

# TD 16 : Induction Neumann

## Les classiques

### Exercice 1

On considère une bobine plate de rayon  $a = 1,2 \text{ cm}$  comportant  $N = 730$  spires jointives et parcourue par un courant  $I = 1,0 \text{ A}$ .

- Déterminer l'orientation du champ au centre de la bobine.
- On admet que le champ moyen sur la section de la bobine vaut :  $B_M = 1,56 \times B(O)$  où  $B(O)$  est le champ magnétique au centre du dispositif. Calculer  $B_M$ .
- Exprimer puis calculer l'inductance propre  $L$  de cette bobine. Quelle serait la valeur de  $L$  pour un courant d'intensité  $2 \text{ A}$  ?

Données :

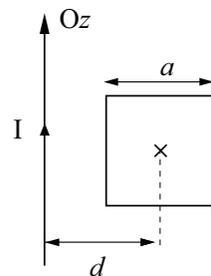
- Champ magnétique au centre d'une spire de rayon  $R$ , parcourue par un courant  $I$  :  $B = \frac{\mu_0 I}{2R}$  ;
- $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$



### Exercice 2

On considère un fil infini parcouru par un courant à proximité d'un circuit carré de côté  $a$ .

- Établir l'expression du champ magnétique créé par un fil infini parcouru par un courant  $I$ .
- Calculer le flux magnétique à travers le carré de côté  $a$  dont le centre est situé à une distance  $d$  du fil.
- En partant de la relation liant le flux à l'intensité créant ce flux, exprimer le coefficient de mutuelle  $M$

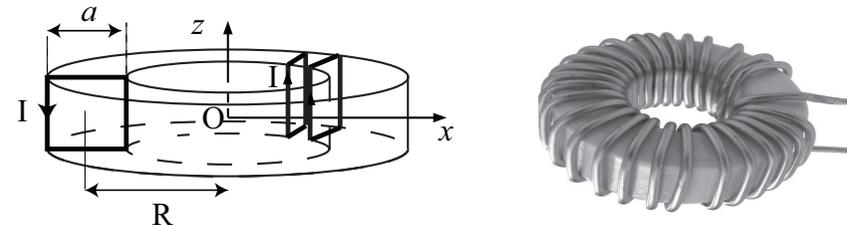


entre le fil et l'anneau.

- Soit  $N$  le nombre d'anneaux présent à la distance  $d$  du fil. Exprimer alors le coefficient de mutuelle  $M_{\text{tot}}$  de l'ensemble en fonction de  $N$  et  $M$ .

### Exercice 3

Une bobine torique est constituée par un fil conducteur bobiné en spires jointives sur un tore circulaire à section carrée de côté  $a$  et de rayon moyen  $R$ . On désigne par  $N$  le nombre total de spires et par  $I$  le courant qui les parcourt. Le matériau constituant le tore est ferromagnétique, on note  $\mu = \mu_0 \mu_r$  la perméabilité magnétique de ce matériau.



- Déterminer, à l'intérieur du tore, l'orientation du champ  $\vec{B}$ .
- Soit  $M$  un point à l'intérieur du tore, déterminer le champ magnétique.  $\vec{B}(M)$ . Le correcteur tiendra compte de la rigueur avec laquelle le calcul est mené.
- Calculer le flux  $\Phi_1$  du champ magnétique à travers la surface d'une spire dont la normale est orientée dans le sens du champ. En déduire l'expression du flux total sur l'ensemble du circuit noté  $\Phi_{\text{tot}}$ .
- Montrer, dans le cas où  $a \ll R$ , que le flux peut s'écrire sous la forme

$$\Phi_{\text{tot}} = \frac{\mu N^2 I}{2\pi R} a^2$$

- À l'aide des données, déterminer la valeur de la perméabilité relative  $\mu_r$  du matériau utilisé pour réaliser le tore. On justifiera la formule du flux employée à l'aide des données numériques fournies.

