TD 09 dipole électrostatique

Les indispensables

Exercice 1 *D'après E3A 16*

On souhaite modéliser les interactions entre deux dipôles par le modèle suivant. On place un dipôle permanent de moment dipolaire $\vec{p}$ au centre O d'un repère.

1 - On se place dans l'approximation dipolaire. Rappeler l'hypothèse correspondante.

2 - Faire un schéma du dipôle placé orienté selon l'axe Oz et représenter le repère de coordonnées sphériques.

3 - Établir l'expression du potentiel électrique $V(r,\theta)$ créé par un dipôle.

4 - Comment se simplifie l'expression obtenue précédemment dans l'approximation dipolaire ?

5 - En déduire l'expression du champ électrique $\vec{E}$ créé en un point $M(r,\theta)$.

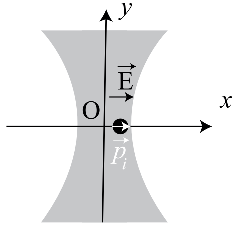
Lorsqu'un morceau de matière est soumis à un champ électrique $\vec{E}$, il se polarise et acquiert un moment dipolaire $\vec{p} = \alpha\vec{E}$, où α est la polarisabilité. Ce morceau de matière est soumis au champ $\vec{E}$ du dipôle permanent décrit précédemment.

6 - Justifier que l'énergie d'interaction dite « dipôle-dipôle induit »entre ces deux dipôles (l'un placé en O, l'autre en M) puisse se mettre sous la forme :

$$U = -\frac{C}{r^6}$$

7 - Cette expression dépend-elle de la direction des deux dipôles considérés ?

Exercice 2



Arthur Ashkin, prix Nobel 2018, est l'inventeur des pinces optiques à l'aide de faisceau laser focalisé. Considérons un faisceau laser dont l'amplitude du champ dans le plan de focalisation prend la forme gaussienne suivante : $\vec{E}(x) = E_0 e^{-x^2/w_0^2}\,\vec{e}_x$.

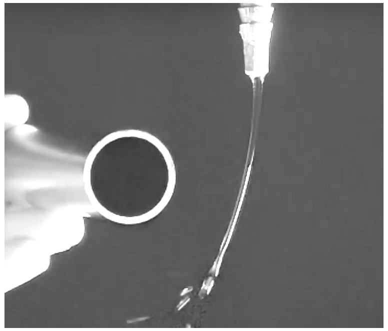
1 - Représenter l'allure du champ électrique $E(x)$.

2 - On introduit dans ce champ, une particule de polarisabilité α. Exprimer son moment dipolaire induit $\vec{p}_i$.

3 - On montre que l'énergie potentielle se met sous la forme (voir annexe ??) $E_p = -\frac{1}{2}\vec{p}_i\cdot\vec{E}$. Montrer qu'il apparaît, au voisinage de $x = 0$, une force de rappel de la forme $\vec{F} = -kx\vec{e}_x$, qui peut être utilisée pour piéger la particule au centre du faisceau laser. On écrira k en fonction des données du problème.

Pour s'entraîner

Exercice 3



Bien que partiellement juste, on effectue souvent l'expérience ci-contre comme preuve du caractère polaire de l'eau : un tube chargé par frottement est approché d'un mince filet d'eau. On affirme alors que ce dernier est dévié en raison du moment dipolaire de la molécule d'eau. En supposant que la charge linéïque du tube est de l'ordre de $\lambda = 1\,\mathrm{nC\cdot m^{-1}}$, déterminer l'ordre de grandeur associée à la force électrostatique exercée sur une molécule d'eau. Commenter la valeur obtenue en la comparant au poids d'une molécule.

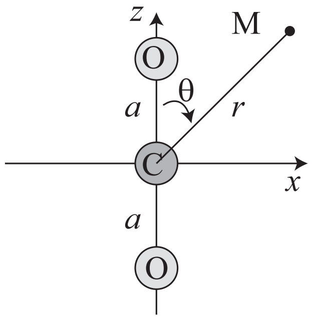
Données :

- moment dipolaire de l'eau $p = 1{,}83\,\mathrm{D} = 6{,}0\cdot10^{-30}\,\mathrm{C\cdot m}$
- masse molaire de l'eau : $M = 18\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$
- Nombre d'Avogadro : $\mathcal{N}a = 6{,}0\cdot10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$

- permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}9 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}}$.

