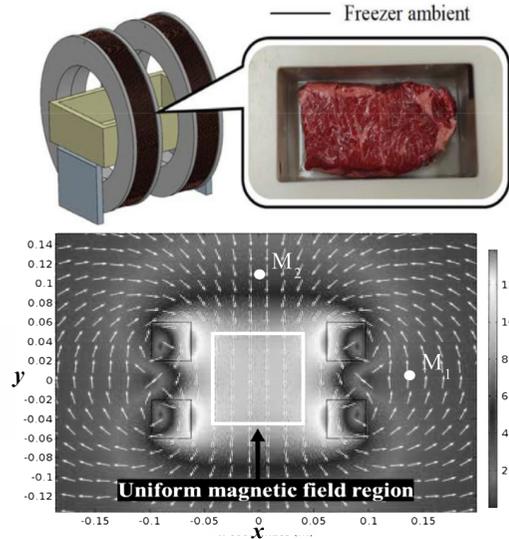


# TD 14 : Magnétostatique

## Les classiques

### Exercice 1

Dans le but de préserver les aliments lors de la congélation, des chercheurs ont placé des steaks dans des bobines pour étudier l'influence du champ magnétique sur l'apparition de cristaux de glace. Le dispositif est constitué de deux bobines dont l'enroulement est dans le même sens. (Image adaptée de *Effects of an oscillating magnetic field on ice nucleation, J. Of Food Process Engineering, 2020*). L'axe  $Oz$ , non représenté sur la figure, est en dehors de la feuille.



- 1 - Que représentent les plans  $Oxs$ ,  $Oxz$  et  $Oyz$  pour la distribution de courant ?
- 2 - Justifier l'orientation du champ magnétique au point  $M_1$ .
- 3 - Justifier l'orientation du champ magnétique au point  $M_2$ .
- 4 - Les auteurs précisent que le champ magnétique est uniforme dans la région médiane. Justifier cette affirmation à partir de la forme des lignes de champ.

### Exercice 1

- 1 - Le plan  $Oxy$  est le plan de la feuille, plan de symétrie du circuit électrique

mais plan d'anti-symétrie pour la distribution de courant. Il s'agit donc d'un plan de symétrie pour le champ magnétique.

De même, le plan  $Oxy$  est un plan d'anti-symétrie pour la distribution de courant donc d'un plan de symétrie pour le champ magnétique.

Enfin, le plan  $Oyz$  est un plans de symétrie du circuit électrique et du courant. Il s'agit d'un plan d'anti-symétrie pour le champ magnétique.

2 - Le point  $M_1$  appartient au plan  $Oyz$ , plan de symétrie du courant, d'anti-symétrie pour le champ magnétique. On en déduit que le champ magnétique est perpendiculaire à ce plan :

$$\vec{B}(M_1) = B_y(M_1) \vec{e}_y$$

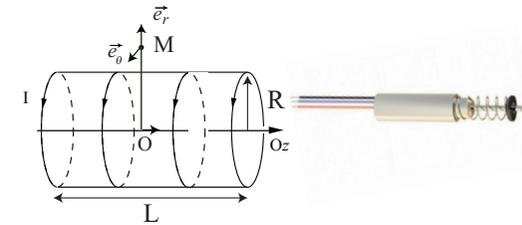
3 - Le point  $M_2$  appartient à  $Oxy$  et  $Oyz$  qui sont des plans de symétrie pour le champ magnétique. Le champ magnétique est donc contenu dans ces plans. On en déduit que

$$\vec{B}(M_2) = B_y(M_2) \vec{e}_y$$

4 - Les lignes de champ sont parallèles entre les bobines. Le champ ne présente donc pas de variation, ni en amplitude, ni en norme, il peut être qualifié d'uniforme.

### Exercice 2

Un capteur de position inductif peut être modélisé par un solénoïde de longueur  $L$  et de rayon  $R$  dans lequel coulisse un matériau ferromagnétique de susceptibilité  $\mu$ . On supposera que  $L \gg R$ .