Données :

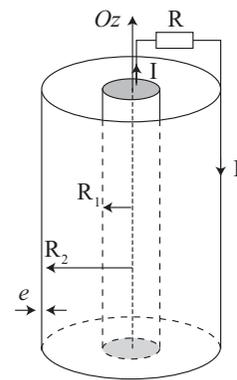
- perméabilité magnétique du vide :  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
- côté de la section du tore :  $a = 12 \text{ mm}$  ;

- Rayon moyen :  $R = 32 \text{ mm}$  ;
- nombre de spires :  $N = 50$  ;
- inductance propre :  $L = 12 \text{ mH}$  ;
- Développements limités :  $\frac{1}{1-x} = 1+x+o(x)$ ,  $\ln(1+x) = x+o(x)$ .

### Les difficiles

#### Exercice 4

La gaine intérieure pleine, de rayon  $R_1$ , du câble coaxial de hauteur  $h \gg R_2$  représenté ci-contre, est parcourue par un courant  $I$  généré par un courant volumique  $\vec{j}_1 = j_1 \vec{e}_z$ . L'armature cylindrique de rayon  $R_2$  et d'épaisseur  $e$  (non représentée sur le schéma), contenant la gaine extérieure, est parcourue par un courant volumique  $\vec{j}_2 = -j_2 \vec{e}_z$ . On négligera les effets de bord ainsi que l'énergie électromagnétique stockée dans les zones où  $0 < r < R_1$  et  $R_2 < r < R_2 + e$ .



- 1 - Exprimer  $j_1$  et  $j_2$  en fonction de  $I$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  et  $e$ .
- 2 - Déterminer le champ  $\vec{B}(r, \theta, z)$  en tout point de l'espace en fonction de  $I$ ,  $e$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  et autres constantes nécessaires. Tracer l'allure de  $\|\vec{B}(\mathcal{M})\|$ .
- 3 - Déterminer le flux de champ magnétique sur le circuit électrique créée.
- 4 - Quelle est alors son inductance propre ?

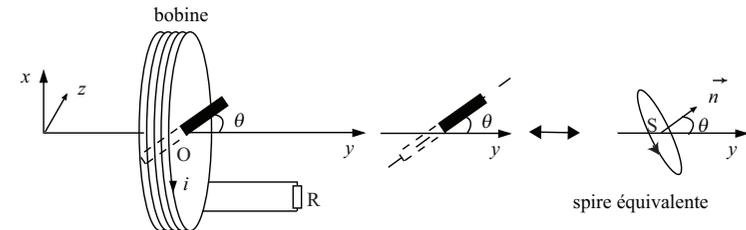
#### Exercice 5

On peut représenter un alternateur de bicyclette de la façon suivante :

- un aimant permanent, assimilable à un dipôle magnétique de moment  $\vec{\mathcal{M}}$  tourne dans le plan  $(O, y, z)$  en faisant avec l'axe  $(O, \vec{e}_y)$  un angle  $\theta = \omega t$ , avec  $\omega$  constante ;
- une bobine comportant  $N$  tours de fil, chaque tour étant assimilable à une spire de rayon  $a$ , de résistance  $r$  et d'inductance  $L$  est placée

dans le plan  $(O, x, z)$ , centrée en  $O$ , sa normale étant dans le sens de  $\vec{e}_y$ . Cette bobine, branchée en série avec une résistance  $R$  représentant les lampes de la bicyclette, est parcourue par un courant  $i(t)$ .

(On rappelle qu'un dipôle magnétique de moment  $\vec{\mathcal{M}}$  est équivalent à une boucle de courant  $\vec{\mathcal{M}} = I.S\vec{n}$ ,  $S$  étant supposé beaucoup plus petite que la surface d'une spire de la bobine, et  $\vec{n}$  est le vecteur normal à  $S$ ).



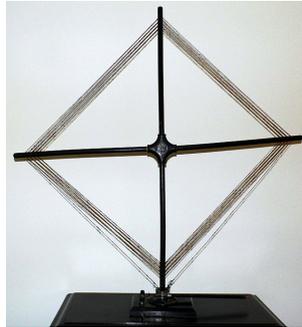
L'expression du champ magnétique créé, en un point de son axe, par un bobine circulaire de rayon  $a$ , d'axe  $Oy$ , comportant  $N$  spires parcourues par le courant  $i(t)$ , est :

