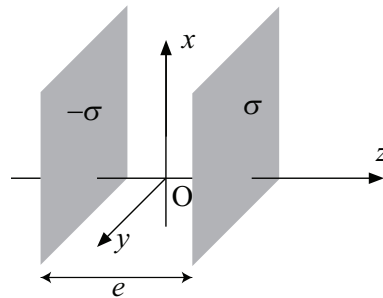


## Les indispensables

### Exercice 1

*D'après CCP 11*

On considère un condensateur plan infini formé par deux plans infinis et parallèles entre eux, distants de  $e$ . Le plan de droite est situé dans le plan  $z = +e/2$  et le plan de gauche dans le plan  $z = -e/2$ . Le plan de droite est chargé avec une densité surfacique  $\sigma$  et le plan de gauche est chargé avec une densité surfacique opposée  $-\sigma$ .



1 - Rappeler l'expression du champ électrique créée par un seul plans.

2 - En déduire le champ électrique total créé par l'ensemble des deux plans en tout point de l'espace. Porter sur un schéma le sens du champ électrique.

3 - Exprimer l'expression du potentiel électrostatique  $V(z)$  en supposant que  $V(z = 0) = 0$ .

4 - Calculer la différence de potentiel  $U$  entre les deux plans infinis en fonction de  $\sigma$ ,  $e$  et  $\epsilon_0$ . Exprimer la norme du champ électrique total en fonction de  $U$  et  $e$ .

5 - Les condensateurs des microphones électrostatiques pour la prise de son, sont soumis à des tensions de l'ordre de quelques dizaines de volts et les armatures sont séparées de quelques dizaines de micromètres. Donner l'ordre de grandeur du champ électrique régnant dans ces condensateurs. Quel problème pratique pose un champ électrique trop grand ?

6 - Dans un condensateur réel, les deux armatures ne peuvent pas être

des plans infinis mais ont des surfaces finies identiques  $S$ . On supposera que les résultats trouvés restent valables. L'armature de droite porte alors la charge totale  $+Q$  et l'armature de gauche la charge totale  $-Q$ . Définir et exprimer la capacité  $C$  du condensateur formé en fonction de  $\epsilon_0$ ,  $e$  et  $S$ .

7 - Donner l'ordre de grandeur de la capacité d'un condensateur utilisé dans un microphone électrostatique pour lequel on prendra :  $S = 1 \text{ cm}^2$ ,  $e = 10^{-5} \text{ m}$  et  $\epsilon_0 = 10^{-11} \text{ SI}$ .

### Exercice 1

1.6 - En utilisant le principe de superposition, on en déduit que

$$E(-e/2 < z < e/2) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{et} \quad E = 0 \text{ sinon}$$

Le champ électrique est dirigé de la plaque chargée  $+$  vers la plaque chargée  $-$ .

1.7 - En utilisant la relation champ potentiel, on en déduit que

$$V(-e/2 < z < e/2) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} z$$

d'où 
$$U = V(e/2) - V(-e/2) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} e \quad \text{et} \quad E = U/e$$

1.8 - On a donc

$$E = \frac{10 \text{ V}}{10 \text{ } \mu\text{m}} = 10^6 \text{ V.m}^{-1}$$

des champs électriques trop grands peuvent créer une ionisation de l'air et donc des éclairs.

1.9 - On a

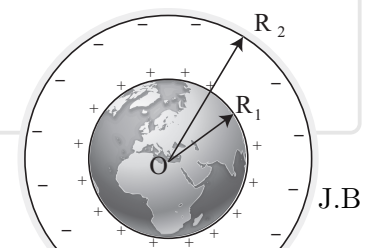
$$Q = \sigma S$$

Ainsi, 
$$C = \frac{Q}{U} = \epsilon_0 \frac{S}{e} = 10^{-11} \frac{10^{-4}}{10^{-5}} = 1 \text{ pF}$$

### Exercice 2

*D'après CCP 11*

L'ionosphère est la partie supérieure de l'atmosphère. La Terre peut être assimilée à un condensateur sphérique portant une charge



électrique positive à sa surface négative sur la ionosphère. On note  $Q$  la charge contenue par la surface de la Terre de rayon  $R_1$ . On note  $V_1$  le potentiel de la surface de la Terre et  $V_2$  celui de la ionosphère.