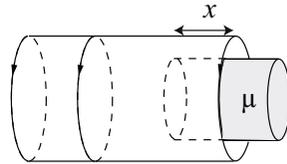
On note  $N$  le nombre de spires parcourue par un courant  $I$ .

- 1 - Donner l'énoncé du théorème d'Ampère.
- 2 - Déterminer l'orientation du champ  $\vec{B}(M)$  créée par le solénoïde.
- 3 - Déterminer les variables dont dépend  $\vec{B}(M)$ .
- 4 - Tracer l'allure des lignes de champ. Que peut on dire du champ magnétique à l'extérieur du solénoïde ?
- 5 - En appliquant le théorème d'Ampère, montrer que  $\vec{B}(r < R) =$

$$\mu_0 \frac{N}{L} I \vec{e}_z$$

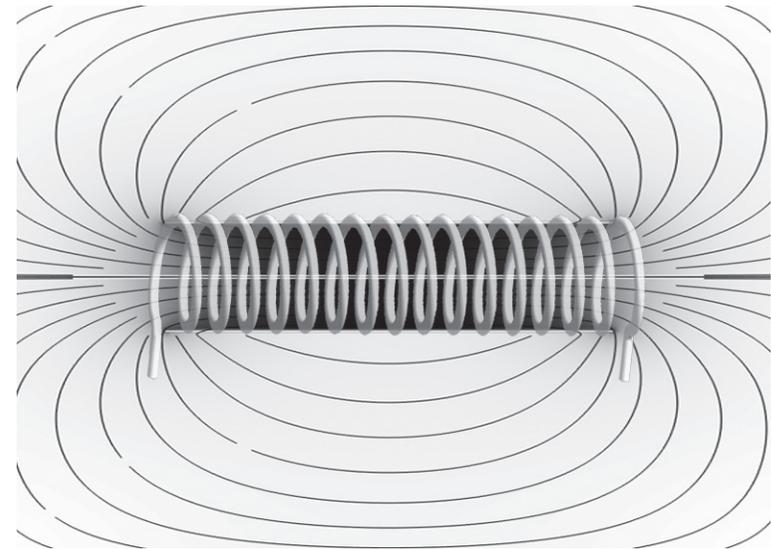
6 - Déterminer l'expression littérale du coefficient d'auto-inductance  $L_0$  du solénoïde en l'absence de matériau ferromagnétique.

On admettra que l'insertion d'un matériau sur une distance  $x$  du solénoïde conduit à une multiplication du coefficient d'auto-inductance du solénoïde de longueur  $x$  équivalent par un coefficient  $\delta$ .



7 - Déterminer en fonction de  $N$ ,  $L$  et  $x$  le nombre  $N(x)$  de spires qui entourent le matériau ferromagnétique.

8 - En déduire l'inductance propre totale, en décomposant le système en deux solénoïdes de longueur  $x$  et  $L - x$  connectés en série.



## Exercice 2

1 - D'après le théorème d'Ampère, la circulation du champ magnétique sur un contour fermé est proportionnelle au courant enlacé par le contour :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{enlace}$$

2 - Le solénoïde étant supposé infini ( $L \gg R$ ), le plan  $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  est plan de symétrie pour  $I$ , le champ  $\vec{B}$  est donc porté par l'axe  $Oz$  :

$$\vec{B} = B \vec{e}_z$$

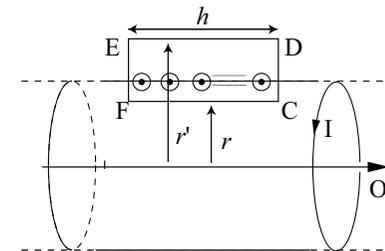
3 - Le courant  $I$  étant invariant par translation suivant  $Oz$  et par rotation autour de  $Oz$ , on en déduit que

$$\vec{B} = B(r) \vec{e}_z.$$

4 - Les lignes de champs pour une bobine de taille  $L$  sont de la forme :

On peut donc en déduire que si le solénoïde est infini, le champ magnétique est nul à l'extérieur.

5 - Appliquons le théorème d'Ampère sur un rectangle ABCD de côté  $h$  et  $r' - r$ .