$$B(O) = \frac{\mu_0 N i(t)}{2a}$$

- 1 - Exprimer le flux  $\Phi_B$  du champ magnétique créé par cette bobine à travers la spire, équivalente au dipôle magnétique, de vecteur surface  $\vec{S}$ .
- 2 - En utilisant les propriétés des coefficients d'inductance mutuelle  $M_{12}$  et  $M_{21}$  de deux circuits (1) et (2), déduire de ce qui précède le flux magnétique  $\Phi_M$  envoyé par le dipôle dans la bobine de rayon  $a$  en fonction du temps  $t$ . On exprimera le résultat en fonction de  $N, I, a, \omega, t$  et de la perméabilité magnétique du vide  $\mu_0$ .
- 3 - En déduire le flux total  $\Phi$  traversant la bobine, puis la force électromotrice d'induction  $e$  dont la bobine est le siège, en fonction de  $\mathcal{M}, N, L, a, i, \omega$  et  $\mu_0$ .
- 4 - En déduire l'équation différentielle vérifiée par  $i(t)$ .
- 5 - En régime permanent, on pose  $i(t) = I_0 \cos(\omega t + \psi)$ ,  $I$  étant un nombre réel positif. Déterminer les expressions de  $I_0$  et  $\psi$  en fonction des données du problème.

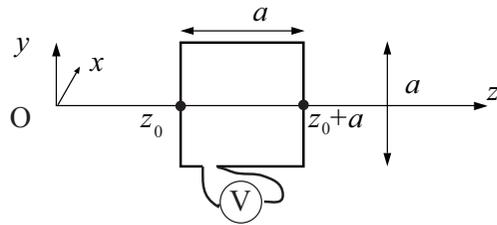
### Exercice 6

Au début du XX<sup>e</sup> siècle, on détectait une onde électromagnétique à l'aide d'un cadre métallique carré (cf. figure ci-contre sous licence CC). Pour simplifier les calculs, on considère que le cadre est pivoté de 45°, le côté est noté  $a$ , le cadre est orienté par le vecteur normale  $\vec{N} = \vec{e}_x$ . Son centre est à l'abscisse  $z_0 + a/2$  et les brins verticaux aux abscisses  $z_0$  et  $z_0 + a$ . L'onde magnétique arrivant sur le cadre a pour expression :



$$\vec{B} = B_0 \cos(\omega(t - z/c)) \vec{e}_x$$

où  $B_0$  est une constante positive,  $\omega$  est la pulsation de l'onde et  $c$  la vitesse de la lumière.



1 - Calculer le flux  $\Phi$  du champ magnétique à travers le cadre à un instant  $t$ . En déduire la f.e.m induite  $e(t)$  dans le cadre. On posera

$$\phi_0 = \frac{z_0 + a/2}{c}$$

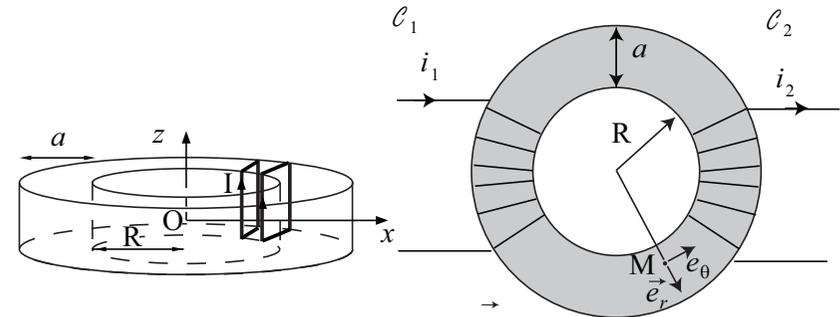
2 - Le voltmètre mesure une tension efficace  $U_{eff}$ . Déterminer son expression.

3 - La valeur de  $a$  étant donnée, montrer qu'il existe des valeurs  $\omega_{max}$  et  $\omega_{min}$  pour lesquelles, la valeur de la tension efficace est respectivement maximale et nulle.

$$\text{Données : } \sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p - q}{2} \cos \frac{p + q}{2}$$

### Exercice 7

On étudie un modèle simplifié de transformateur schématisé ci-après. Il est constitué d'un matériau magnétique torique d'axe ( $Oz$ ) à section carrée de côté  $a$  et de rayon intérieur  $R$ . On suppose que le milieu magnétique est parfait. L'espace est rapporté à la base cylindrique illustrée pour un point  $M$  quelconque sur le schéma suivant.



