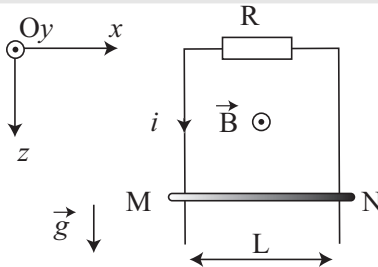


TD 17 : Induction Lorentz

Les classiques

Exercice 1

Une barre tombe sans frottement au contact de deux rails verticaux distants de L et reliés à une résistance R . Le tout est plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0 \vec{e}_y$. On notera $\vec{g} = g \vec{e}_z$ l'accélération de la pesanteur et on supposera que les contacts sur les rails sont sans frottement.



- 1 - Exprimer la force de Laplace s'exerçant sur la barre MN.
- 2 - En appliquant le principe fondamental de la dynamique, déterminer une équation reliant $\ddot{z}(t)$ et $i(t)$.
- 3 - Déterminer la f.e.m. induite par le mouvement de la barre.
- 4 - En appliquant la loi des mailles, montrer que l'équation différentielle vérifiée par $v(t) = \dot{z}$ peut se mettre sous la forme :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau}v = \frac{v_{lim}}{\tau}$$

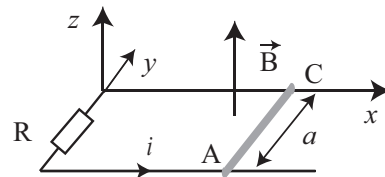
On explicitera la valeurs de τ et v_{lim} en fonction de m , g , R , L et B_0 .

- 5 - Représenter la vitesse en fonction du temps.

Exercice 2

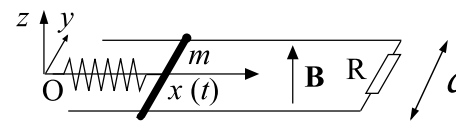
Une barre métallique AC de masse m et longueur a , est posée sur deux rails reliés à une résistance R . Cette barre se déplace à la vitesse $\vec{v} = v \vec{e}_x$.

On négligera les frottements de la barre sur les rails et le tout est plongé dans un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$



- 1 - Déterminer la f.e.m induite par le mouvement de la barre.
- 2 - En déduire l'expression du courant I circulant dans la résistance.
- 3 - Déterminer la force à appliquer sur la barre par un opérateur extérieur pour que la vitesse soit maintenue constante.
- 4 - Comparer la puissance fourni par un opérateur maintenant cette vitesse constante et la puissance dissipée par effet Joule.

Exercice 3



Une barre métallique de masse m et longueur a , posée sur deux rails reliés à une résistance R , est accrochée un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 .

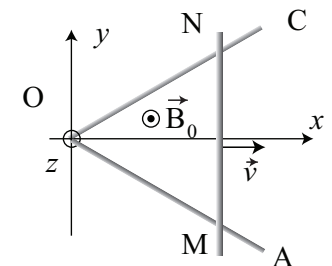
On négligera les frottements de la barre sur les rails et le tout est plongé dans un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$

- 1 - Déterminer la f.e.m induite par le mouvement de la barre.
 - 2 - En déduire l'expression du courant i circulant dans la résistance.
 - 3 - Donner l'équation différentielle du mouvement vérifiée par $x(t)$.
 - 4 - Que doit valoir la résistance R pour qu'il y ait des oscillations. Dans ce cas, résoudre $x(t)$ avec $x(0) = \ell_0 + h$ et $\dot{x}(0) = 0$.
- On posera : $2\lambda = a^2 B^2 / mR$ et $\omega_0^2 = k/m$.

Exercice 4

Deux rails OA et OC, filiformes et fixes, sont placés dans le plan horizontal (xOy) selon un angle de 60° . L'ensemble AOC formé par les 2 rails est supposé conducteur. Une barre MN, de masse m , se déplace sans frottement sur les rails d'un mouvement de translation parallèle à $\vec{e}_x$, à la vitesse constante $\vec{v} = V_0 \vec{e}_x$, imposée par l'opérateur. La position de son centre d'inertie est repérée par l'abscisse x . Les 2 rails et la barre ont la même résistivité linéique λ .

L'ensemble du dispositif est plongé dans un champ magnétique extérieur $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ avec $B_0 > 0$. On négligera l'influence du champ magnétique créé par le circuit lui-même. On considère le déplacement de la barre MN

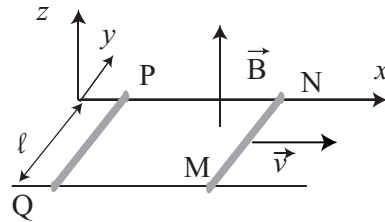


entre AB et O.

- 1 - Déterminer la résistance R du circuit en fonction de λ et y .
- 2 - Déterminer le flux de $\vec{B}_0$ à travers le circuit en fonction de B_0 et y .
- 3 - En déduire la force électromotrice induite dans le circuit en fonction de B_0 , V_0 , et y .
- 4 - En écrivant l'équation électrique du circuit fermé ainsi formé, en déduire le courant I induit dans le circuit en fonction de B_0 , V_0 , et λ .
- 5 - Déterminer la force de Laplace $\vec{F}_L$ s'exerçant sur la barre MN en fonction de V_0 , B_0 , λ , et y .
- 6 - En déduire la force F_{op} que doit exercer l'opérateur pour maintenir $\vec{v}$ constante.
- 7 - Calculer la puissance de cette force, puis la puissance dissipée par effet Joule. Conclure ?

