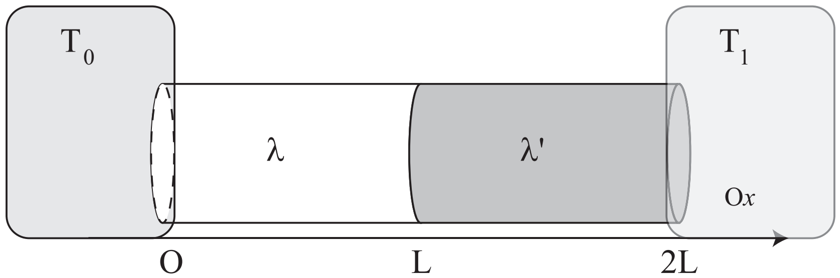
TD 11 : Diffustion thermique

Les indispensables

Exercice 1 *D'après Oral CCP 15*

On considère deux thermostats de température T_0 et T_1 reliés par deux barres de même longueur L et de même section S mais de conductivité différente λ et λ'.



1 - Démontrer l'expression de la résistance équivalente de chaque barre notée R_{th} et R'_{th}.
2 - En déduire le flux d'énergie traversant les barres en fonction de T_0, T_1, L, S, λ et λ'.
3 - Déterminer la température de la jonction $T(x = L)$.

Exercice 1

1 - Les barres peuvent être assimilées à des résistance de valeurs :

$$\boxed{R_{th} = \frac{L}{\lambda S} \quad \text{et} \quad R'_{th} = \frac{L}{\lambda' S}}$$

2 - L'association des barres est en série, on peut donc assimiler l'ensemble à une résistance $R_{th} + R'_{th}$. On en déduit que

$$\Phi = \frac{T_0 - T_1}{R_{th} + R'_{th}}$$

d'où

$$\boxed{\Phi = \frac{S\lambda\lambda'}{L(\lambda + \lambda')}(T_0 - T_1)}$$

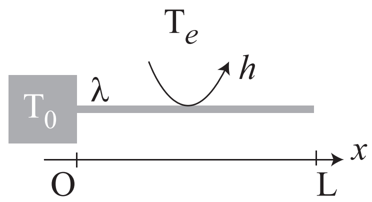
3 - La température à la jonction peut étre obtenue par la méthode du pont diviseur :

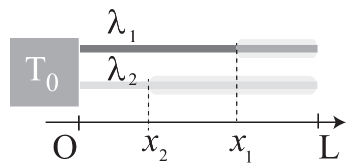
$$T(x = L) - T_1 = \frac{R'_{th}}{R'_{th} + R_{th}}(T_0 - T_1)$$

soit

$$\boxed{T(x = L) = T_1 + \frac{\lambda}{\lambda + \lambda'}(T_0 - T_1)}$$

Exercice 2 *D'après Oral CCP 12*





On considère un cylindre plein en cuivre, à base circulaire de rayon R = 1 cm, de longueur L, de conductivité thermique λ_1. On le met en contact par une de ses extrémités $x = 0$ avec de l'eau bouillante de température $T_0 = 373$K. La température extérieure est $T_{ext} = 293$ K.
On suppose que la température est uniforme sur une section du cylindre. On note h le coefficient conducto-convectif. On supposera que le régime stationnaire s'établit instantanément.
1 - Établir l'équation différentielle vérifiée par $T(x)$.
2 - On pose $H = \sqrt{R\lambda/2h}$. À quelle condition peut on supposer les cylindres quasi-infini.
3 - En se plaçant dans cette condition, déterminer $T(x)$.
4 - Représenter l'allure de la température. On fera apparaître les grandeurs pertinentes.
On place comme précédemment deux cylindres de même géométrie, mais constitués par deux métaux différents de conductivités thermiques λ_1 et λ_2. Les deux tubes sont recouverts d'une fine couche de paraffine dont la température de fusion vaut $T_F = 333$ K. En régime permanent, la paraffine fond à $x_1 = 15{,}6$ cm pour le cylindre (1) et $x_2 = 6{,}4$ cm pour

(2).
5 - Déterminer puis calculer la valeur de h.
6 - En déduire la conductivité du second matériau λ_2.
Données : conductivité thermique du cuivre $\lambda_1 = 390$ W.m^{-1}.K^{-1}.