Le bobinage dit « primaire » noté  $\mathcal{C}_1$  est enroulé en  $N_1$  spires autour de ce tore. Il est parcouru par un courant d'intensité  $i_1$ . Le bobinage dit « secondaire » noté  $\mathcal{C}_2$  est, de la même manière, enroulé en  $N_2$  spires autour de ce tore et est parcouru par un courant d'intensité  $i_2$ . On supposera que le tore constitué d'un matériau ferromagnétique se comporte de manière analogue au vide. Les expressions utilisant  $\mu_0$  la perméabilité magnétique du vide seront identiques dans le matériau en utilisant  $\mu$  sa perméabilité.

$$\text{Données : } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$$

1 - Justifier que le champ magnétique  $\vec{B}_1$  créé à l'intérieur du tore par le courant circulant dans  $\mathcal{C}_1$  est de la forme :  $\vec{B}_1(r, \theta, z) = B_1(r, z) \vec{e}_\theta /$

2 - En appliquant le théorème d'Ampère à un contour soigneusement précisé, déterminer le champ magnétique créé par le circuit  $\mathcal{C}_1$  en tout point à l'intérieur du tore.

3 - Établir l'expression du flux magnétique  $\phi$  du champ magnétique à travers une spire du circuit  $\mathcal{C}_1$ .

4 - En déduire le flux total  $\Phi$  au travers des  $N_1$  spires du circuit  $\mathcal{C}_1$ .

5 - Rappeler la définition de l'inductance propre  $L$  (ou coefficient d'auto-inductance).

6 - En déduire que l'inductance propre du circuit  $\mathcal{C}_1$  est donnée par :

$$L_1 = N_1^2 \frac{a\mu}{2\pi} \ln \frac{R+a}{R}$$

7 - Quelle est alors l'expression de l'inductance propre du circuit  $\mathcal{L}_2$  ?

8 - Rappeler la définition du coefficient de mutuelle inductance  $M$ . Démontrer que ce coefficient  $M$  est donné par :

$$M = N_1 N_2 \frac{a\mu}{2\pi} \ln \frac{R+a}{R}$$

9 - La résistance des bobinages étant négligée, exprimer les tensions  $u_1$  et  $u_2$  aux bornes du primaire et du secondaire en fonction des dérivées par rapport au temps de  $i_1$  et  $i_2$  et des coefficients  $L_1$ ,  $L_2$  et  $M$ .

10 - Le fonctionnement d'un transformateur est-il possible pour des signaux continus ? Justifier votre réponse.

## Corrigés

### Exercice 1

1 - Tout plan contenant  $Oz$  est plan d'antisymétrie du courant. On en déduit que le champ magnétique est porté par  $Oz$ .

2 - La section d'une spire étant  $\pi a^2$ , le flux du champ magnétique au travers une spire vaut donc :

$$\Phi_1 = 1,56B(O)\pi a^2 = 1,56 \frac{\pi \mu_0 N I a^2}{2}$$

Pour  $N$  spires le résultat devient :

$$\Phi_N = N\Phi_1 = 1,56 \frac{\pi \mu_0 N^2 I a}{2}$$

Ainsi,

$$L = \frac{\Phi}{I} = 1,56 \frac{\pi \mu_0 N^2 a}{2}$$

3 - Avec les données de l'énoncé :

$$B(O) = 9,7 \cdot 10^{-4} \text{ T} \quad \text{et} \quad L = 150 \mu\text{H}$$

La valeur de  $L$  reste identique car  $L$  ne dépend pas du courant.

### Exercice 2

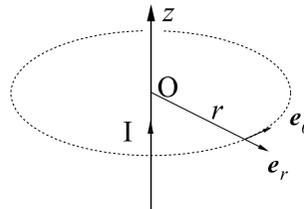
1 - Tout plan contenant  $Oz$  est plan de symétrie des courants donc

$$\vec{B}(M) = B(M) \vec{e}_\theta$$

La distribution des courants est invariante par translation selon  $Oz$  et par rotation selon  $\theta$ , ainsi  $\vec{B}(r, \theta, z) = B(r) \vec{e}_\theta$ .