Exercice 5

Deux barres conductrices MN et PQ de masse m et longueur ℓ assimilés à chacune à une résistance R peuvent se déplacer sans frottement sur deux rails conducteurs, le tout étant plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$. Un opérateur tire la barre MN repérée par $x(t)$ avec une vitesse constante $\vec{v} = v\vec{e}_x$. On note $x'(t)$ l'abscisse de la barre PQ.



- 1 - Déterminer la f.e.m induite par le mouvement de la barre MN.
- 2 - En déduire l'expression du courant i circulant dans le cadre formé par MNPQ.
- 3 - Déterminer l'équation du mouvement vérifiée par $v' = \dot{x}'(t)$ vitesse de la barre PQ et représenter $v'(t)$.
- 4 - Déterminer la force à appliquer sur la barre par un opérateur extérieur pour que la vitesse soit maintenue constante. La force de Laplace exercée sur MN est elle motrice ou résistante ?

Problème ouvert

Exercice 6

Le canon électromagnétique, connu aussi sous le nom anglais de railgun est une arme à projectile accéléré par la force de Laplace. L'obus de masse $m = 10 \text{ kg}$ et de largeur $\ell = 10 \text{ cm}$ peut être assimilé à la barre conductrice se déplaçant sur les rails de Laplace. Le fût du canon jouant le rôle des rails est long de $L = 10 \text{ m}$.

En supposant que le champ magnétique est de l'ordre de $B = 1 \text{ T}$, déterminer le courant nécessaire pour propulser l'obus à $1600 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

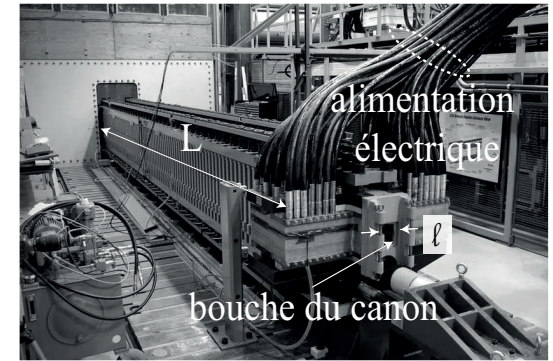
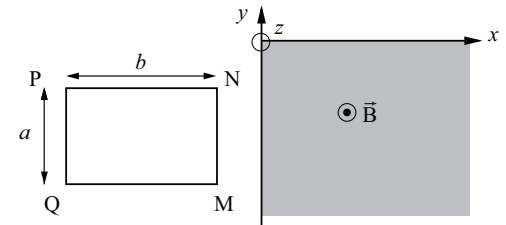


FIGURE 1 – Canon électromagnétique de l'US Navy. Credits US Navy, cliché pris par J.F. Williams.

Les difficiles

Exercice 7

Une spire conductrice rectangulaire MNPQ mobile, de côtés de longueur a et b , de masse m , de résistance R et d'inductance négligeable, est en translation dans le plan (Oxy) parallèlement à l'axe (Ox) et dans le sens des x croissants. Dans la zone d'espace définie par $x > 0$ existe un champ magnétique uniforme et égal à B (avec $B > 0$). On admet que le champ magnétique est nul en dehors de cette zone, sans se préoccuper du problème lié à la discontinuité de $\vec{B}$. On notera $x(t)$ l'abscisse du côté MN (de longueur a) de la spire et $v(t)$ sa vitesse. On néglige toute force autre que magnétique.



1 - À l'instant où le côté MN de la spire conductrice pénètre dans la zone où règne le champ magnétique la vitesse de la spire est non nulle et égale à v_0 . Décrire qualitativement le phénomène qui se produit lorsque la spire pénètre avec une vitesse non nulle dans la zone où règne le champ magnétique.

2 - Déterminer l'expression de la force électromotrice induite dans la spire (on précisera le sens conventionnel choisi pour l'orientation de la spire et on distinguera très clairement différents cas selon les valeurs de x).

3 - En déduire l'expression de l'intensité du courant qui circule dans la spire dans chacun des cas précédents. Calculer le courant pour une spire carré de côté $a = b = 1 \text{ cm}$, de résistance $R = 1.10^{-2} \Omega$ se déplaçant avec une vitesse $V = 10 \text{ m.s}^{-2}$ dans un champ d'intensité $B = 0,1 \text{ T}$.

4 - En déduire, en appliquant le principe fondamental de la dynamique, l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$.

5 - En déduire l'équation différentielle vérifiée par $v(x)$. On pourra utiliser le fait que

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt}$$

6 - En déduire, par intégration de l'équation précédente, la valeur de la vitesse v en fonction de x . On précisera le domaine de validité de la relation ainsi obtenue. A quelle condition sur v_0 la spire conductrice pourra-t-elle rentrer entièrement dans la zone où règne le champ magnétique? Calculer numériquement v_0 pour une spire carré de masse $m = 10 \text{ g}$.