Exercice 2

1 - On suppose que la longueur L est très supérieure à R pour pouvoir définir une température uniforme sur la section du cylindre.
2 - Une tranche d'épaisseur dx reçoit par conduction une énergie $\delta Q_e = j(x)\pi R^2 dt$ et perd par conduction $\delta Q_s = j(x+dx)\pi R^2 dt$ et par convection $\delta Q_{conv} = h 2\pi R dx (T(x) - T_e)dt$. Le premier principe en régime permanent donne donc :

$$dH = 0 = \delta Q_e - \delta Q_s - \delta Q_{conv}$$

d'où $\qquad 0 = j(x)\pi R^2 dt - j(x+dx)\pi R^2 dt - h 2\pi R dx (T(x) - T_e)dt$

En divisant par $\pi R dt dx$, il vient

d'où $0 = -R\dfrac{j(x+dx) - j(x)}{dx} - 2h(T(x) - T_e)$ soit $0 = -R\dfrac{dj(x)}{dx} - 2h(T(x) - T_e)$

En utilisant la loi de Fourier, $j(x) = -\lambda \dfrac{dT}{dx}$, on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{2h}{R\lambda}T(x) = -\frac{2h}{R\lambda}T_e$$

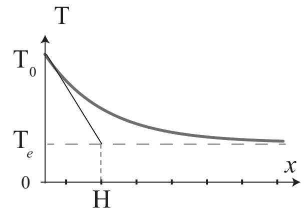
3 - La solution de l'équation différentielle sans second membre est $T(x) = Ae^{x/H} + Be^{-x/H}$ avec $H = \sqrt{R\lambda/2h}$. Une solution particulière est $T(x) = T_e$, les solutions de l'équation différentielles sont donc de la forme :

$$T(x) = Ae^{x/H} + Be^{-x/H} + T_e$$

Le terme $Ae^{x/H}$ est forcément nul puisque pour une barre infiniment longue, la fonction $T(x)$ reste finie. Avec la condition $T(0) = T_0$, on en déduit que :

$$T_0 = B + T_e \quad \text{soit} \quad B = T_0 - T_e$$

d'où $$\boxed{T(x) = T_e + (T_0 - T_e)e^{-x/H}}$$



4 - La courbe attendue est ci-contre.
5 - La paraffine fond en x_1 et x_2 donc la température en ces points vaut T_F. On en déduit que :

$$T(x_1) = T_F = T_e + (T_0 - T_e)e^{-x_1/H_1} \quad \text{et} \quad T(x_2) = T_F = T_e + ($$

avec $H_1 = \sqrt{R\lambda_1/2h}$ et $H_2 = \sqrt{R\lambda_2/2h}$
On en déduit que :

$$\ln\frac{T_F - T_e}{T_0 - T_e} = -\frac{x_1}{H_1} \quad \text{et} \quad T(x_2) = T_F = T_e + (T_0 - T_e)e^{-x_2/H}$$

De la première équation, on en déduit que :

$$h = \frac{\lambda_1 R}{2x_1^2}\left(\ln\frac{T_F - T_e}{T_0 - T_e}\right)^2 = 38 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$$

6 - De la seconde équation, on en déduit que :

$$\lambda_2 = -\frac{2hx_2^2}{R\left(\ln\dfrac{T_F - T_e}{T_0 - T_e}\right)^2} = 65 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

Pour s'entraîner

Exercice 3 *D'après Oral CCinP 2020*

Pour patiner sur un lac gelé, il faut que l'épaisseur de glace soit d'au moins 10 cm. On considère un lac dont l'eau est à la température $T_F = 273$ K dans une atmosphère à la température $T_0 = 268$ K. On notera e l'épaisseur de glace formée.
1 - Déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'épaisseur de glace $e(t)$.
2 - En déduire le temps nécessaire pour que l'épaisseur de glace soit suffisante pour patiner.
Données :

- enthalpie de fusion de de l'eau $\Delta h_{fus} = 330\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$.
- capacité thermique massique de l'eau liquide $c_\mathrm{L} = 4{,}18\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$;
- capacité thermique massique de l'eau glace $c_\mathrm{G} = 2{,}1\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$;
- Conductivité thermique de la glace : $\lambda = 2{,}1\,\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$
- Masse volumique de la glace : $\rho_g = 910\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$

Exercice 3

En modélisant une résistance thermique de la glace sur une surface S du lac, on obtient :

$$\mathrm{R} = \frac{e}{\lambda \mathrm{S}}$$

En appliquant le premier principe à une épaisseur de d'eau du lac non encore gelée on obtient :

$$\rho_\mathrm{G} \mathrm{S} \mathrm{d}e \Delta h_{fus} = \frac{\mathrm{T_F} - \mathrm{T_0}}{\mathrm{R}} \mathrm{d}t = \lambda \mathrm{S} \frac{\mathrm{T_F} - \mathrm{T_0}}{e} \mathrm{d}t$$