L'application du théorème d'Ampère sur un cercle de rayon  $r$  permet de conclure :

$$\oint \vec{B} d\vec{\ell} = 2\pi r B(r) = \mu_0 I \quad \text{soit} \quad \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$



2 - Découpons la spire carré en bandelettes de hauteur  $a$  et de largeur  $dr$ . Le champ magnétique est uniforme et perpendiculaire à cette surface donc :

$$d\Phi = \vec{B} d\vec{S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} a dr$$

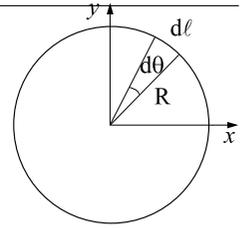
Par intégration, on obtient :

$$\Phi = \int_{d-a/2}^{d+a/2} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} a dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi} a \ln \frac{d+a/2}{d-a/2}$$

3 - Par définition, le flux du champ  $\vec{B}$  créé par le fil sur l'anneau vaut

$$\Phi = M I \quad \text{soit} \quad M = \frac{\mu_0}{2\pi} a \ln \frac{d+a/2}{d-a/2}$$

4 - En présence de  $N$  anneaux, le flux est  $N$  fois plus grand :  $M_{\text{tot}} = N \times M$



### Exercice 3

1 - Tout plan contenant  $Oy$  est plan de symétrie pour la distribution des courants. On en déduit que le champ  $\vec{B}$  est perpendiculaire au plan contenant  $Oy$  et  $M \vec{B}(M) = B(M) \vec{e}_\theta$ .

La distribution de courant est invariante par rotation autour de  $Oz$ , on en déduit que

$$\vec{B}(r, \theta, z) = B(r, z) \vec{e}_\theta$$

2 - Prenons un cercle  $\mathcal{C}$  de rayon  $r = x$  intérieur au tore, et orienté selon  $\vec{e}_\theta$ . L'application du théorème d'Ampère permet d'écrire

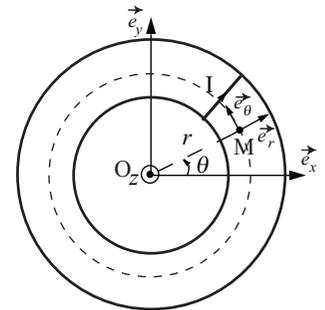
$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} d\vec{\ell} = 2\pi r B_\theta(r, z) = \mu_0 N I$$

d'où

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

3 - Par définition,  $\Phi_{1\text{spire}} = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$ . Avec  $d\vec{S} = dx dy \vec{e}_\theta$ , on obtient :

$$\Phi_{1\text{spire}} = \int_{x=R-a/2}^{x=R+a/2} \int_{y=0}^{y=a} \frac{\mu_0 N I}{2\pi x} dy dx \quad \text{soit} \quad \Phi_{\text{tot}} = N \Phi_{\text{spire}} = \frac{\mu_0 N^2 I a}{2\pi} \ln \frac{2R+a}{2R-a}$$



4 - En effectuant le développement limité, on obtient :

$$\frac{1 + a/2R}{1 - a/2R} = \left(1 + \frac{a}{2R}\right) \left(1 + \frac{a}{2R} + o(a/R)\right)$$

soit 
$$\frac{1 + a/2R}{1 - a/2R} = 1 + \frac{a}{R} + o(a/R)$$

Ainsi, 
$$\ln \frac{2R + a}{2R - a} = \ln \left(1 + \frac{a}{R} + o(a/R)\right) = \frac{a}{R}$$

soit 
$$\Phi = \frac{\mu_0 N^2 I a}{2\pi} \ln \frac{2R + a}{2R - a} \approx \frac{\mu_0 N I a^2}{2\pi R}$$

5 - Au regard des données, les développements limités ne sont pas licites. L'inductance propre est définie par :

$$L = \frac{\phi_{tot}}{I} = \frac{\mu N a}{2\pi} \ln \frac{2R + a}{2R - a}$$

On obtient donc la permittivité relative par la relation suivante :