7 - On suppose que la condition précédente est vérifiée et que la vitesse de la spire est non nulle à l'instant où la spire se trouve entièrement dans la zone où règne le champ magnétique. Quel sera le mouvement ultérieur de la spire? Citer une application pratique du phénomène physique précédent.

Exercice 8

La photo d'un modèle de balance de Cotton est placée ci-contre. Ce type de balance, destinée à la mesure de champ magnétique, a été mis au point par Aimé Cotton en 1900. Elle est constituée de deux fléaux. L'un, à gauche, comprend sur sa périphérie, un conducteur métallique qui sera parcouru par un courant et dont une partie sera placée dans le champ magnétique, uniforme et permanent, à mesurer. Le conducteur sera soumis à des forces de Laplace et la balance penchera du côté de ce fléau. L'autre comporte un plateau sur lequel on peut déposer des masses marquées pour équilibrer la balance et déduire ainsi la norme du champ magnétique. Le schéma de principe de la balance est représenté sur la figure ci-dessous.

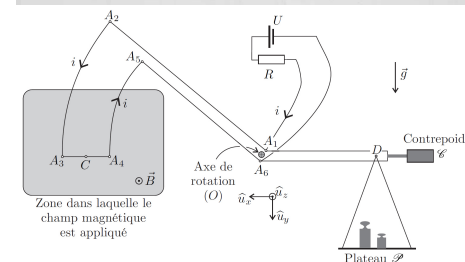


FIGURE 2 – Balance de Cotton

Sur le fléau dessiné à gauche, les conducteurs permettent le passage d'un courant d'intensité i , selon le parcours $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Les portions de circuit A_2A_3 et A_4A_5 sont des arcs de cercle de même centre O . L'ensemble des deux fléaux constitue un système rigide, mobile sans frottement, autour d'un axe horizontal passant par le point O et noté Oz . On désigne par C le milieu du segment A_3A_4 et D le point de suspension du plateau. On note d_1 la distance OC entre les points O et C , d_2 la distance OD entre les points O et D et ℓ la longueur du segment A_3A_4 .

La procédure de mesure est la suivante :

- Équilibrage « à vide » : en l'absence de courant i et de masses marquées dans le plateau, le contrepoids C est déplacé de façon à ce que la balance soit à l'équilibre, les trois points C , O et D étant alignés

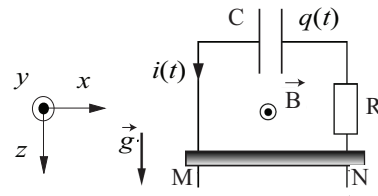
sur l'horizontale.

- Mesure du champ : on ferme le circuit électrique, ce qui permet au courant d'intensité i de circuler dans la balance, le fléau de gauche penche vers le bas ; on ajoute alors des masses dans le plateau jusqu'à ce que la balance soit à l'équilibre, les trois points C, O et D étant alignés sur l'horizontale.

- 1 - Montrer que, lorsque l'équilibrage à vide est réalisé, le centre de masse G des parties mobiles de la balance est situé à la verticale de O.
- 2 - Lorsque le courant circule dans la balance, montrer que le moment résultant en O des forces de Laplace s'exerçant sur les parties en arc de cercle est nul.
- 3 - À l'équilibre, en présence de courant et de champ magnétique, établir l'expression du moment en O des forces de Laplace. En déduire la relation liant $B = \|\vec{B}\|$, la somme m des masses marquées posées sur le plateau, i , ℓ , d_1 , d_2 et le module g du champ de pesanteur.
- 4 - La sensibilité de la balance étant de $\delta m = 0,05$ g, déterminer la plus petite valeur de B mesurable pour $i = 10$ A, $g = 10$ m.s⁻², $\ell = 5$ cm et $d_1 = d_2 = 10$ cm. En comparant cette valeur avec une ou des références connues, conclure quant à l'utilisabilité de la balance.

Exercice 9

Considérons deux rails verticaux distants de L reliés à une résistance et un condensateur. Une barre de masse m tombe sans frottement au contact des rails. Le tout est plongé dans un champ magnétique $\vec{B} = B_0 \vec{e}_y$. On notera $\vec{g} = g \vec{e}_z$ l'accélération de la pesanteur. À l'instant initial, le condensateur n'est pas chargé.



- 1 - Déterminer l'expression de la force de Laplace s'exerçant sur la barre MN.
- 2 - En appliquant le principe fondamental de la dynamique, déterminer une équation reliant $\ddot{z}(t)$ et $i(t)$.

3 - Calculer la f.e.m. induite par le mouvement de la barre dans le champ magnétique.

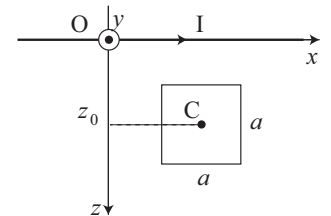
4 - En appliquant la loi des mailles, montrer que l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ peut se mettre sous la forme :

$$\dot{i} + \frac{1}{\tau} i = \frac{i_{lim}}{\tau}$$

On explicitera la valeurs de τ et i_{lim} en fonction de m , g , R , C et B_0 .