On obtient donc :

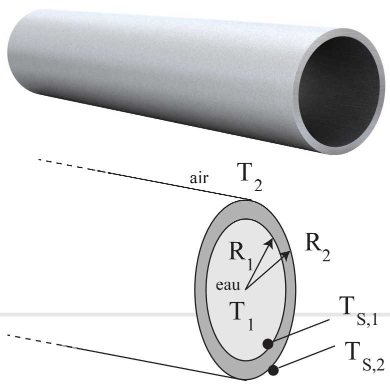
$$e \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \frac{\lambda}{\rho \Delta h_{fus}} (\mathrm{T_F} - \mathrm{T_0})$$

L'intégration donne :

$$\tau = \frac{e^2}{2} \frac{\rho \Delta h_{fus}}{\lambda(\mathrm{T_F} - \mathrm{T_0})} = 150 \cdot 10^3\,\mathrm{s} = 42\,\mathrm{h}$$

Exercice 4 *D'après CCP 14*

On considère un tuyau de cuivre de longueur L, de rayon intérieur $\mathrm{R_1} = 11$ mm et de rayon extérieur $\mathrm{R_2} = 12$ mm. De l'eau à la température $\mathrm{T_1} = 330$ K occupe l'intérieur de ce tube, placé à l'air libre de température $\mathrm{T_2} = 290$ K. On note $\mathrm{T_{S1}}$ la température du tube sur sa surface intérieure et $\mathrm{T_{S2}}$ celle sur sa surface extérieure et on considère que la température au sein du matériau ne dépend que de la distance r par rapport à l'axe du tube. On néglige les effets de bord (comme si le tube était infiniment long selon l'axe des z) et on raisonne sur une longueur L = 10 m de ce tube. On cherche à déterminer la puissance perdue en régime permanent.



1 - Rappeler l'expression de la loi de Fourier.

2 - Relier la puissance thermique Φ_{th} au vecteur densité de puissance $\vec{j}_{th}$. Que peut-on dire, en régime permanent, de la puissance thermique traversant les surfaces latérales $2\pi\mathrm{R_1}\mathrm{L}$ et $2\pi\mathrm{R_2}\mathrm{L}$? Justifier.

3 - Relier la puissance thermique Φ_{th} à la température $\mathrm{T}(r)$. Montrer que la loi d'évolution de la température $\mathrm{T}(r)$ au sein du matériau de conductivité thermique λ s'écrit :

$$\mathrm{T}(r) = \mathrm{T_{S1}} - \frac{\Phi_{th}}{2\pi \mathrm{L} \lambda} \ln \frac{r}{\mathrm{R_1}}$$

4 - En déduire la relation entre la puissance thermique Φ_{th} transférée de l'intérieur vers l'extérieur du tube et la différence de température $\mathrm{T_{S1}}$ et $\mathrm{T_{S2}}$.

5 - Définir et calculer l'expression de la résistance thermique $\mathrm{R}_{\mathrm{T}h}$ du tube de cuivre de conductivité thermique $\lambda = 370$ W.m^{-1}.K^{-1}.

6 - Rappeler l'expression de la loi de Newton, on notera $h_{\mathrm{C1}} = 300$ W.K^{-1}.m^{-2} (respectivement $h_{\mathrm{C2}} = 5$ W.K^{-1}.m^{-2}) le coefficient de transfert convectif relatif au fluide de température $\mathrm{T_1}$ (respectivement $\mathrm{T_2}$).

7 - Exprimer et calculer les résistances thermiques équivalentes à la convection $\mathrm{R_{S1}}$ et $\mathrm{R_{S2}}$.

8 - Effectuer un schéma électrique équivalent et en déduire la relation entre Φ_{th} et $\mathrm{T_1} - \mathrm{T_2}$.

9 - Calculer la puissance perdue par l'eau lors de son acheminement dans le tube. Commenter.