- 1 - Montrer que le champ entre la surface de la Terre et la ionosphère peut écrire sous la forme suivante :  $\vec{E} = E(r)\vec{u}$  où  $\vec{u}$  est un vecteur unitaire que l'on déterminera.
  - 2 - En appliquant le théorème Gauss, exprimer  $E(r)$  pour  $R_1 < r < R_2$ .
  - 3 - En déduire le potentiel  $V(r)$  à une distance  $r$  de l'axe pour  $R_1 < r < R_2$  en fonction de  $R_1$ ,  $r$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $Q$  et  $V_1$ .
  - 4 - Exprimer la différence de potentiel  $U = V_1 - V_2$  entre la surface de la Terre et la ionosphère en fonction de  $Q$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $R_1$  et  $R_2$
  - 5 - Il existe une différence de potentiel de  $3.10^5$  V entre la surface de la terre et la ionosphère. Calculer la charge  $Q$  et déterminer la norme du champ électrique au niveau du sol.
  - 6 - Déterminer la capacité  $C$  du condensateur où les deux armatures seraient formées par la surface de la Terre et la ionosphère en fonction de  $\varepsilon_0$ ,  $R_1$  et  $R_2$ .
  - 7 - En effectuant un développement limité, montrer que si  $e = R_2 - R_1 \ll R_1$ , le condensateur sphérique est équivalent à un condensateur plan.
- Données* :  $R_1 = 6370$  km,  $R_2 = 6460$  km,  $\varepsilon_0 = 8,9.10^{-12}$  F.m<sup>-1</sup>.

## Exercice 2

- 1 - Utilisons un repère sphérique, la densité de charge est invariante par rotation autour du centre O donc

$$\vec{E}(r, \theta, \phi) = \vec{E}(r)$$

Tout plan contenant O est plan de symétrie de la distribution de charge, on en déduit que  $\vec{E}(r) = E(r)\vec{e}_r$

- 2 - Prenons une surface de Gauss sphérique de rayon  $r$  et appliquons le théorème de Gauss.  $\phi(\vec{E}) = Q_{\text{int}}/\varepsilon_0$

Pour  $R_1 < r < R_2$ ,  $Q_{\text{int}} = Q$ , on en déduit que  $4\pi r^2 E = Q/\varepsilon_0$

soit 
$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

- 3 - D'après la relation de l'électrostatique :  $\vec{E} = -\text{grad } V$

Comme  $\vec{E}$  est porté par  $\vec{e}_r$  et ne dépend que de  $r$ , on en déduit que :

$$-\frac{dV}{dr} = E(r) \quad \text{soit} \quad V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C^{\text{te}}$$

D'après la condition limite  $V(R_1) = V_1$ , on en déduit que

$$V(R_1) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + C^{\text{te}} = V_1$$

d'où 
$$V(r) = +V_1 + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} \right)$$

- 4 - La différence de potentiel entre la surface et la ionosphère est donnée par :

$$V(R_2) = V_2 = V_1 + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \quad \text{soit} \quad U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

- 5 - La charge présente à la surface de la Terre vaut donc :

$$Q = \frac{4\pi\varepsilon_0 U R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 15.10^3 \text{ C}$$

Le champ électrique au niveau du sol est donc donnée par :

$$E(R_1) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2} = 3,4 \text{ V.m}^{-1}$$

- 6 - D'après la définition de la capacité d'un condensateur :

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 52 \text{ mF}$$

- 7 - Utilisons les notations de l'énoncé :

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 (R_1 + e)}{e}$$

On obtient donc au premier ordre en  $e/R$  :

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}{e}$$

On reconnaît l'expression de la capacité d'un condensateur plan de surfaces  $S = 4\pi R^2$  séparées de  $e$ .

## Pour s'entraîner

$$Q = C \times U = 2 \cdot 10^2 \text{ C}$$

### Exercice 3

On modélise un nuage d'orage par un carré de 3 km de côté à une altitude de 100 m. On suppose qu'il forme, avec la surface de la Terre, un condensateur plan.

