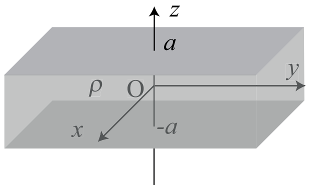
TD 07 : Electrostatique

Les indispensables

Exercice 1 — *D'après Oral CCP 07*

Considérons un volume défini en coordonnées cartésiennes par $-a < z < +a$ portant une densité volumique de charge ρ uniforme.
Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}$ en tout point de l'espace.



Exercice 2 — *D'après Oral CCP 11*

On considère un tube creux de rayon R et de hauteur $h \gg$ R selon l'axe Oz portant une densité surfacique de charge constante σ.

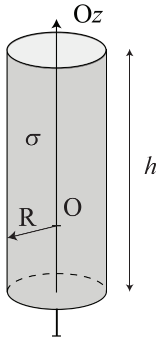
1 - Déterminer l'orientation du champ électrique $\vec{E}$ en tout point de l'espace.

2 - Exprimer le champ électrique $\vec{E}$ à l'intérieur et à l'extérieur du tube chargé.

3 - En déduire le potentiel électrique.

On considère la droite Oz portant une densité linéique de charge λ.

4 - Montrer que pour une valeur de λ judicieusement choisie, il est possible de retrouver le champ obtenu en question 2.



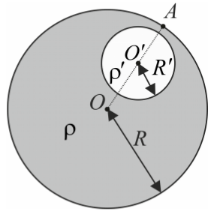
Pour s'entraîner

Exercice 3

On modélise la Terre comme une sphère de rayon R et homogène avec une masse volumique ρ.

1 - Calculer le champ de gravitation $\vec{g}_o$ à la surface de la Terre.

On considère un gisement correspondant à un défaut d'homogénéité de la Terre : dans une sphère de centre O' et de rayon $\mathrm{R}' < \mathrm{R}$, entièrement enfouie dans la Terre à une profondeur $h > \mathrm{R}'$, la masse volumique est $\rho' < \rho$.



2 - Quelle est alors la variation $\frac{\delta g_o}{g_o}$ de la norme du champ de pesanteur au point A situé à la surface de la Terre, à la verticale de O' ?

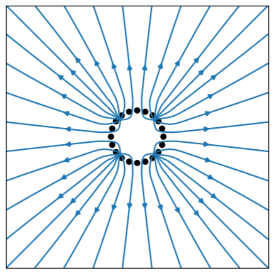
3 - Proposer un dispositif permettant de mesurer les fluctuations du champ de pesanteur.

Exercice 4

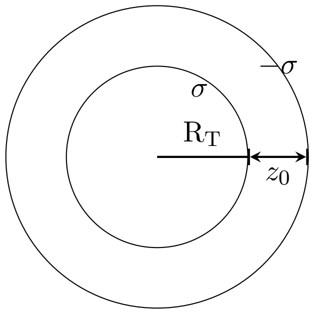
On s'interesse à la carte de champ suivante réalisée pour une distribution de charges ponctuelles déposées sur une sphère.

1 - Justifier le signe des charges présentes sur la carte ci-contre.

2 - Proposer une expression du champ électrique conforme à la carte de champ proposée.



Exercice 5



La foudre est une décharge électrique entre un nuage orageux chargé et la Terre. Le nuage orageux est généralement du type cumulo-nimbus (en forme d'enclume). La base de ces nuages, situé à l'altitude $z_0 = 2$ km, est chargée d'humidité alors que leur sommet, à 14 km d'altitude environ, est occupée par des particules de glace. Les mouvements d'air provoquent des frottements entre les micro-particules de glace et les gouttes d'eau ce qui conduit à charger le nuage par friction. Le bilan peut être représenté par un nuage chargé négativement à sa base et positivement à son sommet.

Le nuage chargé fait apparaître sur la Terre, par influence électrique, une charge positive. Pour modéliser le champ créé entre le nuage et la Terre, on représente l'ensemble par une sphère de rayon R_T (rayon terrestre) portant une densité de charge surfacique positive σ entourée par une sphère de rayon $R_T + z_0$ (distance entre la base du nuage et le centre de la Terre) portant une densité de charge surfacique négative $-\sigma'$.

1 - Établir *a priori* la forme du champ électrique en un point M quelconque.

2 - A l'aide du théorème de Gauss, donner l'expression du champ électrique

a) dans la Terre $r < R_T$;

b) entre la surface de la Terre et le bas des nuages $R_T < r < R_T + z_0$;

c) Tracer $E(r)$.