Exercice 4

1 - La loi de Fourier relie la densité de flux thermique $\vec{j}$ à la conductivité thermique λ et la température T :

$$j = -\lambda \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{T}$$

2 - Par définition :

$$\Phi_{th} = \iint_S \vec{j}_{th}.d\vec{S}$$

En régime permanent la puissance thermique à travers chacune des ces parois est identique. D'après le premier principe en régime permanent :

$$dH = 0 = \Phi_e dt - \Phi_S dt$$

3 - Par définition du flux thermique :

$$\Phi_{th} = j(r) \times 2\pi r L = -\lambda \frac{dT}{dr} \times 2\pi r L$$

d'où
$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\Phi_{th}}{2\pi L \lambda r}$$

Ainsi,
$$\boxed{T(r) = T_{S1} - \frac{\Phi_{th}}{2\pi L\lambda} \ln \frac{r}{R_1}}$$

4 - De l'expression précédente, on déduit que :

$$T(R_2) = T_{S2} = T_{S1} - \frac{\Phi_{th}}{2\pi L\lambda} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

soit
$$\boxed{\Phi_{th} = (T_{S1} - T_{S2}) \times \frac{2\pi L\lambda}{\ln \frac{R_2}{R_1}}}$$

5 - Par définition de la résistance thermique :

$$\boxed{R_{th} = \frac{\ln \frac{R_2}{R_1}}{2\pi L\lambda}}$$

A.N. :
$$\boxed{R_{th} = 3{,}74.10^{-6}\ \mathrm{K.W^{-1}}}$$

6 - D'après la loi de Newton :

$$\vec{j} = h(T_{paroi} - T_{fluide})\vec{u}_{paroi \to fluide}$$

7 - En appliquant cette formule au cylindre, on obtient :

$$\Phi_{th} = h_{C1}(T_1 - T_{S1}) \times 2\pi R_1 L \quad \text{et} \quad \Phi_{th} = h_{C2}(T_{S2} - T_2) \times 2\pi R_2 L$$

La résistance équivalente à ce transfert est donc :

$$R_{C1} = \frac{(T_1 - T_{S1})}{\Phi_{th}} \quad \text{et} \quad R_{C2} = \frac{T_{S2} - T_2}{\Phi_{th}}$$

$$\boxed{R_{S1} = \frac{1}{2\pi L R_1 h_{c1}} \quad \text{et} \quad R_{S2} = \frac{1}{2\pi L R_2 h_{c2}}}$$

$$\boxed{R_{S1} = 4{,}82.10^{-3}\ \mathrm{K.W^{-1}} \quad \text{et} \quad R_{S2} = 265.10^{-3}\ \mathrm{K.W^{-1}}}$$

8 - En modélisant le système précédent par 3 résistances série, on obtient :

$$\boxed{R_{CC} = \frac{1}{2\pi L}\left[\frac{1}{R_1 h_{c1}} + \frac{\ln(R_2/R_1)}{\lambda} + \frac{1}{R_2 h_{c2}}\right] \approx R_{S2}}$$

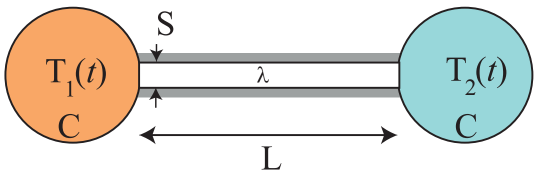
9 - La puissance perdue par l'eau est donnée par :

$$\Phi = \frac{T_2 - T_1}{R_{CC}} = 148\ \mathrm{W}$$

Cela représente 10% de la puissance du chauffe-eau, une isolation thermique du tuyau serait bienvenue.

Exercice 5 *D'après Oral CCP 19*

Deux sphères de capacité thermiques C sont reliés par un barreau métallique de conductivité thermique λ, de longueur L et de section S. On considérera que les parois latérales du barreau sont calorifugées. On note T_C la température de la sphère de gauche à l'état initial : $T_1(t=0) = T_C$, de même on note $T_F = T_2(t=0)$, avec $T_C > T_F$.



On suppose que le régime stationnaire est atteint à l'intérieur du barreau à chaque instant.

1 - Déterminer une équation différentielle liant par $T_1(t)$ et $T_2(t)$.

2 - Montrer que $T_1(t) + T_2(t) = T_C + T_F$.

3 - En déduire une équation différentielle uniquement sur $T_1(t)$ en faisant apparaître son temps caractéristique d'évolution et la résoudre.
4 - On note ρ et c_p la masse volumique et la capacité thermique massique du métal. Définir une inégalité liant ρ, c_p, C, L, S, permettant de supposer que le régime permanent dans le barreau est atteint à chaque instant.