$$\mu_r = \frac{2\pi L}{\mu_0 N a \ln \frac{2R + a}{2R - a}}$$

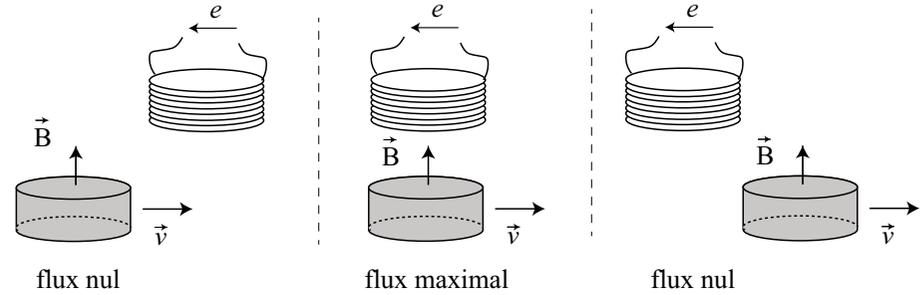
A.N. : 
$$\mu_r = 5,3 \cdot 10^3$$

#### Exercice 4

Le mouvement de l'aimant à proximité de la bobine donne lieu au phénomène d'induction. Il faut donc estimer la variation de flux de champ magnétique à travers la bobine.

Lorsque l'aimant est loin de la bobine le champ magnétique est nul et lorsqu'il est en face de la bobine, le champ magnétique vaut  $B = 10 \text{ mT}$ . Le temps caractéristique de fluctuation du champ magnétique est donné par le temps de passage de l'aimant en face de la bobine :

$$\Delta t = \frac{d}{v} = 10,01 \text{ ms}$$



Le flux de champ magnétique à travers les N spires de la bobine vaut alors :

$$\Phi_{bobine} = N \times B \times \frac{\pi d^2}{4}$$

La f.e.m induite à ces bornes est donnée par la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi_{bobine}}{dt} \sim \frac{N \times B \times \frac{\pi d^2}{4}}{\Delta t}$$

En utilisant les valeurs fournies, on obtient :  $e \sim 9 \text{ mV}$ .

Cette tension est très faible et nécessite une amplification pour être traitée par le compteur. En réalité la bobine de détection comporte un noyau de ferrite dont les propriétés sont modifiées au passage de l'aimant.

#### Exercice 5

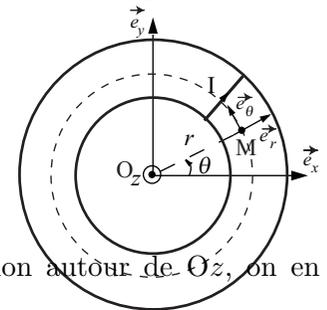
1 - En supposant la densité de courant uniforme :  $j_1 = I/\pi R_1^2$ . De même :  $j_2 = I/(\pi(R_2 + 2)^2 - R_2^2)$ .

2 - Tout plan contenant Oz est plan de symétrie pour la distribution du courant. On en déduit que le champ  $\vec{B}(M)$  est perpendiculaire au plan contenant Oz et M

$$\vec{B}(M) = B(M) \vec{e}_\theta$$

La distribution de courant est invariante par rotation autour de Oz, on en déduit que

$$\vec{B}(r, \theta, z) = B(r, z) \vec{e}_\theta$$



Prenons comme contour d'Ampère un cercle  $\mathcal{C}$  de rayon  $r$ , et orienté selon  $\vec{e}_\theta$ .  
Le calcul de la circulation conduit à

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} d\vec{\ell} = 2\pi r B_\theta(r, z)$$

Le courant enlacé dépend du rayon :

- $r < R_1$ ,  $I_{enlace} = \pi r^2 j_1$
- $R_1 < r < R_2$ ,  $I_{enlace} = I$
- $R_2 < r < R_2 + e$ ,  $I_{enlace} = I - j_2 \pi (r^2 - R_2^2)$
- $R_2 + e < r$ ,  $I_{enlace} = I - I = 0$

L'application du théorème d'Ampère permet d'écrire

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

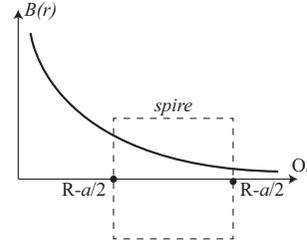
Après simplification, il vient :

- $r < R_1$ ,  $B_\theta(r) = \mu_0 \frac{r j_1}{2}$
- $R_1 < r < R_2$ ,  $B_\theta(r) = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}$
- $R_2 < r < R_2 + e$ ,  $I_{enlace} = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} - \mu_0 \frac{j_2 \pi (r^2 - R_2^2)}{2\pi r}$
- $R_2 + e < r$ ,  $B_\theta(r) = 0$

3 - Par définition,  $\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$ . Le champ magnétique n'est pas uniforme sur une section, il faut effectuer l'intégrale avec  $d\vec{S} = dr dz \vec{e}_\theta$ . On obtient :

$$\Phi = \int_{r=R_1}^{r=R_2} \int_{z=0}^{z=h} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr dz \frac{\mu_0 I h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

4 - L'inductance, définie par  $\Phi = L \times I$ , vaut :  $L = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$ .