L'intégrale du champ magnétique sur le contour est nulle sur les segments CD et EF car le champ est perpendiculaire à ces segments. Elle est également nulle sur le segment DE car le champ magnétique est supposé nul à l'extérieur du solénoïde. L'intégrale sur le contour CDEF devient :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_{FC} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = hB(r)$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{enlace}$$

De plus, le contour CDEF enlace  $N \times \frac{h}{L} \times I$  courants, il vient

$$\oint_{ABCD} \vec{B} d\vec{\ell} = \mu_0 N \times \frac{h}{L} \times I$$

On obtient alors :

$$hB(r) = \mu_0 N \times \frac{h}{L} \times I \quad \text{soit} \quad B(r < R) = \mu_0 \frac{N}{L} I$$

6 - Le champ magnétique est uniforme sur la surface d'une spire, le flux de champ magnétique sur l'ensemble du solénoïde est donc donné par :

$$\Phi_{solenoïde}(\vec{B}) = N \times \Phi_{spire}(\vec{B}) = N\pi R^2 \times B$$

d'où

$$\Phi_{solenoïde}(\vec{B}) = N\pi R^2 \mu_0 \frac{N}{L} I \quad \text{soit} \quad L_0 = \pi R^2 \mu_0 \frac{N^2}{L}$$

7 - Le nombre de spires concernées est :

$$N(x) = N \frac{x}{L}$$

8 - On peut donc considérer l'ensemble par deux solénoïdes connectés en série, l'un comportant  $N(x)$  spires entourant un matériau ferromagnétique (facteur dopant  $\delta$ ) et l'autre avec  $N - N(x)$  spires seules.

On en déduit que l'inductance totale est donnée par :

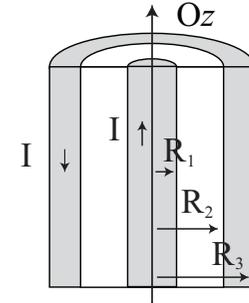
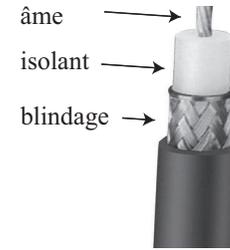
$$L_{tot} = \delta \times \pi R^2 \mu_0 \frac{N(x)^2}{x} + \pi R^2 \mu_0 \frac{(N - N(x))^2}{L - x}$$

En remplaçant les valeurs de  $N(x)$ , on obtient :

$$L_{tot} = \delta \times \pi R^2 \mu_0 N^2 \frac{x}{L^2} + \pi R^2 \mu_0 \frac{L - x}{L^2} = \pi R^2 \mu_0 \frac{N^2}{L^2} ((\delta - 1)x + L)$$

### Exercice 3

Un câble coaxial est constitué de deux cylindres d'axes  $Oz$  isolés l'un de l'autre par une épaisseur  $e = R_2 - R_1$  d'isolant. Le cylindre intérieur de rayon  $R_1$  est parcouru par un courant  $I$  et celui compris entre  $R_2$  et  $R_3$  par un courant  $-I$ .



- 1 - Déterminer les vecteurs densité de courant dans le cylindre intérieur et le cylindre extérieur.
- 2 - En déduire l'expression du champ magnétique en tout point de l'espace.
- 3 - Donner l'allure de la variation du champ magnétique en fonction de la distance  $r$  à l'axe  $Oz$ .

### Exercice 3

1 - Par définition, la densité de courant traversant le cylindre de rayon  $R_1$  est donné par :

$$j_1 = \frac{I}{\pi R_1^2}$$

Pour le tube de rayon intérieur  $R_2$  et extérieur  $R_3$ , la surface est :

$$S = \pi R_3^2 - \pi R_2^2$$

On en déduit que la densité de courant est donnée par :

$$j_2 = \frac{-I}{\pi(R_3^2 - R_2^2)}$$

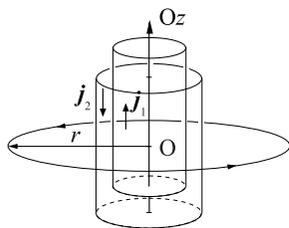
2 - Tout plan contenant  $Oz$  est plan de symétrie pour la distribution des courants donc le champ est perpendiculaire à ces plans :

$$\vec{B} = B(r, \theta, z) \vec{e}_\theta$$

L'invariance par translation selon  $z$  et par rotation selon  $\theta$  de la distribution des courants permet d'écrire

$$\vec{B} = B(r, \theta, z) \vec{e}_\theta = B(r) \vec{e}_\theta$$

Pour appliquer le théorème d'Ampère, prenons un cercle de rayon  $r$  orienté selon  $\vec{e}_\theta$ .