Pour performer

Exercice 4



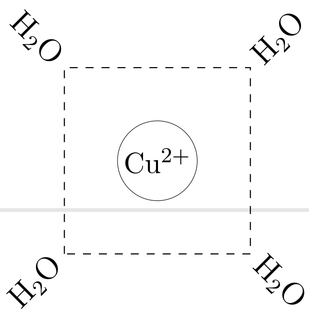
La molécule de CO_2 peut être représentée par le triplet de charges suivant tenant compte de l'électronégativité respective des différents atomes : $[\mathrm{O}(-q), \mathrm{C}(+2q), \mathrm{O}(-q)]$. On notera a la distance inter-atomique.
1 - Justifier les charges formelles de chaque atome.
2 - Déterminer le potentiel $\mathrm{V}(r,\theta)$ en un point M éloigné ($r \gg a$). Les développements limités seront effectués à l'ordre 2 au minimum.
3 - En déduire le champ (r,θ) en M.
4 - Sur le cercle de centre O et de rayon r, quels sont les points associés à $\mathrm{E}_r = 0$ ou $\mathrm{E}_\theta = 0$ (positions de Gauss) ? Préciser la valeur de E_θ ou E_r en ces points.
5 - Représenter ces points et le champ correspondant sur un schéma.
Données

- Electronégativité : $\chi(\mathrm{C}) = 2{,}55$, $\chi(\mathrm{O}) = 3{,}44$
- en coordonnées sphérique :

$$\vec{\mathrm{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

Exercice 5

Dans un modèle simplifié, l'ion cuivre Cu^{2+} est hydraté par quatre molécules d'eau, de moment dipolaire p, placées aux sommets d'un carré de côté a, et centré sur le cation.



1 - a) Tracer qualitativement les lignes de champ du champ électrique généré par un cation Cu^{2+}.
b) En déduire l'orientation des dipôles associés aux molécules d'eau autour de l'ion cuivre.
2 - a) Donner l'expression du champ électrique généré en un point $\mathrm{M}(r,\theta,\varphi)$ par une charge q dans le repère sphérique. En déduire l'énergie potentielle électrostatique associée à l'interaction Cu^{2+}-H_2O.
b)

schéma a)

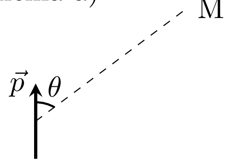
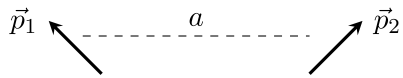


schéma b)



Le champ électrique dipolaire s'écrit (voir le schéma a)

$$\vec{\mathrm{E}}(r,\theta) = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,\vec{e}_r + \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,\vec{e}_\theta$$

A l'aide du schéma de solvatation de l'ion cuivre de la question 1b), donner l'expression du champ électrique généré par une molécule d'eau à la position de la molécule d'eau voisine, distante de a (voir schéma b). En déduire l'énergie potentielle d'interaction entre ces deux molécules d'eau.
c) Procéder de même pour deux molécules d'eau situées sur la diagonale du carré.
3 - a) Exprimer l'énergie potentielle électrostatique de l'ion hydraté. Tenir compte des interactions Cu^{2+}-H_2O ; H_2O-H_2O et la mettre sous la forme $\mathrm{E}_p = 4\mathrm{E}_1 + 4\mathrm{E}_2 + 2\mathrm{E}_3$ en explicitant chaque terme.

b) Calculer les différentes contributions à l'énergie de solvatation et l'énergie totale de solvatation. L'exprimer pour une mole d'ions cuivres.

Données : $p = 1{,}8\mathrm{D} = 6{,}0 \cdot 10^{-30}\,\mathrm{C \cdot m}$; $a = 3 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$; $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}}$; $\mathcal{N}_\mathcal{A} = 6 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$.