -\vec{B}/\mu_0 \Lambda$ vue auparavant. On admettra que le vecteur densité volumique de courant est dirigé selon l'axe (Oy) : $\vec{j}_L = j_L(z) \vec{e}_y$. Déterminer à partir du résultat de la question précédente l'expression de la fonction $j_L(z)$. Tracer l'allure de cette fonction dans le cas où $\Lambda \ll \ell$.

7 - Pourquoi dit-on que la plaque supraconductrice plongée dans un champ magnétique extérieur $\vec{B}_0$ est le siège de courants superficiels dus à la supraconductivité qui expulse le champ imposé ?

Problème ouvert

Exercice 4

On considère les cartes d'un champ magnétique statique ci-dessous en coordonnées cartésiennes. Sont-elles compatibles avec les équations de Maxwell ? Proposer une distribution de courant lorsque cela est possible.



Exercice 5

1 - Est-il possible d'avoir une boule chargée en volume tel que le champ électrique soit de norme constante de la forme $\vec{E}(M) = E_0 \vec{e}_r$?

2 - Quelle serait alors la charge contenue par cette boule ?

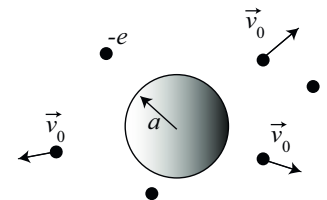
Données : en coordonnées sphériques

$$\begin{aligned} \bullet \operatorname{div} \vec{U} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 U_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sin \theta U_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U_\phi}{\partial \phi} \\ \bullet \operatorname{rot} \vec{U} &= \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sin \theta U_\phi}{\partial \theta} - \frac{\partial U_\theta}{\partial \phi} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial r U_\phi}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \\ &\quad \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r U_\theta}{\partial r} - \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\phi \end{aligned}$$

Les difficiles

Exercice 6

Une bille de cuivre fixe de rayon a suffisamment faible par rapport aux autres dimensions pour que cette bille soit confondue avec son centre O , initialement neutre, émet des électrons de manière isotrope à partir de l'instant initial $t = 0$. Le nombre d'électrons émis par unité de temps est une constante α et les élec-



trons sont émis avec une vitesse $\vec{v} = v_0 \vec{e}_r$. On néglige les forces électromagnétiques subies par les électrons.

- 1 - Déterminer la densité volumique de charge $\rho(\vec{r}, t)$.
- 2 - En déduire que la densité de courant s'écrit :

$$\vec{j}(r > v_0 t) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{j}(r < v_0 t) = \frac{-\alpha e}{4\pi r^2} \vec{e}_r$$

- 3 - Déterminer le champ électrique $\vec{E}$ supposé isotrope et vérifier qu'il dérive d'un potentiel scalaire $V(r, t)$.
- 4 - Montrer que les équations de Maxwell sont compatibles avec un champ magnétique nul.

Données :

$$\text{div } \vec{U} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 U_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sin \theta U_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U_\phi}{\partial \phi}$$

Exercice 7

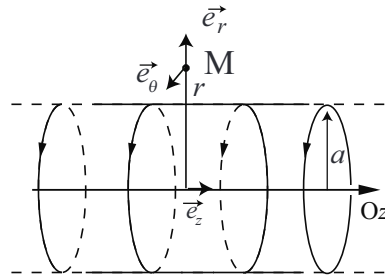
Une bobine, de longueur h , de rayon a et d'axe (Oz), est constituée par un enroulement de n spires circulaires jointives par unité de longueur. On utilisera pour l'étude qui suit l'approximation du solénoïde infini pour décrire cette bobine.

- 1 - Quel est, dans ces conditions, le champ magnétique $\vec{B}_0(t)$ engendré par la bobine lorsqu'elle est parcourue par le courant I constant ?

- 2 - La bobine est soumise à un générateur de courant de type $i(t) = I_0 \cos \omega t$, déterminer l'expression du champ électrique $\vec{E}_1(\vec{r}, t)$ à l'intérieur du solénoïde à partir de l'équation de Maxwell-Faraday. Calculer la norme du champ électrique pour $r = a$. Commenter.

- 3 - Le champ électrique obtenu dépend du temps, calculer le champ magnétique $\vec{B}_1(\vec{r}, t)$ engendré par ce champ électrique en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère. Comparer les normes de $\vec{B}_0$ et $\vec{B}_1$.

Données : $n = 1000 \text{ spires} \cdot \text{m}^{-1}$, $I_0 = 1 \text{ A}$, $\omega = 6 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $a = 10 \text{ cm}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$

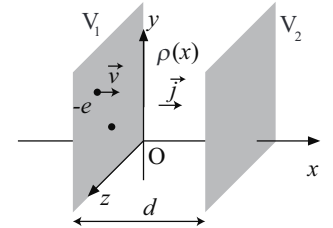


$$\text{rot } \vec{U} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \theta} - \frac{\partial U_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial U_r}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r U_\theta}{\partial r} - \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

Exercice 8

D'après Oral Centrale 12

Un accélérateur de particule est constitué de deux plaques métalliques infinies disposées en $x = 0$ et $x = d$. L'une portée au potentiel $V_1 = 0$, l'autre au potentiel V_2 . Des électrons de charge $q = -e$ et de masse m se déplacent entre ces deux plaques. Leur vitesse en $x = 0$ est nulle. La quantité d'électrons est telle que l'on définit entre les plaques une densité volumique de charges $\rho(x)$ ainsi qu'une densité volumique de courant $\vec{j}$. On se place en régime stationnaire.



- 1 - Montrer que la densité volumique de courant s'écrit $\vec{j} = J_0 \vec{e}_x$.
- 2 - Trouver 3 relations liant la vitesse des électrons $\vec{v}(x)$, la densité volumique de courant $\vec{j}$ et le potentiel V entre les plaques.
- 3 - Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $V(x)$.
- 4 - Résoudre l'équation différentielle que vérifie $V(x)$. La solution est de la forme :

$$V(x) = Ax^p$$

- 5 - Déterminer la valeur de la vitesse des électrons en $x = d$.