Si  $r < R_1$ , ce cercle enlace un courant  $I_{enlace} = j_1 \pi r^2$ ,

d'où Pour  $r < R_1$ ,  $B(r) = \frac{j_1 r}{2}$

Si  $R_1 < r < R_2$ , le cercle de rayon  $r$  enlace le premier cylindre qui est parcouru par un courant  $I$ . Ainsi l'application du théorème d'Ampère donne

$$2\pi r B(r) = \mu_0 I = \mu_0 I$$

Ainsi, Pour  $R_1 < r < R_2$ ,  $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

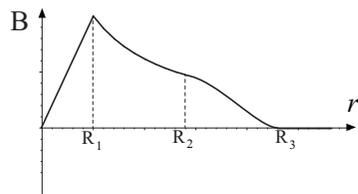
Si  $R_3 > r > R_2$ , le cercle de rayon  $r$  enlace les deux cylindres. Le courant enlacé vaut donc  $I + j_2 \pi (r^2 - R_2^2)$ . L'application du théorème d'Ampère permet de conclure que

$$\text{Pour } R_3 > r > R_2, B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} - \frac{\mu_0 I (r^2 - R_2^2)}{2\pi r (R_3^2 - R_2^2)}$$

Enfin, si  $r > R_3$ , le cercle de rayon  $r$  enlace complètement les deux cylindres. Le courant enlacé vaut donc  $I - I = 0$ . L'application du théorème d'Ampère permet de conclure que

$$\text{Pour } r > R_3, B(r) = 0$$

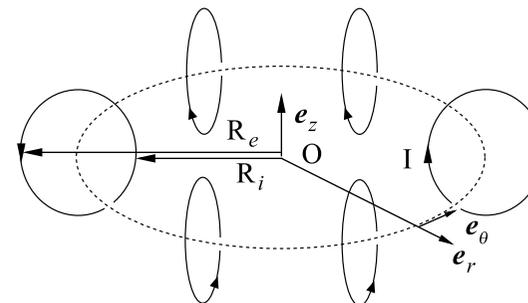
3 - Allure du champ  $B(r)$  en fonction de distance à l'axe



## Pour s'entraîner

### Exercice 4

Le tokamak Tore-Supra est équipé de bobines supraconductrices, appelées bobines toroïdales (refroidies dans l'Hélium superfluide à 1,8 K) régulièrement réparties autour du tore de rayon intérieur  $R_i$  et extérieur  $R_e$ . Le tout comporte  $N$  spires circulaires parcourues par un courant permanent d'intensité  $I$ .



1 - Montrer par une étude des symétries du problème que le champ magnétique toroïdal peut s'exprimer sous la forme :

$$\vec{B} = B(r, z) \vec{e}_\theta$$

2 - Dans le plan équatorial du tore, en appliquant le théorème d'Ampère sur un cercle de rayon  $r$  et d'axe  $(Oz)$ , déterminer, en fonction de  $r$ , l'expression du champ magnétique  $\vec{B}$  créé par les bobines toroïdales. On distinguera l'intérieur de l'extérieur du tore.

3 - Donner l'allure de la courbe représentant  $B(r)$  dans le plan équatorial.