Estimer la charge contenue dans le nuage lorsqu'apparaît un éclair (photo ci-contre Thomas Bresson ).

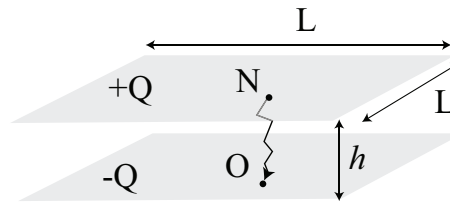
Données :

Champ disruptif de l'air  $E_d = 3 \cdot 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$  ; permittivité de l'air assimilé au vide :  $\epsilon_0 = 9 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$



### Exercice 3

Effectuons un schéma modèle de la situation en notant  $h$  la hauteur entre le ciel et les nuages et  $L$  la largeur du nuage. Comme on observe un éclair, on peut supposer que le champ électrique est de l'ordre du champ disruptif de l'air. On peut donc estimer la différence de potentiel par calcul de la circulation entre un point du sol  $O$  et  $N$  un point du nuage :



$$V_O - V_N = \int_O^N \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = h \times E_d = 3 \cdot 10^8 \text{ V}$$

En assimilant le nuage à une des armatures du condensateur, sa capacité, évaluée comme celle d'un condensateur plan est donnée par :

$$C = \frac{\epsilon_0 L^2}{h} = 800 \text{ nF}$$

On en déduit la charge portée par le nuage :

### Exercice 4

D'après CCP 10

On considère un condensateur cylindrique composé de deux armatures coaxiales de hauteur  $H$  et de rayons respectifs  $R_1$  et  $R_2$  avec  $R_1 < R_2$ . et placées dans l'air. L'armature interne porte la charge électrique  $Q > 0$ , l'armature externe porte une charge totale  $-Q$ .

Les potentiels électriques des armatures sont respectivement  $V_1$  et  $V_2$ . Soit un point  $M$  situé à la distance  $r = KM$  de l'axe où  $K$  est le projeté orthogonale de  $M$  sur l'axe du condensateur.

1 - On néglige les effets de bord, montrer que  $\vec{E} = E(r)\vec{u}$

2 - En appliquant le théorème Gauss, exprimer  $E(r)$ .

3 - En déduire le potentiel  $V_r$  à une distance  $r$  de l'axe pour  $R_1 < r < R_2$ .

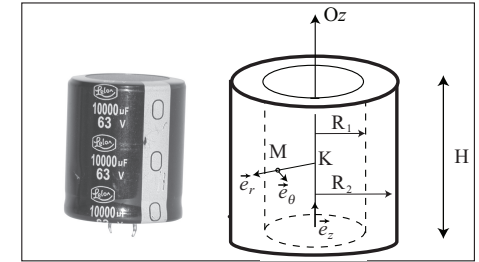
4 - Exprimer la différence de potentiel  $U = V_1 - V_2$  entre les deux armatures du condensateur en fonction de  $Q$ ,  $\epsilon_0$ ,  $H$ ,  $R_1$  et  $R_2$

5 - Déterminer la capacité  $C$  en fonction de  $\epsilon_0$ ,  $H$ ,  $R_1$  et  $R_2$ .

6 - Montrer que si  $e = R_2 - R_1 \ll R_1$ , le condensateur cylindriques est équivalent à un condensateur plan. On rappelle que  $\ln(1+x) \sim x$ .

7 - Pour un condensateur électrochimique de hauteur  $h = 1 \text{ cm}$ , de rayon  $R_1 = 5 \text{ mm}$ , de permittivité relative du diélectrique  $\epsilon_r = 5$ , déterminer l'épaisseur  $e$  pour obtenir une capacité de  $C = 100 \mu\text{F}$ . À quoi correspond l'ordre de grandeur de la distance obtenue ? Conclure.

Données :  $\epsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$



### Exercice 4

1 - La distribution de charge étant invariante par rotation autour de  $Oz$ , le champ électrique ne dépend pas de cette coordonnée  $\theta$ . Pour supposer que la distribution de charge est invariante par translation selon  $Oz$ , il faut négliger les effets de bord. Dans ce cas, on en déduit que le champ électrique ne dépend pas de  $z$ .