Exercice 5

1 - En supposant que la barre isolée est en régime stationnaire, il est possible de définir une résistance thermique :

$$\mathrm{R} = \frac{e}{\lambda \mathrm{S}} = \frac{\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2}{\Phi}$$

Appliquons le premier principe à la sphère de température $\mathrm{T}_1(t)$ entre t et $t+\mathrm{d}t$. Elle perd une énergie $\delta\mathrm{Q}$ donnée par :

$$\mathrm{dU}_1 = -\delta\mathrm{Q} + \delta\mathrm{W} = -\Phi\mathrm{d}t + 0$$

Le travail est nul en supposant que la sphère est indéformable.
On en déduit avec $\mathrm{dU}_1 = \mathrm{CdT}_1$ que :

$$\frac{\mathrm{dT}_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2}{\mathrm{R}} \quad \text{soit} \quad \frac{\mathrm{dT}_1}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\mathrm{RC}}\mathrm{T}_1 = \frac{1}{\mathrm{RC}}\mathrm{T}_2$$

2 - En Appliquant le premier principe aux deux sphères entre t et $t+\mathrm{d}t$, on obtient, comme l'ensemble n'échange pas d'énergie avec l'extérieur :

$$\mathrm{dU}_{tot} = 0 \quad \text{soit} \quad \mathrm{CdT}_1 + \mathrm{CdT}_2 = 0$$

Par intégration entre $t = 0$ et t, on obtient aisément que :

$$\mathrm{T}_1(t) + \mathrm{T}_2(t) = \mathrm{T_C} + \mathrm{T_F}$$

3 - En injectant T_2 dans l'équation différentielle, on trouve :

$$\frac{\mathrm{dT}_1}{\mathrm{d}t} + \frac{2}{\mathrm{RC}}\mathrm{T}_1 = \frac{\mathrm{T_C} + \mathrm{T_F}}{\mathrm{RC}}$$

On obtient alors la solution de la forme :

$$\mathrm{T}_1(t) = \frac{\mathrm{T_C} + \mathrm{T_F}}{2} + \frac{\mathrm{T_C} - \mathrm{T_F}}{2} e^{-2t/\mathrm{RC}}$$

4 - La diffusivité thermique dans la barre est définie par :

$$\mathrm{D}_{\mathrm{T}h} = \frac{\lambda}{\rho c_\mathrm{P}}$$

Soit τ le temps caractéristique d'établissement du régime stationnaire dans la barre de taille L alors :

$$\mathrm{D}_{\mathrm{T}h} = \frac{\mathrm{L}^2}{\tau}$$

Pour que le régime stationnaire soit atteint dans la barre, il faut que :

$$\tau \ll \mathrm{RC}/2 \quad \text{soit} \quad 2\mathrm{L}\rho\mathrm{S}c_\mathrm{P} \ll \mathrm{C}$$

On en conclut que la capacité thermique de la barre doit être négligeable devant celle des sphères.

Pour performer

Exercice 6 *D'après Oral CCP MP 21*

De l'eau à la température $\mathrm{T}_0 = 273\,\mathrm{K}$ s'écoule dans un tuyau en PVC de conductivité thermique $\lambda = 0{,}1\,\mathrm{W\cdot K^{-1}\cdot m^{-1}}$ de rayon $\mathrm{R} = 7{,}0\,\mathrm{cm}$ et d'épaisseur $e = 2\,\mathrm{mm}$. La face externe du tuyau est au contact d'un thermostat à la température $\mathrm{T}_{ext} = 263\,\mathrm{K}$. On observe la formation d'une couche a de glace (de conductivité $\lambda_0 = 2\,\mathrm{W\cdot K^{-1}\cdot m^{-1}}$) à l'intérieur du tuyau.

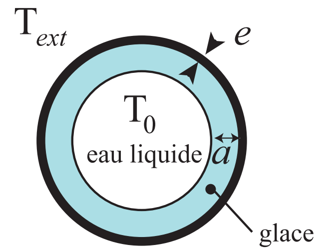


FIGURE 1 – Prisme

1 - Définir et calculer la résistance thermique du tuyau et de la glace.
2 - Sous réserve que l'épaisseur de glace reste faible devant R, montrer que la formation de la glace suit la loi :

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}a = \frac{\mathrm{A}}{\tau}$$

3 - Il n'y a pas de glace à l'instant initial. Calculer le temps au bout duquel $a = 1\,\mathrm{mm}$