### Exercice 4

1 - Tout plan  $O, \vec{e}_r, \vec{e}_z$  est plan de symétrie pour la distribution des courants. On en déduit que  $\vec{B}$  est perpendiculaire à ce plan

$$\vec{B} = B(r, \theta, z) \vec{e}_\theta$$

De plus, l'invariance de la distribution des courants selon  $\theta$  permet de conclure que

$$\vec{B} = B(r, \theta, z) \vec{e}_\theta = B(r, z) \vec{e}_\theta$$

2 - Pour  $R_i < r < R_e$ , le cercle de rayon  $r$  enlace les  $N$  spires parcourues par un courant  $I$  de façon directe, le théorème d'Ampère permet donc d'écrire

$$2\pi r B = \mu_0 N I$$

soit

$$B(r) = \frac{\mu_0 n I}{2\pi r}$$

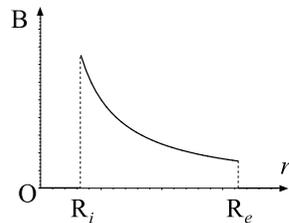
Pour  $r < R_i$ , le cercle de rayon  $r$  n'enlace aucune spire et pour  $r > R_e$ , il y a autant de d'intensité qui traverse le disque de rayon  $r$  dans un sens que dans l'autre. Ainsi, le théorème d'Ampère donne dans ces deux cas

$$\text{Pour } r > R_e \text{ et } r < R_i, B = 0$$

d'où

$$B(r) = \frac{\mu_0 n I}{2\pi r} \text{ si } R_e < r < R_i \text{ et } B(r) = 0 \text{ sinon.}$$

3 - Allure de  $B(r)$



### Exercice 5

Dans toute cette partie, on se place dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires.

En faisant abstraction des spires manquant dans la partie centrale, on considère deux solénoïdes (1) et (2) identiques, de rayon  $A$ , de grande dimension selon leur axe, disposés de sorte que leurs axes respectifs ( $x'x$ ) et ( $y'y$ ) soient perpendiculaires et concourant au point  $O$  (figure ??). Ils comportent  $n$  spires par mètre et sont parcourus par les courants respectifs  $i_1(t) = I_M \cos(\omega_0 t)$  et  $i_2(t) = I_M \cos(\omega_0 t + \alpha)$  où  $\omega_0$  est une pulsation constante. Le sens de parcours des courants

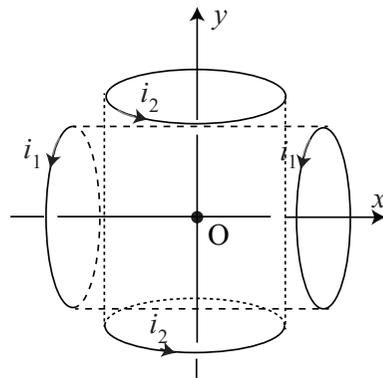


FIGURE 1 - Moteur asynchrone

est indiqué sur la figure ??.

On rappelle :  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ .

1 - On admet que l'intensité du champ magnétique créée par un solénoïde infini est donné par  $B = \mu_0 n i$ . Pour une association de deux solénoïdes (1) et (2) décrite ci-dessus figure ??, exprimer le champ magnétique  $\vec{B}(O, t)$  créé en  $O$  dans les cas où  $\alpha = \pi/2$  et  $\alpha = -\pi/2$ .

2 - Pourquoi peut-on qualifier ce champ magnétique de « champ tournant » ?

3 - Chaque solénoïde est constitué d'un enroulement de 4 rangées de spires jointives. On donne  $a = 0,25 \text{ mm}$  le rayon du fil de cuivre utilisé, et  $I_M = 1 \text{ A}$ . Calculer la norme du champ magnétique créé en  $O$ . Commenter.

### Exercice 5

1 - D'après le principe de superposition, on obtient le champ magnétique suivant pour  $\alpha = \pi/2$  :

$$\vec{B}(0, t) = \mu n I_M (\cos \omega_0 t \vec{e}_x + \sin \omega_0 t \vec{e}_y)$$

On obtient donc un champ magnétique tournant dans le sens trigonométrique.

Pour  $\alpha = -\pi/2$ , le champ est

$$\vec{B}(0, t) = \mu n I_M (\cos \omega_0 t \vec{e}_x - \sin \omega_0 t \vec{e}_y)$$

il s'agit d'un champ tournant dans le sens horaire.

2 - On peut utiliser un condensateur d'impédance  $Z_C = 1/jC\omega$ .