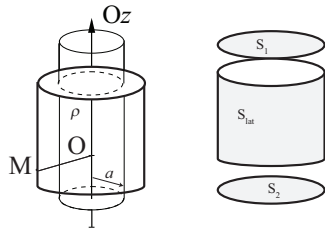
Ainsi,

$$\vec{E}(r, \theta, z) = \vec{E}(r)$$

Par ailleurs, les plans  $(M \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$   $(M \vec{e}_r, \vec{e}_z)$  sont plans de symétrie pour la distribution de charges, on en déduit que

$$\vec{E}(r) = E(r) \vec{e}_r$$

2 - Considérons une surface de Gauss cylindrique de même axe que le cylindre chargé, de rayon  $r$  et de hauteur  $h$ . Décomposons La surface de Gauss en trois parties :  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_{lat}$



Le champ étant radial, le flux du champ sur les surfaces  $S_1$  et  $S_2$  sont nuls. Le champ est uniforme sur la surface latérale, son flux vaut

$$\Phi_{S_{lat}}(\vec{E}) = E(r) \times 2\pi r h$$

Le flux sur la surface fermée vaut donc :

$$\Phi_S(\vec{E}) = E(r) \times 2\pi r h$$

- Cas  $r < R_1$ .  
La charge contenue dans la surface de Gauss est nulle
- Cas  $R_1 < r < R_2$ .  
La charge contenue dans la surface de Gauss vaut

$$Q_{int} = 2\pi R_1 h \sigma$$

- Cas  $r > R_2$ .  
La charge contenue dans la surface de Gauss s'annule :

$$Q_{int} = +Q - Q = 0$$

L'application du théorème de Gauss permet de conclure que

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad \text{soit} \quad E(r) = \begin{cases} \frac{R_1 \sigma}{\epsilon_0 r} & \text{si } R_1 < r < R_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3 - D'après la relation  $\vec{E} = -\text{grad } V$ , on en déduit que

$$E(r) = -\frac{dV}{dr}$$

Les équations vérifiées par le potentiel sont donc :

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{R_1 \sigma}{\epsilon_0 r}$$

soit

$$V(r) = -\frac{R_1 \sigma}{\epsilon_0} \ln r + C^{\text{te}}$$

En utilisant la condition limite  $V(R_1) = V_1$ , on obtient :

$$V(r) = -\frac{R_1 \sigma}{\epsilon_0} \ln \frac{r}{R_1} + V_1$$

4 - En utilisant la condition limite  $V(R_2) = V_2$ , on obtient :

$$V(R_2) = V_2 = -\frac{R_1 \sigma}{\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1} + V_1$$

d'où

$$U = \frac{R_1 \sigma}{\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

En supposant la distribution de charge uniforme,  $Q = 2\pi R_1 H \sigma$ , on obtient :

$$d'où \quad U = \frac{Q}{2\epsilon_0 \pi H} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

5 - La capacité d'un condensateur est donnée par

$$C = \frac{Q}{U} = \epsilon_0 \frac{2\pi H}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

6 - Posons  $e = R_2 - R_1$ , la relation ci-dessus devient :

$$C = \frac{Q}{U} = \epsilon_0 \frac{2\pi H}{\ln(1 + e/R_1)}$$

Effectuons un développement limité :

$$\ln(1 + e/R_1) \approx \frac{e}{R_1}$$

d'où 
$$C = \varepsilon_0 \frac{2\pi R_1 H}{e}$$

On reconnaît l'expression de la capacité d'un condensateur plan de surface  $2\pi R_1 H$  séparée d'un isolant d'épaisseur  $e$ .

7 - En présence d'un diélectrique de permittivité relative  $\varepsilon_r$ , la capacité est modifiée et devient :

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{2\pi R_1 H}{e}$$

On obtient ainsi :

$$e = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{2\pi R_1 H}{C}$$

A.N. : 
$$e = 140 \text{ pm}$$

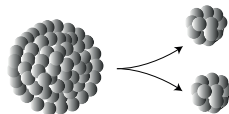
Cette épaisseur très faible correspond à une distance inter-atomique. Elle ne peut être obtenue mécaniquement. Ces épaisseurs sont obtenues par hydrolyse du diélectrique. Aucun procédé mécanique n'arrive à cette résolution.