Exercice 10

Un fil infini horizontal est parcouru par un courant constant I . Un cadre métallique carré de côté a est lâché à une distance z_0 du fil. On note m la masse du cadre et R sa résistance interne.



- 1 - Déterminer le champ magnétique créé par le fil.
- 2 - Proposer une description du mouvement.
- 3 - Déterminer la f.e.m induite dans la spire, simplifier son expression dans le cas où $z_0 \gg a$.
- 4 - Exprimer la force de Laplace exercée sur la spire carré.
- 5 - Donner l'équation différentielle du mouvement du cadre repérée par $z(t)$.

Corrigés

Exercice 1

1 - Dans le référentiel galiléen associé au sol, la barre est soumise à

- son poids $\vec{P}$;
- la force de Laplace $\vec{F}_{lap}$;
- les actions de contact en M et N supposées négligeables.

Le champ étant uniforme sur le segment MN, on en déduit que

$$\vec{F}_{lap} = i\overrightarrow{MN} \wedge \vec{B} = iLB_0 \vec{e}_z$$

2 - La projection du principe fondamental de la dynamique sur l'axe Oz conduit à

$$m \frac{dv}{dt} = mg + iLB_0$$

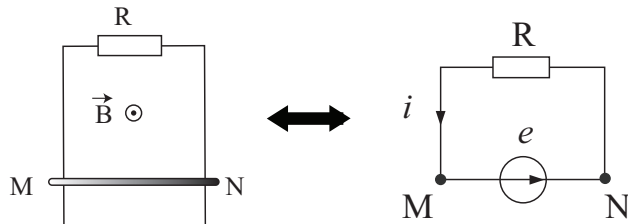
3 - Orientons le circuit dans le sens du champ magnétique. La surface du circuit est

$$S = L \times z(t) \quad \text{soit} \quad \Phi_S(\vec{B}) = LB_0 z(t)$$

La f.e.m. générée par le mouvement de MN dans le champ magnétique B_0 est donnée par

$$e = -vB_0L$$

Le circuit équivalent est :



4 - La loi des mailles donne

$$e = Ri = -vB_0L$$

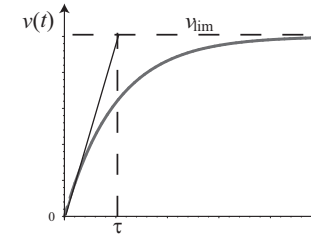
En remplaçant le courant dans l'équation du mouvement, il vient :

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \frac{L^2 B_0^2}{R} v$$

d'où

$$\frac{dv}{dt} + \frac{L^2 B_0^2}{mR} v = g$$

5 - On attend la figure suivante



Exercice 2

1 - La surface fermée générée par le circuit et traversée par le champ magnétique est :

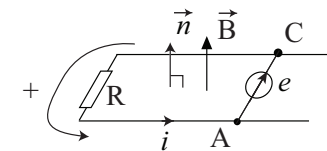
$$S = a \times x(t)$$

Orientons cette surface dans la direction du champ magnétique, le flux du champ magnétique est donné par

$$\Phi_S(\vec{B}) = ax(t) \times B$$

Le mouvement du conducteur dans un champ magnétique va induire une f.e.m donnée par

$$e = -\frac{d\Phi_S(\vec{B})}{dt} = -\dot{x}aB$$

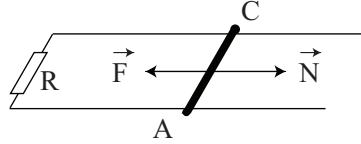


2 - le circuit étant fermé, la loi d'Ohm nous donne

$$I = \frac{e}{R} = -\frac{\dot{x}aB}{R}$$

3 - la présence du courant accompagné d'un mouvement dans le champ magnétique engendre une force de Laplace sur le segment AC donné par

$$\vec{F} = I\vec{AC} \wedge \vec{B} = IaB \vec{e}_x == -\frac{\dot{x}a^2B^2}{R} \vec{e}_x$$



Pour compenser cette force de Laplace, il faut exercer une force $\vec{N}$ telle que

$$\vec{N} = -\vec{F}$$

4 - La puissance de la force $\vec{N}$ est donnée par $\mathcal{P}(\vec{N}) = \vec{N} \cdot \vec{v}$. Remplaçons l'expression de la force $\vec{N}$ obtenue précédemment, il vient

$$\mathcal{P}(\vec{N}) = \frac{\dot{x}^2 a^2 B^2}{R}$$

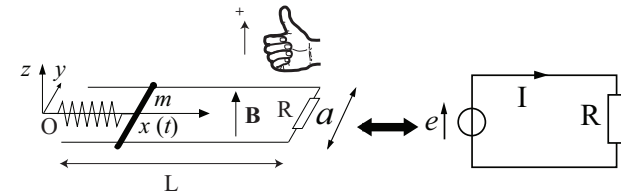
Par définition, la puissance dissipée par effet Joule est donnée par $\mathcal{P}_J = RI^2$. Remplaçons l'expression du courant, il vient

$$\mathcal{P}_J = \frac{\dot{x}^2 a^2 B^2}{R}$$

On en conclut que

$$\mathcal{P}_H = \mathcal{P}(\vec{N})$$

Toute la puissance exercée par l'opérateur est dissipée par effet Joule.