3 - Le nombre de spires par unité de longueur est

$$n = \frac{4}{a} = 16e3 \text{ m}^{-1}$$

On obtient alors un champ de

$$B = \mu_0 n I = 20 \text{ mT}$$

Il s'agit d'une valeur commune obtenue dans une bobine sans noyau.

## Pour performer

### Exercice 6

D'après CCP 17

On utilise un solénoïde épais (épaisseur  $e = R_2 - R_1$ ) considéré comme la superposition de solénoïdes infinis (en réalité de longueur  $L \gg R_2$ ) de même axe  $Oz$ . Il est réalisé par un empilement jointif de spires de section carrée, de côté  $a = 1,0$  mm enroulées sur un cylindre de longueur  $L = 4,0$  m, depuis un rayon  $R_1 = 20$  cm jusqu'à un rayon  $R_2 = 25$  cm. Les spires sont des fils de cuivre parcourus par un courant continu  $I$  uniformément réparti, orienté dans le sens direct autour de  $Oz$ . La situation est schématisée sur la figure suivante. Les sections carrées sont dans les plans  $(\vec{e}_r, \vec{e}_z)$  c'est-à-dire en positionnement radial.

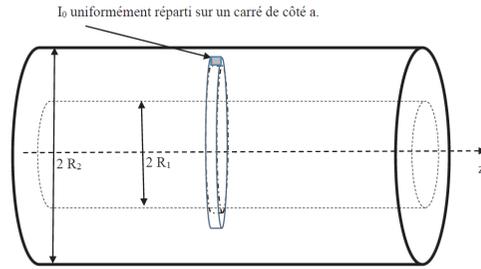


FIGURE 2 – Solénoïde épais

1 - Calculer le vecteur densité volumique de courant pour  $R_2 > r > R_1$ .  
 2 - Établir que l'expression du champ sur l'axe vaut  $B = \mu_0 I (R_2 - R_1) / a^2$ .  
 3 - Quelle est l'intensité nécessaire pour engendrer un champ de 1 Tesla ?

Données :  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  H.m<sup>-1</sup>

### Exercice 6

1 - Le courant  $I$  est uniformément réparti sur une surface  $a^2$ , on peut donc définir un vecteur densité de courant :

$$\vec{j} = \frac{I}{a^2}$$

La dénomination du programme est « densité de courant ». La présence du terme volumique peut induire en erreur...

2 - Tout plan perpendiculaire à  $Oz$  est un plan de symétrie pour le courant, donc d'antisymétrie pour  $\vec{B}$ . On en déduit que

$$\vec{B}(M) = B(M) \vec{e}_z$$

Le courant étant invariant par translation selon  $Oz$  et rotation selon  $\theta$ , on en déduit que

$$\vec{B}(M) = B(r) \vec{e}_z$$

Appliquons le théorème d'Ampère selon un contour CDEF passant par l'axe.

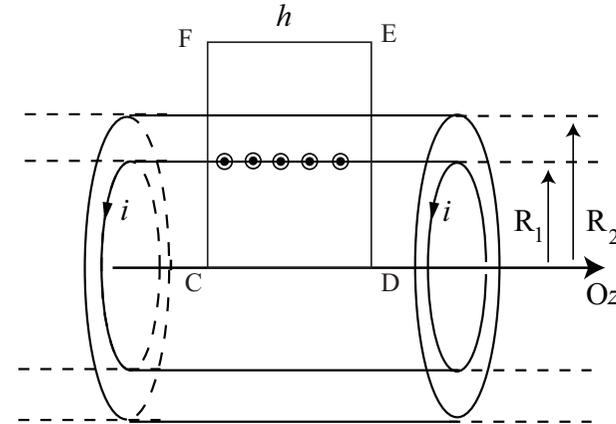


FIGURE 3 – Contour d'Ampère

D'après le théorème d'Ampère, en l'absence de courant enlacé, on en déduit que

$$\oint_{CDEF} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 j \times (R_2 - R_1) \times h$$

Avec un champ nul à l'extérieur, on en déduit que :

$$\oint_{CDEF} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B(r) \times h = \mu_0 j \times (R_2 - R_1) \times h$$