Exercice 6

1 - Dans l'approximation de la géométrie plane :

$$\mathrm{R}_{tube} \approx \frac{e}{\lambda 2\pi \mathrm{RL}}$$

Pour la glace, on peut intégrer le flux pour écrire, sous réserve que $a << \mathrm{R}$:

$$\mathrm{R}_{glace} = \frac{\ln(\mathrm{R}/(\mathrm{R}-a)}{\lambda 2\pi \mathrm{L}} \approx \frac{a}{2\pi\lambda_0 \mathrm{RL}}$$

2 - Appliquons le premier principe isobare à l'eau circulant dans le tuyau. Si une couche de glace est déjà formée, l'énergie traverse la couche de glace puis le tuyau de sorte que :

$$\mathrm{dH} = -\delta \mathrm{Q} = \frac{\mathrm{T}_0 - \mathrm{T}_{ext}}{\mathrm{R}_{tube} + \mathrm{R}_{glace}} \mathrm{d}t$$

L'eau change d'état, notons dm la masse changent d'état, il vient :

$$\mathrm{d}m \times \Delta h_{fus} = \frac{\mathrm{T}_0 - \mathrm{T}_{ext}}{\mathrm{R}_{tube} + \mathrm{R}_{glace}} \mathrm{d}t$$

Pour un tuyah=ut de longueur L, la masse de glace est définie par :

$$m = \rho \times (\pi \mathrm{R}^2 - \pi(\mathrm{R}-a)^2)$$

de sorte que :

$$\mathrm{d}m = 2\pi \mathrm{L}\rho(\mathrm{R}-a)\mathrm{d}a$$

Après simplification par L, on en déduit que :

$$2\pi\rho(\mathrm{R}-a)\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} \times \Delta h_{fus} = \frac{\mathrm{T}_0 - \mathrm{T}_{ext}}{\frac{e}{\lambda 2\pi \mathrm{RL}} + \frac{a}{2\pi\lambda_0 \mathrm{RL}}}$$

$$2\pi\rho(\mathrm{R}-a)\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} \times \Delta h_{fus}\Big(\frac{e}{\lambda 2\pi \mathrm{RL}} + \frac{a}{2\pi\lambda_0 \mathrm{RL}}\Big) = \mathrm{T}_0 - \mathrm{T}_{ext}$$

Dans l'approximation d'une couche de glace fine ($\mathrm{R}-a \approx \mathrm{R}$), l'équation ci-dessus s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{T}_0 - \mathrm{T}_{ext}}{2\pi \mathrm{R}\rho\Delta h_{fus}} \frac{1}{\frac{e}{\lambda 2\pi \mathrm{RL}} + \frac{a}{2\pi\lambda_0 \mathrm{RL}}}$$

Comme la conductivité de la glace est grande devant celle du tube, avec $a \leqslant e$, il vient :

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{T}_0 - \mathrm{T}_{ext}}{2\pi \mathrm{R}\rho\Delta h_{fus}} \frac{1}{\frac{e}{\lambda 2\pi \mathrm{RL}}(1 + \frac{\lambda a}{\lambda_0 e})} \approx \frac{\mathrm{T}_0 - \mathrm{T}_{ext}}{2\pi \mathrm{R}\rho\Delta h_{fus}} \frac{1}{\frac{e}{\lambda 2\pi \mathrm{RL}}}(1 - \frac{\lambda a}{\lambda_0 e})$$

On obtient donc :

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} + \underbrace{\frac{\mathrm{T}_0 - \mathrm{T}_{ext}}{\frac{e\rho\Delta h_{fus}}{\lambda \mathrm{RL}}} \frac{\lambda}{\lambda_0 e}}_{1/\tau} a = \frac{\mathrm{T}_0 - \mathrm{T}_{ext}}{\frac{e\rho\Delta h_{fus}}{\lambda \mathrm{RL}}} = \frac{\mathrm{A}}{\tau}$$

3 - La résolution de cette équation donne :