2 - Le système est équivalent au circuit suivant :

Ainsi,
$$I = \frac{e}{R} = \frac{aB\dot{x}}{R}$$

3 - Dans le référentiel galiléen du laboratoire, la barre métallique MN est soumise à

- la réaction des rails $\vec{N} = N \vec{e}_z$;
- son poids $\vec{P} = -mg \vec{e}_z$;
- la force de rappel du ressort $\vec{F} = -k(x - \ell_0) \vec{e}_x$;
- la force de Laplace : $\vec{F}_L = I\vec{MN} \wedge \vec{B} = -a \vec{e}_y \wedge \vec{B} = -IaB \vec{e}_x$.

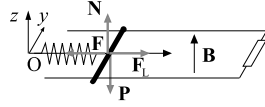
Exercice 3

1 - Lorsque la barre varie, la surface du circuit électrique est modifiée. D'après la loi de Faraday, il apparaît une f.e.m induite. Notons L la longueur des rails. Le flux de champ magnétique à travers la surface est donné par :

$$\Phi_S(\vec{B}) = B \times a \times (L - x(t))$$

L'utilisation de la loi de Faraday permet d'avoir la f.e.m induite :

$$e = -\frac{d\Phi_S(\vec{B})}{dt} = aB\dot{x}$$



La projection du principe fondamental de la dynamique sur l'axe Ox conduit à

$$m\ddot{x} = -k(x - \ell_0) + IaB$$

En remplaçant l'expression de I on obtient :

$$\ddot{x} + \frac{a^2 B^2}{mR} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{k}{m} \ell_0$$

4 - Pour qu'il y ait des oscillations, il faut que le discriminant de l'équation caractéristique soit négatif soit :

$$\Delta = \frac{a^4 B^4}{m^2 R^2} - 4 \frac{k}{m} < 0$$

Ainsi,

$$R > \frac{a^2 B^2}{2\sqrt{km}}$$

La solution de générale de l'équation $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \ell_0$ est

$$x = \ell_0 + e^{-\lambda t} (A \cos \Omega t + B \sin \Omega t) \text{ avec } \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

Avec les conditions initiales $x(0) = h$ et $\dot{x}(0) = 0$, on obtient

$$A = h \quad \text{et} \quad B = h \frac{\lambda}{\Omega}$$

Exercice 4

1 - La longueur du segment OM dans le triangle rectangle OHM est donnée par :

$$OM = OH / \cos(30^\circ) = 2y / \sqrt{3}$$

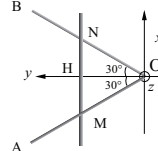
La longueur du circuit fermé est de donc de : $L = OMN = 3OM = 2\sqrt{3}y$.

Ainsi,

$$R = \lambda L = 2\sqrt{3}\lambda y$$

2 - La surface de la spire ainsi formée est :

$$S = \frac{MN \times OH}{2} = \frac{y^2}{\sqrt{3}}$$



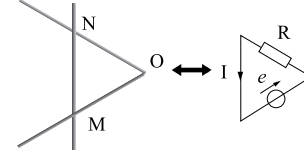
Ainsi,

$$\Phi = B_0 S = \frac{B_0 y^2}{\sqrt{3}}$$

3 - D'après la loi de Faraday, avec $\dot{y} = -V_0$:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -2 \frac{B_0}{\sqrt{3}} y \dot{y} = 2 \frac{B_0}{\sqrt{3}} y V_0$$

4 - Le schéma électrique est le suivant :



En utilisant la loi d'Ohm et l'expression de la résistance R on obtient :

$$I = \frac{e}{R} = \frac{B_0}{\sqrt{3}R} y V_0 = \frac{B_0 V_0}{3\lambda}$$

5 - La force étant uniforme sur la barre NM, il vient :

$$\vec{F}_L = I \vec{NM} \wedge \vec{B} = -\frac{2yIB_0V_0NM}{\sqrt{3}} \vec{e}_y$$

soit

$$\vec{F}_L = \frac{2yB_0^2V_0}{3\sqrt{3}\lambda} \vec{e}_y$$

6 - L'opérateur doit donc imposer une force opposée à la force de Laplace :

$$\vec{F}_{op} = -\vec{F}_L = -\frac{2yB_0^2V_0}{3\sqrt{3}\lambda} \vec{e}_y$$

7 - Calculons la puissance fournie par l'opérateur :

$$\mathcal{P}(\vec{F}_{op}) = \vec{F}_{op} \cdot \vec{V}_0 = \frac{2yB_0^2V_0^2}{3\sqrt{3}\lambda}$$

Calculons la puissance dissipée par effet Joule :

$$\mathcal{P}_J = RI^2 = 2\sqrt{3}\lambda y \left(\frac{B_0 V_0}{3\lambda} \right)^2 = \frac{2yB_0^2V_0^2}{3\sqrt{3}\lambda}$$

On remarque que $\mathcal{P}(\vec{F}_{op}) = \mathcal{P}_J$, c'est-à-dire que toute la puissance fournie par l'opérateur est dissipée par effet Joule.