En remplaçant l'expression du courant volumique, il vient :

$$B(r=0) = \mu_0 \frac{I}{a^2} \times (R_2 - R_1)$$

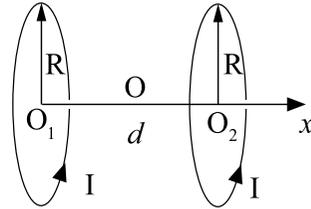
3 - En utilisant les données de l'énoncé on obtient :

$$I = \frac{Ba^2}{\mu_0(R_2 - R_1)} = 16 \text{ A}$$

Pour une section aussi faible... ça risque de chauffer un peu...

### Exercice 7

Soient deux bobines plates identiques, circulaires de rayon  $R$ , et parcourues par un courant  $I$ . Ces deux bobines sont placées dans deux plans parallèles. Leur axe commun est  $O_1O_2$ , en notant  $O_1$  le centre d'une bobine et  $O_2$  le centre de l'autre. Soit  $O$  le point situé au milieu des deux points  $O_1$  et  $O_2$ . La distance entre les centres des deux bobines est  $d$ .



Soit  $x$  l'abscisse d'un point  $M$  de l'axe  $Ox$ . Nous nous proposons de montrer que, pour une distance  $d = R$ , le champ magnétique est « quasi-uniforme » sur l'axe au voisinage du point  $O$ .

1 - Montrer que l'expression du champ magnétique au point  $M$  peut se mettre sous la forme :

$$B(x) = f(d/2 + x) + f(d/2 - x)$$

où  $f$  est une fonction que l'on précisera.

2 - En effectuant un développement limité de  $B(x)$  au voisinage de zéro, montrer que pour  $d = R$ , le champ magnétique peut se mettre sous la forme :

$$B(x) = 2f(d/2) + o(x^3)$$

où  $o(x^3)$  représente une fonction de  $x$  négligeable devant les termes du troisième ordre lors du développement de  $f(x)$ .

3 - Représenter l'allure de  $B(x)$ .

### Exercice 7

1 - Le champ créé par une bobine de centre  $O$ , de rayon  $R$  sur un point  $M$  son axe s'écrit sous la forme

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + X^2)^{3/2}} \vec{e}_x \text{ où } X \text{ est l'abscisse du point } M$$

Notons  $X_1$  l'abscisse d'un point  $M$  par rapport à  $O_1$  et  $X_2$ , celle du même point par rapport à  $O_2$ . Effectuons une translation d'origine pour la formule

du champ créé par une bobine :  $X_1 = x + d/2$  et  $X_2 = x - d/2$ , il vient, suivant  $\vec{e}_z$  :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + (x + d/2)^2)^{3/2}} \vec{e}_x + \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + (x - d/2)^2)^{3/2}} \vec{e}_x$$

soit  $B(x) = f(d/2 + x) + f(d/2 - x)$ , avec  $f(x) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$

2 - Développons la fonction  $f(x + d/2)$  au voisinage de 0, il vient  $f(x + d/2) =$

$$f(d/2) + (x - d/2)f'(d/2) + \frac{(x - d/2)^2}{2} f''(d/2) + \frac{(x - d/2)^3}{6} f'''(d/2) + o(x^3)$$

L'obtention de  $f'$  et  $f''$  par un logiciel de calcul formel permet d'établir la formule suivante :

$$f(x + d/2) = \frac{\mu_0 I}{2} \left( \frac{8}{R^5 3/2} - x \frac{48}{R^2 5^5/2} + x^3 \frac{1280}{a^4 5^9/2} \right) + o(x)^3$$

On en déduit que

$$f(x - d/2) = \frac{\mu_0 I}{2} \left( \frac{8}{R^5 3/2} + x \frac{48}{R^2 5^5/2} - x^3 \frac{1280}{a^4 5^9/2} \right) + o(x)^3$$

d'où

$$B(x) = f(d/2 + x) + f(d/2 - x) = \mu_0 I \frac{8}{R^5 3/2} + o(x^3)$$