## Pour performer

### Exercice 5

*D'après Oral Mines 19*

Un noyau peut-être considéré grossièrement comme une distribution sphérique uniforme de charges positives. On cherche à déterminer l'expression de l'énergie électrostatique d'une sphère de rayon  $a$  uniformément chargée en volume, de charge totale  $Q$  et de densité volumique de charges  $\rho$ .



1 - Déterminer la charge  $q(r)$  d'une sphère uniformément chargée de rayon  $r$ .

2 - Pour une sphère chargée de rayon  $r$ , déterminer le travail élémentaire qu'il faut fournir pour amener une charge  $\delta q = 4\pi r^2 \rho dr$  de l'infini à la distance  $r$ . En déduire l'énergie d'une sphère de rayon  $a$  et de charge  $Q$ .

4 - On suppose qu'un noyau d'uranium ( $Z=92$ , rayon :  $a = 7,5 \text{ fm}$ ) subit une fission symétrique en deux noyaux identiques de charge  $Q/2$ . Quelle

est l'énergie qu'on peut espérer récupérer dans cette opération du fait de la variation de l'énergie électrostatique ?

*Données* :  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ,  $\varepsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$

### Exercice 5

1 - Par définition :

$$q(r) = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

2 - Par définition, le travail de la force électrostatique pour amener une charge  $\delta q$  de l'infini en  $r$  est reliée à l'énergie potentielle associée :

$$\delta W(\vec{F}) = -(\mathcal{E}_P(r) - \mathcal{E}_P(\infty))$$

On en déduit que le travail fourni par une personne extérieure vaut :

$$\delta W_{ext} = -\delta W(\vec{F}) = \mathcal{E}_P(r) = \delta q \frac{q(r)}{4\pi \varepsilon_0 r}$$

En remplaçant les charges, il vient :

$$\delta W_{ext} = 4\pi r^2 \rho dr \frac{\rho \frac{4}{3} \pi r^3}{4\pi \varepsilon_0 r} = \frac{4}{3} \frac{\rho^2 \pi r^3 dr}{\varepsilon_0}$$

Par intégration, on obtient :

$$W_{ext} = \int_0^a \frac{4}{3} \frac{\rho^2 \pi r^4 dr}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi}{3} \frac{\rho^2 a^5}{5\varepsilon_0}$$

En utilisant l'expression de la charge volumique  $Q = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho$ , il vient

$$W_{ext} = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi \varepsilon_0 a}$$

4 - Soit  $a'$  le rayon des deux noyaux fils, alors :

$$\frac{Q}{2} = \frac{4}{3} \rho a'^3 = \frac{1}{2} \frac{4}{3} \rho a^3$$

On en déduit que

$$a' = \frac{1}{2^{1/3}} a$$

5 - L'énergie du noyau fils vaut alors :

---


$$\mathcal{E}' = \frac{3}{5} \frac{(Q/2)^2}{4\pi\epsilon_0 a'} = \frac{2^{1/3}}{4} W_{ext}$$

On remarque que l'énergie de deux noyaux fils est plus petite que l'énergie du noyau mère :

$$2\mathcal{E}' = \frac{2^{1/3}}{2} W_{ext} = \frac{1}{2^{2/3}} W_{ext} < W_{ext}$$

L'énergie récupérable est reliée à la différence d'énergie par

$$\mathcal{E}_{rec} = \mathcal{E} - 2\mathcal{E}' = (1 - \frac{1}{2^{2/3}}) W_{ext}$$

Avec les données, on obtient :

$$\mathcal{E} = 359 \text{ MeV}$$

En réalité l'énergie libérée par la fission de l'uranium 235 est de l'ordre de 193 MeV. Même s'il est amusant d'observer que l'ordre de grandeur de l'énergie est proche, les forces mises en jeu dans le noyau ne sont pas de toutes de nature électrostatique ! Il existe une autre force appelée interaction forte qui est responsable de la cohésion des nucléons (protons et neutrons) au sein du noyau de l'atome.