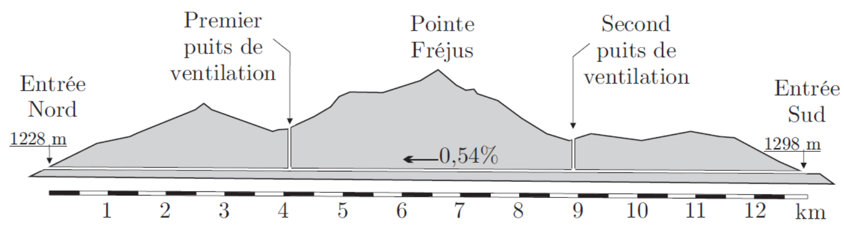
$$a(t) = \mathrm{A}(1 - e^{-t/\tau})$$

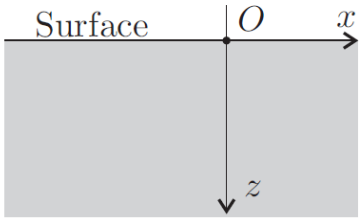
On en déduit que :

$$t = \tau \ln \frac{\mathrm{A}-a}{\mathrm{A}}$$

Exercice 7 *D'après Mines PC 16*

Le tunnel routier du Fréjus relie la vallée de l'Arc, en France, au val de Suse, en Italie. Long d'environ 13 km, le tunnel passe sous le col du Fréjus dans les Alpes cottiennes. La pointe Fréjus culmine à une altitude de 2934 m.





Tunnel de Frejus, modélisation du sol

La roche environnante dans le tunnel a une température constante tout au long de l'année d'environ 30°C. Dans un premier temps nous étudierons les évolutions saisonnières de la température dans le sol. Puis nous tenterons d'expliquer cette température élevée par un modèle géophysique.
On se place au sommet de la pointe Fréjus à une altitude de 2934 m. On assimile la roche à un milieu semi-infini de conductivité thermique λ, de masse volumique ρ_S et de capacité thermique massique c_s. Sa surface est plane et horizontale et est soumise à la variation de température extérieure

$$T(z=0,t) = T_0 + T_1 \cos(\omega t)$$

avec $T_0 = 283$ K et $\omega = 2.10^{-7}$ rad.s^{-1}.

1 - Calculer la moyenne temporelle de la température extérieure en $z = 0$. Déterminer l'expression de la température maximale et minimale. Proposer une valeur numérique pour T_1 pour les évolutions annuelles de température.

2 - Le flux thermique élémentaire, défini comme la quantité d'énergie traversant une surface élémentaire dS pendant dt est noté dϕ_Q. Rappeler la définition du vecteur $\vec{j}_Q$, densité de flux thermique. Quelle est sa dimension ?

3 - Rappeler la loi de Fourier, ainsi que ses conditions d'application.

4 - On étudie une tranche mésoscopique de sol comprise entre z et $z + dz$ de surface S. Quelle est l'énergie thermique totale δQ reçue par cette tranche entre t et $t + dt$?

5 - Établir l'expression de sa variation d'énergie interne dU en fonction de $\dfrac{\partial j_Q}{\partial z}$ et S puis en fonction de ρ_S, c_s, S et $\dfrac{\partial T}{\partial t}$.

6 - En déduire l'équation de la chaleur à une dimension

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

dans laquelle on précisera l'expression et la dimension du coefficient D de diffusion thermique.
On cherche des solutions de la forme $\underline{T}(z,t) = T_0 + T_1 e^{i(\omega t - \underline{k} z)}$ vérifiant la condition aux limites $T(z=0,t) = T_0 + T_1 \cos(\omega t)$.

7 - Exprimer $\dfrac{\partial \underline{T}}{\partial t}$, $\dfrac{\partial^2 \underline{T}}{\partial z^2}$ et $\dfrac{\partial \underline{T}}{\partial z}$, en déduire que si T est la forme proposée alors :

$$\underline{k}^2 = -i\frac{\omega}{D}$$

8 - Déterminer k' et k'' tels que $\underline{k} = k' + ik''$ avec $k' > 0$, on pourra s'aider du fait que $(-i) = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2$. Déterminer l'expression correspondante de la solution réelle $T(z,t)$.

9 - Calculer la profondeur z_e à partir de laquelle les oscillations annuelles de température ne s'écartent pas de T_0 de plus de 1%. Que peut-on dire de la température dans le tunnel routier de Fréjus ? Pour les roches granitiques constituant le Fréjus on donne $\rho_S = 2{,}65.10^3$ kg.m^{-3} $c_s = 8{,}50.10^3$ J.K^{-1}.kg^{-1} et $\lambda = 3{,}00$ si.

10 - Que peut-on dire des variations quotidiennes de la température à la profondeur z_e ? En terme de filtrage fréquentiel, comment se comporte le sol ?