3 - Des mesures ont permis d'établir que le champ électrique est de l'ordre de $20\,\mathrm{kV \cdot m^{-1}}$ à la surface de la Terre par temps d'orage. En déduire la valeur de la densité de charge surfacique σ. La calculer.

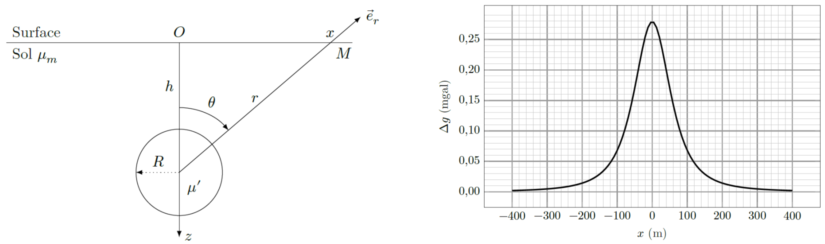
Données : Rayon moyen de la Terre $R_T = 6371$ km ; altitude de la base du nuage orageux $z_0 = 2{,}0$ km ; permittivité du vide $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}}$

Pour performer

Exercice 6 — *D'après Centrale 18*

La gravimétrie est l'étude des variations du champ de pesanteur dans l'espace et dans le temps. Elle permet de déterminer la répartition des masses au sein de la Terre et d'avoir ainsi accès à sa structure. Par exemple, la gravimétrie est utilisée pour déterminer la forme de la Terre (géodésie), pour détecter des cavités (génie civil ou archéologie), pour suivre les stockages d'eau (hydrologie continentale).

Dans cette partie, nous allons déterminer, par une analyse gravimétrique, les dimensions d'un corps sphérique enterré dans un sol de masse volumique moyenne μ_m (cf. figure 6).



Présence de cavités enterrées.. Anomalie gravimétrique Δg pour une sphère enterrée avec $\Delta\mu = 1000$ kg.m^{-3}

1 - En utilisant le théorème de Gauss gravitationnel, déterminer l'expression du champ de pesanteur en un point M situé à l'extérieur d'une sphère homogène de rayon R et de masse volumique $\mu = \mu_m + \Delta\mu$ en fonction de μ_m, $\Delta\mu$, G, R, r, distance de M au centre de la sphère, et du vecteur unitaire $\vec{e}_r$ (cf. fig6).

Le corps sphérique se trouve à une profondeur h dans le sol. Loin de la sphère (pour $r \gg R$), le champ de pesanteur est vertical selon Oz de valeur g_0.

2 - Monter que le champ de pesanteur pour un sol avec cavité peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{g}_{tot} = \vec{g}_0 + \vec{g}'_z$$

où le champ de pesanteur g'_z est celui créé par une sphère de masse volumique $\Delta\mu$.

3 - Montrer que l'anomalie gravimétrique définie selon l'axe Oz par $\Delta g = g_{tot,z} - g_0$ s'écrit

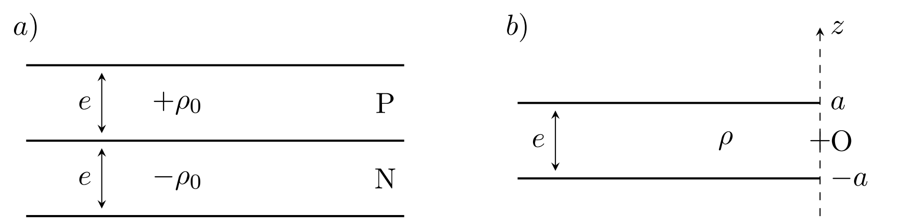
$$\Delta g = \frac{4\pi \mathrm{G} \Delta\mu \mathrm{R}^3 h}{3(x^2+h^2)^{3/2}}$$

4 - Tracer l'allure de la courbe Δg en fonction de x pour des sphères identiques enterrées à deux profondeurs différentes h_1 et $h_2 > h_1$.
5 - Quel est le lien entre la profondeur h et la largeur à mi-hauteur de la courbe ? Que vaut l'anomalie gravimétrique maximale ?
6 - Déterminer, à l'aide la courbe de la cf. fig 6, la profondeur h et le rayon R de la sphère enterrée.
7 - Comment rendre indétectable par analyse gravimétrique de l'or stocké dans une grotte sphérique ?
8 - La grotte de 1 m de rayon est à 4 m de profondeur. Quelle masse d'or est-il possible de cacher par cette méthode ? Pour information, la masse volumique de l'or est $\rho_{\mathrm{or}} = 19\,300$ kg.m^{-3}, celle de la roche de $\rho_m = 2000$ kg.m^{-3}.
Données :