Exercice 5

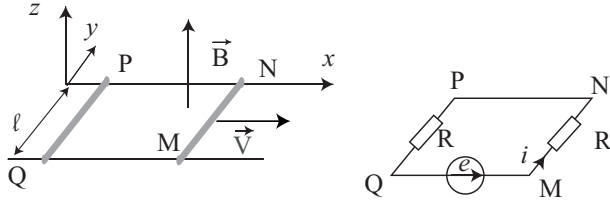
1 - La surface du circuit électrique, orientée par l'axe Oz est donnée par :

$$S = (x - x') \times \ell$$

Le flux de champ magnétique, supposé uniforme, est donné par : $\Phi_S(\vec{B}) = (x - x')\ell B$. On en déduit que la f.e.m induite s'écrit d'après la loi de Faraday selon :

$$e = -\frac{d\Phi_S(\vec{B})}{dt} = -(\dot{x} - \dot{x}')\ell B = -(V - \dot{x}')\ell B$$

L'orientation de la f.e.m induite est le sens direct autour de Oz. Le schéma électrique équivalent est représenté ci-dessous.



2 - En utilisant la loi d'Ohm, il vient naturellement :

$$e = 2Ri \quad \text{soit} \quad i = \frac{(\dot{x}' - V)\ell B}{2R}$$

3 - Calculons la force de Laplace exercée sur le conducteur PQ, orienté selon le courant i :

$$\vec{F}_{PQ} = i\vec{PQ} \wedge \vec{B} = -i\ell B \vec{e}_x = \frac{(V - \dot{x}')\ell^2 B^2}{2R} \vec{e}_x$$

La force est bien dirigée selon $+\vec{e}_x$ lorsque la barre PQ est moins rapide que la barre MN. Ce résultat est conforme à la loi de Lenz, l'opérateur augmente la surface du circuit électrique en déplaçant la barre MN, les effets de l'induction tendent à minimiser cette augmentation de surface.

La projection du PFD selon l'axe Ox pour la barre PQ donne l'équation différentielle suivante :

$$m\dot{v}' = \frac{(V - \dot{x}')\ell^2 B^2}{2R} \quad \text{soit} \quad \ddot{v}' + \frac{\ell^2 B^2}{2mR} v' = \frac{\ell^2 B^2}{2mR} V$$

On reconnaît une équation différentielle de premier ordre avec second membre constant. La vitesse tendant vers la vitesse limite $v_{lim} = V$ avec le temps caractéristique $\tau = \frac{2mR}{\ell^2 B^2}$. La solution est de la forme :

$$v(t) = v_{lim}(1 - e^{-t/\tau}).$$

4 - Calculons la force de Laplace exercée sur le conducteur MN, orienté selon le courant i :

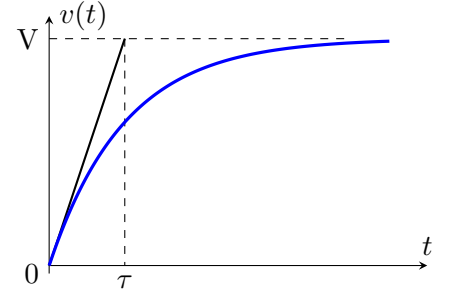
$$\vec{F}_{MN} = i\vec{MN} \wedge \vec{B} = i\ell B \vec{e}_x = \frac{(\dot{x}' - V)\ell^2 B^2}{2R} \vec{e}_x$$

En remplaçant l'expression de la vitesse $\dot{x}'$, on obtient une force selon $-\vec{e}_x$:

$$\vec{F}_{MN} = -\frac{\ell^2 B^2 V e^{-t/\tau}}{2R} \vec{e}_x$$

Il s'agit bien d'une force résistante, de puissance négative :

$$\mathcal{P}(\vec{F}_{MN}) = \vec{F}_{MN} \cdot \vec{V} = -\frac{\ell^2 B^2 V^2 e^{-t/\tau}}{2R} < 0$$

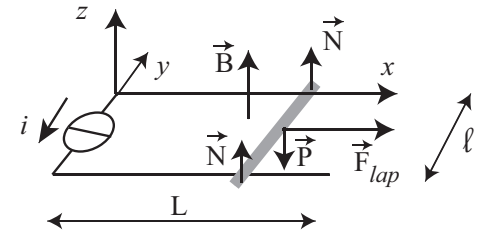


Exercice 6

On cherche à déterminer le courant pour une vitesse finale connue. L'obus, que l'on suppose glisser sans frottement le long des rails, est soumis à la force de Laplace, son poids et la réaction des rails. Les forces verticales (le poids $\vec{P}$ et les réactions du support $\vec{N}$) ne travaillent pas. L'application du théorème de l'énergie cinétique entre l'état initial correspondant à un obus immobile (A) et l'état finale v_f à l'extrémité des rails (B) donne :

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - 0 = W_{AB}(\vec{F}_{lap}) = I\ell B \times L$$

On en déduit l'expression du courant :

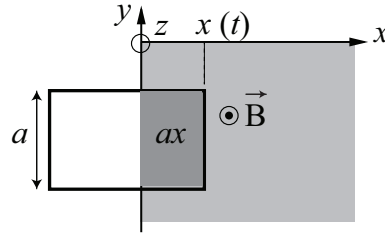


$$I = \frac{mv_f^2}{2B\ell L} \approx 13 \cdot 10^6 \text{ A}$$

Ce courant est colossal et on justifie l'emploi de nombreux câbles électriques pour apporter un tel courant au dispositif.