Exercice 7

1 - D'après l'expression fournie :

$$\boxed{< T(z=0,t) >= T_0 = 273 \text{ K}}$$

La température maximale et minimale valent :

$$T_{max} = T_0 + T_1 \quad \text{et} \quad T_0 - T_1$$

Dans le cas d'une variation annuelle, on peut proposer

$$T_{min} = 273 \text{ K} \quad \text{et} \quad T_{max} = 293 \text{ K} \quad \text{soit} \quad T_1 = 10 \text{ K}$$

2 - Par définition, le vecteur densité de flux thermique vaut

$$\vec{j}_{\mathrm{Q}} = \frac{\mathrm{d}\phi_{\mathrm{Q}}}{\mathrm{dS}}\vec{u}$$

où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire perpendiculaire S.
j_{Q} est une puissance par unité de surface et s'exprime en $\mathrm{J.s^{-1}.m^{-2}.K^{-1}}$. $[\mathrm{J}] = [kg.m^2.s^{-2}]$, La dimension est donc :

$$\mathrm{M.T^{-3}}$$

3 - Pour un transport de chaleur sans transport de matière, la loi de Fourier s'exprime par :

$$\vec{j}_{\mathrm{Q}} = -\lambda \vec{\mathrm{grad}}\,\mathrm{T}$$

4 - Une tranche d'épaisseur dz reçoit une énergie $j(z)\mathrm{Sd}t$ et perd $j(z+dz)\mathrm{Sd}t$, l'énergie totale reçue est donnée par :

$$\delta\mathrm{Q} = j(z)\mathrm{Sd}t - j(z+\mathrm{d}z)\mathrm{Sd}t$$

5 - En appliquant le premier principe à une tranche pendant dt, on a en l'absence de travail sur une phase indilatable et incompressible :

$$\mathrm{dU} = \delta\mathrm{Q} = j(z)\mathrm{Sd}t - j(z+\mathrm{d}z)\mathrm{Sd}t = -\frac{\partial j_{\mathrm{Q}}}{\partial z}\mathrm{Sd}z\mathrm{d}t$$

Par définition,

$$\mathrm{dU} = \mathrm{C_V dT} = \rho_{\mathrm{S}} \times \mathrm{S}\mathrm{d}z \times c_{\mathrm{S}}(\mathrm{T}z,t+\mathrm{d}t) - \mathrm{T}(z,t) = \rho_{\mathrm{S}}\mathrm{Sd}zc_{\mathrm{S}}\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t} \times \mathrm{d}t$$

6 - En égalant les deux termes, grâce à la loi de Fourier, on obtient :

$$\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t} = \mathrm{D}\frac{\partial^2\mathrm{T}}{\partial z^2}$$

avec $\mathrm{D} = \lambda/\rho_s c_{\mathrm{S}}$
7 - Avec les notation proposées :

$$\frac{\partial\underline{\mathrm{T}}}{\partial t} = i\omega\underline{\mathrm{T}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial\underline{\mathrm{T}}}{\partial z} = -i\underline{k}\mathrm{T}$$

En injectant ces expressions dans l'équation de diffusion, on obtient :

$$i\omega\underline{\mathrm{T}} = \mathrm{D}(-i\underline{k})^2\underline{\mathrm{T}}$$

On en déduit que

$$\boxed{\underline{k}^2 = -i\tfrac{\omega}{\mathrm{D}}}$$

8 - Avec les notations proposées, on en déduit que

$$\underline{k} = \sqrt{\frac{\omega}{2\mathrm{D}}} - i\sqrt{\frac{\omega}{2\mathrm{D}}}$$

En prenant la valeur réelle de la température, il vient :

$$\mathrm{T}(z,t) = \mathrm{T_0} + \mathrm{T_1}e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\mathrm{D}}}z}\cos(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\mathrm{D}}}z)$$

9 - La température possède une enveloppe décroissante $e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\mathrm{D}}}z}$ de distance caractéristique $\mathrm{H} = \sqrt{\frac{2\mathrm{D}}{\omega}}$. L'amplitude des oscillations à 1% est donc pour $z_e \approx 5 \times \mathrm{H}$ (comme en élec : $\mathrm{H} \rightarrow 32\%$, $3\mathrm{H} \rightarrow 5\%$)
Effectuons les applications numériques :

- $\mathrm{D} = 1{,}33.10{-}7\ \mathrm{m^2.^{-1}}$
- $\mathrm{H} = 1{,}15$ m
- $z_e = 5 \times \mathrm{H} = 5{,}7$ m

10 - La distance caractéristique est d'autant plus petite que ω est grand. Les variations quotidiennes à z_e sont donc moins marquées, le sol se comporte comme un filtre passe-bas.