### Exercice 6

1 - La surface du dipôle placé en  $y = 0$ , est de petite taille. On peut donc supposer que le champ est uniforme sur la surface. La surface du dipôle étant orientée avec un angle  $\theta$ , on obtient :

$$\Phi_B = \vec{B}(0) \cdot \vec{S} = \frac{\mu_0 N i(t)}{2a} S \cos \theta$$

2 - Les flux s'exprime de la manière suivante :

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 N i(t)}{2a} S \cos \theta = M_{12} i(t) \text{ et } \Phi_M = M_{21} I$$

Le théorème de Neumann assure que

$$M_{12} = M_{21} = \frac{\mu_0 N}{2a} S \cos \theta$$

Ceci permet de conclure que :

$$\Phi_M = M_{12} \times I = \frac{\mu_0 N I}{2a} S \cos \theta = \frac{\mu_0 N \mathcal{M}}{2a} \cos \omega t$$

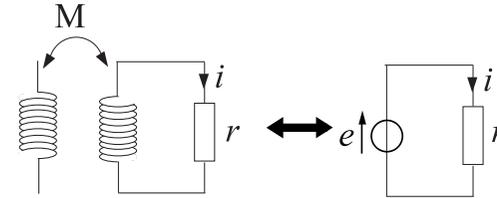
3 - Par définition :

$$\Phi = L i(t) + M_{21} I = L i(t) + \frac{\mu_0 N \mathcal{M}}{2a} \cos \omega t$$

d'où

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{di}{dt} + \frac{\mu_0 N \mathcal{M}}{2a} \omega \sin \omega t$$

4 - Le schéma électrique équivalent est le suivant :



La résistance de la bobine étant alimenté par la f.e.m  $e$ , on en déduit que :

$$e = r i$$

soit

$$-L \frac{di}{dt} + \frac{\mu_0 N \mathcal{M}}{2a} \omega \sin \omega t = r i$$

d'où

$$\frac{di}{dt} + \frac{r}{L} i = \frac{\mu_0 N \mathcal{M} \omega}{2aL} \sin \omega t$$

5 - Le second membre étant sinusoïdal, la notation complexe permet d'obtenir la solution en régime permanent. On obtient, avec  $\underline{i} = I_0 e^{j(\omega t + \psi)}$  et  $\sin \omega t = \text{Re}(-j e^{j\omega t})$  :

$$j\omega \underline{i} + \frac{r}{L} \underline{i} = -j \frac{\mu_0 N \mathcal{M} \omega}{2aL} e^{j\omega t}$$

d'où 
$$\underline{i} = -j \frac{1}{j\omega + r/L} \frac{\mu_0 N M \omega}{2aL} e^{j\omega t}$$

d'où 
$$\left\{ \begin{array}{l} I = |\underline{i}| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + (r/L)^2}} \frac{\mu_0 N M \omega}{2aL} \\ \psi = \text{Arg} -j \frac{1}{j\omega + r/L} \frac{\mu_0 N M \omega}{2aL} = -\pi/2 - \arctan \frac{r}{L\omega} \end{array} \right.$$

### Exercice 7

1 - Le champ magnétique n'étant pas constant sur la surface de la spire, il faut calculer l'intégrale du flux :

$$\Phi_S(\vec{B}) = \int_{z_0}^{z_0+a} \int_{-a/2}^{a/2} B_0 \cos(\omega(t - z/c)) dy dz$$

d'où 
$$\Phi_S(\vec{B}) = -\frac{ac}{\omega} B_0 \left[ \sin(\omega(t - z/c)) \right]_{z_0}^{z_0+a}$$