Exercice 7

1 - Lorsque le côté MN pénètre dans la zone de champ magnétique, le flux du champ magnétique à travers le circuit augmente. Il va donc apparaître une f.e.m induite. Le circuit étant fermé, cette f.e.m induite impose un courant. En présence du champ magnétique, la spire sera soumise à une force de Laplace.



2 - Orientant la spire selon $+Oz$:

Pour $x < 0$, il n'y a pas de fluctuation de flux de champ magnétique car la spire est en dehors du champ magnétique donc $e(x < 0) = 0$.

Pour $0 < x < b$, la surface traversée par le champ magnétique est

$$S = a \times x(t)$$

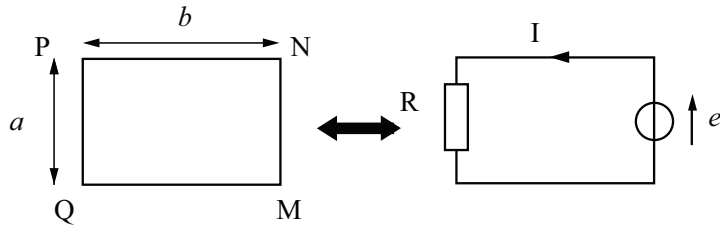
Calculons la f.e.m induite dans le circuit :

$$e(0 < x < b) = -\frac{d\Phi_S(\vec{B})}{dt} = -aB\dot{x}$$

Pour $b < x$, le champ magnétique est uniforme et constant dans le temps. Il n'y a donc pas de variation du flux de champ magnétique, la f.e.m est donc nulle

Ainsi, $e(x > b) = 0$

3 - Utilisons la convention suivante, en orientant la spire selon $+Oz$:



La loi d'Ohm permet de conclure :

$$I = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } x > b \\ -\frac{aB\dot{x}}{R} & \text{si } 0 < x < b \end{cases}$$

4 - Dans le référentiel du laboratoire supposée galiléen, la spire est soumise uniquement à la force de Laplace.

$$\text{Ainsi, } m \frac{d\vec{v}}{dt} = \oint_{MNPQ} I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

Le circuit n'étant pas totalement immergé dans le champ magnétique, décomposons le circuit à l'aide des points J et K :

$$\text{Ainsi, } \oint_{MNPQ} I d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = \oint_{JMNK} I d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = I(\vec{JM} + \vec{MN} + \vec{NK}) \wedge \vec{B}$$

Par symétrie, les actions sur JM et NK se compensent, on en déduit que

$$\vec{F}_{lap} = IaB \vec{e}_x$$

La projection du principe fondamental de la dynamique sur l'axe Ox permet de conclure :

$$m\dot{v} = IaB = -\frac{a^2 B^2}{R} v$$

5 - En utilisant l'indication de l'énoncé on obtient :

$$m\dot{v} = m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = -\frac{a^2 B^2}{R} v$$

En remarquant que $dx/dt = v$, il vient

$$mv \frac{dv}{dx} = -\frac{a^2 B^2}{R} v \quad \text{soit} \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{a^2 B^2}{mR}$$

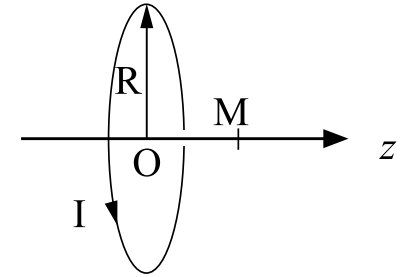
6 - L'intégration de l'équation précédente avec $v(x=0) = 0$ conduit à

$$v(0 < x < b) = v(0) - \frac{a^2 B^2}{mR} x$$

La spire entre entièrement dans la zone $x > 0$ si $v(b) \geq 0$

$$\text{soit} \quad v_0 \geq \frac{a^2 B^2}{mR} b$$

7 - La force de Laplace est nulle pour $x > b$, la spire aura donc un mouvement de translation rectiligne uniforme à la vitesse $v(b)$. Une application de ce phénomène est le freinage des poids lourds par courant de Foucault.



Exercice 8

1 - Dans le référentiel galiléen associé au sol, la barre est soumise à

- son poids $\vec{P}$;
- la force de Laplace $\vec{F}_{lap}$;
- les actions de contact en M et N supposées négligeables.

Le champ étant uniforme sur le segment MN, on en déduit que

$$\vec{F}_{lap} = i\vec{MN} \wedge \vec{B} = iLB_0 \vec{e}_z$$

2 - La projection du principe fondamental de la dynamique sur l'axe Oz conduit à

$$m \frac{dv}{dt} = mg + iLB_0$$

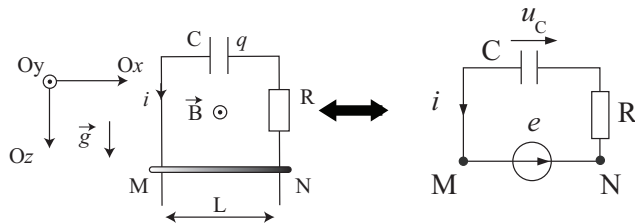
3 - Orientons le circuit dans le sens du champ magnétique. La surface du circuit est

$$S = L \times z(t) \quad \text{soit} \quad \Phi_S(\vec{B}) = LB_0 z(t)$$

La f.e.m. générée par le mouvement de MN dans le champ magnétique B_0 est donnée par

$$e = -vB_0L$$

Le circuit équivalent est :



4 - La loi des mailles donne

$$e = Ri + u_C = -vB_0L$$

Pour obtenir une équation sur i , il faut dériver cette dernière équation en raison de $i = Cdu_C/dt$.

Ainsi,
$$R \frac{di}{dt} + \frac{du_C}{dt} = -vB_0L \quad \text{soit} \quad R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = -vB_0L$$

En remplaçant la vitesse par celle obtenue par le principe fondamental de la dynamique, il vient :

$$R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = -B_0Lg + i \frac{L^2B_0^2}{m}$$

d'où
$$\frac{di}{dt} + \left(\frac{1}{RC} + \frac{L^2B_0^2}{mR} \right) i = -\frac{B_0Lg}{R}$$

Ainsi,
$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC} + \frac{L^2B_0^2}{mR} \quad \text{et} \quad i_{lim} = -\frac{B_0LmgC}{m + L^2B_0^2C}$$

On remarque que l'intensité est négative. Il faut vérifier qu'une erreur de signe ne s'est pas glissée dans la résolution en contrôlant par la f.e.m. par exemple, elle même négative.

Exercice 9

1 - En utilisant le théorème d'Ampère sur un cercle de rayon r , (cf. cours), on obtient en coordonnées cylindriques pour un fil infini d'axe Oz :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

En utilisant les notations de l'énoncé, dans le plan Oxz , le champ magnétique s'écrit :

$$\vec{B}(M) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi z} \vec{e}_y$$

2 - On peut décomposer le mouvement de la façon suivante :

- la chute de la spire va engendrer une diminution de flux de champ magnétique car ce dernier est d'autant plus faible que la spire s'éloigne du fil.
- D'après la loi de Faraday, il y aura apparition d'une f.e.m induite dans la spire carrée, et d'un courant puisque la spire forme un circuit fermé.
- La spire carrée parcourue par un courant et plongée dans un champ magnétique va être soumise à une force de Laplace qui ralentira la chute de la spire d'après la loi de Lenz.

3 - Orientons la spire selon $+\vec{e}_y$, le flux du champ magnétique à travers la spire est donné par :

$$\Phi_S(\vec{B}) = \int_{z_C-a/2}^{z_C+a/2} \frac{-\mu_0 I}{2\pi z} a dz = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} a \ln \frac{z_C + a/2}{z_C - a/2}$$

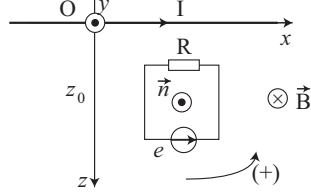
Remarquons que z_C est une fonction du temps. D'après la loi de Faraday, le f.e.m induite est alors donnée par :

$$e = -\frac{d}{dt} \Phi_S(\vec{B}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} a \left(\frac{\dot{z}_C}{z_C + a/2} - \frac{\dot{z}_C}{z_C - a/2} \right)$$

Dans le cas où $a \ll z_C$, on obtient :

$$e = \frac{\mu_0 I a^2}{2\pi z_C^2} \dot{z}_C$$

4 - Le schéma électrique équivalent est représenté ci-dessous.



Le courant circulant dans la spire est donnée par :

$$i(t) = \frac{e}{R} = \frac{\mu_0 I a^2}{2\pi R z_C^2} \dot{z}_C$$

Le champ magnétique n'étant pas uniforme sur le cadre, la force de Laplace ne se compense pas sur les montants inférieurs et supérieurs. On obtient :

$$\vec{F} = -i(t)aB(z_C + a/2) + i(t)aB(z_C - a/2) \vec{e}_z$$

En utilisant la simplification $a \ll z_C$, il vient :

$$\vec{F} = -i(t)a^2 \frac{\mu_0 I}{2\pi z_C^2} \vec{e}_z$$

En remplaçant le courant, il vient :

$$\vec{F} = -a^4 \frac{\mu_0^2 R I^2}{4\pi^2 z_C^4} \dot{z}_C(t) \vec{e}_z$$

5 - La spire dans le référentiel d'étude supposé galiléen est soumis à

- son poids $\vec{P} = mg \vec{e}_z$
- la force de Laplace $\vec{F}$

La projection de la seconde loi de Newton selon l'axe Oz donne :

$$m\ddot{z}_C = mg - a^4 \frac{\mu_0^2 R I^2}{4\pi^2 z_C^4} \dot{z}_C(t)$$

L'équation étant non linéaire, une résolution numérique peut être envisagée.