Ainsi, 
$$\Phi_S(\vec{B}) = \frac{ac}{\omega} B_0 \left[ \sin(\omega(t - z_0/c)) - \sin(\omega(t - (z_0 + a)/c)) \right]$$

En utilisant la décomposition des fonctions trigonométriques, on obtient :

$$\Phi_S(\vec{B}) = \frac{2ac}{\omega} B_0 \sin\left(\frac{\omega a}{2c}\right) \cos(\omega(t - (z_0 + a/2)/c))$$

D'après la loi de Faraday, on en déduit que

$$e = -\frac{d\Phi_S(\vec{B})}{dt} = 2acB_0 \sin\left(\frac{\omega a}{2c}\right) \sin(\omega(t - \phi_0))$$

d'où 
$$e = 2acB_0 \sin\left(\frac{\omega a}{2c}\right) \sin(\omega(t - \phi_0))$$

2 - D'après l'expression précédente, on en déduit que la tension efficace est :

$$U_{eff} = \sqrt{2} ac B_0 \sin\left(\frac{\omega a}{2c}\right)$$

3 - La tension obtenue dépend de  $\sin(\omega a/2c)$ , on en déduit que

$$\omega_{\min} a/2c = \pi[\pi] \quad \text{et} \quad \omega_{\max} a/2c = \pi/2[\pi]$$

d'où 
$$\omega_{\min} = \frac{2\pi c}{a} [2\pi c/a] \quad \text{et} \quad \omega_{\max} = \frac{\pi c}{a} [2\pi c/a]$$

### Exercice 8

1 - Le plan  $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$  est plan de symétrie pour la distribution des courants. On en déduit que le champ  $\vec{B}$  est perpendiculaire à ce plan

soit 
$$\vec{B}(M) = B_\theta(r, \theta, z) \vec{e}_\theta$$

La distribution de courant est invariante par rotation autour de  $Oz$ , on en déduit que  $\vec{B}(M) = B(r, z) \vec{e}_\theta$ .

2 - Prenons un cercle  $C$  de rayon  $r$  intérieur au tore, et orienté selon  $\vec{e}_\theta$ . L'application du théorème d'Ampère permet d'écrire

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = 2\pi r B_\theta(r, z) = \mu_0 N_1 i_1$$

d'où 
$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 N_1 i_1}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

3 - Par définition,

$$\Phi_{1spire} = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Avec  $d\vec{S} = dr dz \vec{e}_\theta$ , on obtient :

$$\Phi_{1spire} = \int_{r=R}^{r=R+a} \int_{z=0}^{z=a} \frac{\mu N_1 i_1}{2\pi r} dr dz$$

On obtient donc pour une spire :

$$\Phi_{spire} = \frac{\mu N_1 i_1 a}{2\pi} \ln \frac{R+a}{R}$$

4 - En sommant les flux sur chaque spire, il vient :

$$\Phi = N_1 \Phi_{spire} = \frac{\mu N_1^2 i_1 a}{2\pi} \ln \frac{R+a}{R}$$

5 - Par définition l'inductance propre est donnée par :  $\Phi = L_1 i_1$ .

6 - Par identification, il vient :  $L_1 = \frac{\mu N_1^2 a}{2\pi} \ln \frac{R+a}{R}$ .

7 - Par analogie, on obtient évidemment :

$$L_2 = \frac{\mu N_2^2 a}{2\pi} \ln \frac{R+a}{R}$$

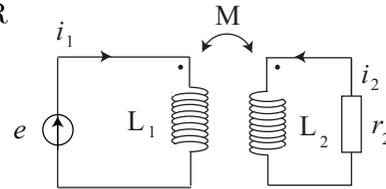
8 - L'inductance mutuelle est le coefficient de proportionnalité entre le flux du champ magnétique créé par un circuit à travers un autre et le courant responsable du champ magnétique.

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = N_2 \times \Phi_1 = \frac{\mu N_1 N_2 i_1 a}{2\pi} \ln \frac{R+a}{R}$$

On en conclut que :

$$M = \frac{\mu N_1 N_2 a}{2\pi} \ln \frac{R+a}{R}$$

9 - Le schéma électrique équivalent est représenté ci-contre. On en déduit que :



$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

10 - En régime continu, il n'y a pas de variation de flux de champ magnétique donc pas de couplage entre les enroulements.