- conversion : 1 mgal = $1\dot{1}0^{-5}$ m.s^{-2} ;
- $\mathcal{G} = 6{,}674.10^{-11}$ m^3.kg^{-1}.s^{-2} ;

Exercice 7

La jonction PN se trouve à la base des principaux composants électroniques. En effet, c'est sur ce principe que fonctionnent notamment les diodes et les transistors. La jonction PN est obtenue en juxtaposant un semi-conducteur dopé P portant une charge positive et un semi-conducteur dopé N, portant une charge négative. Dans cet exercice, on assimile ces matériaux à des galettes infinies, d'épaisseur e, délimitées par des plans parallèles et portant chacune des charges volumiques uniformes ρ_0 et $-\rho_0$ (figure a).



On considère tout d'abord un film d'épaisseur $e = 2a$ portant la charge volumique ρ La plaque est centrée en $z = 0$ (voir la figure b).
1 - a) Établir *a priori* la forme du champ électrique en un point M quelconque.
b) Exprimer E$(-z)$ en fonction de E(z).
c) A l'aide du théorème de Gauss, établir l'expression du champ électrique E(z) à l'extérieur et à l'intérieur de la plaque.
2 - La jonction PN complète est modélisée sur la figure a). A partir de la question 1, établir le champ électrique dans la jonction PN et à l'extérieur de la jonction. Le tracer.
Données : $e = 1{,}00\,\mu\mathrm{m}$; $\rho_0 = 7{,}00\,\mathrm{C \cdot m^{-3}}$; $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}}$

Exercice 8 *D'après ENAC, CCP 05, 17, 21*

Du point de vue du potentiel et du champ électrique qu'ils créent, les noyaux de certains atomes légers peuvent être modélisés par une distribution volumique de charge à l'intérieur d'une sphère de centre O et de rayon a. On désigne par $\vec{r} = \vec{\mathrm{OP}}$, le vecteur position d'un point P quelconque de l'espace. Pour $r < a$, la charge volumique qui représente le noyau varie en fonction de r suivant la loi :

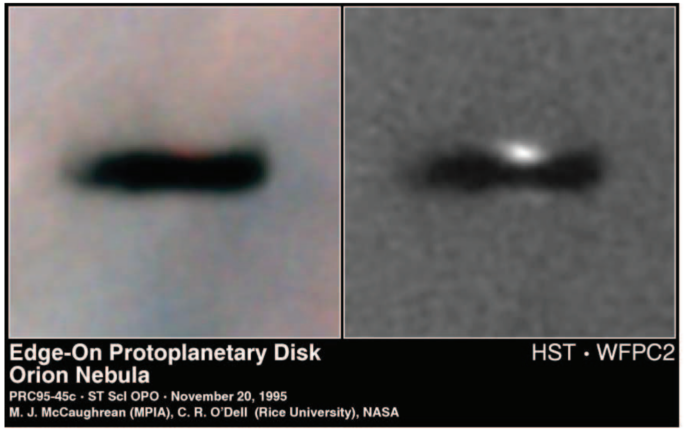
$$\rho(r) = \rho_0(1 - r^2/a^2)$$

où ρ_0 est une constante positive.
1 - Déterminer la charge totale Q du noyau.
2 - Calculer le champ électrique $\vec{\mathrm{E}}$ en tout point extérieur à la sphère $(r > a)$.
3 - Calculer le champ électrique $\vec{\mathrm{E}}$ en tout point intérieur à la sphère $(r < a)$.
4 - Exprimer le potentiel V créé par le noyau lorsque $r > a$, on prendra le potentiel nul à l'infini.

5 - Exprimer le potentiel V créé par le noyau lorsque $r < a$.

Exercice 9 *D'après Centrale 15*

On considère l'étoile comme une répartition de masse à symétrie sphérique, de centre O, de rayon R_E et de masse volumique ρ_E. On repère la position d'un point M dans un système de coordonnées sphériques, d'origine O, confondue avec le centre de l'étoile. On note R la distance de ce point M au centre O et $\vec{u}_r$ le vecteur unitaire radial de la base sphérique.



1 - Rappeler le théorème de Gauss pour la gravitation. En déduire le champ gravitationnel $\vec{g}_E$ créé par cette distribution en un point extérieur à l'étoile, i.e. pour $R > R_E$, en fonction de la constante de gravitation G, de R et d'une masse M_E que l'on exprimera en fonction de ρ_E et R_E uniquement.
2 - Soit le système de coordonnées cylindriques (r,θ,z) associé aux vecteurs $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$, tel que le plan $z = 0$ soit le plan moyen du disque protoplanétaire, passant par le centre de l'étoile β Pictoris. Montrer que, dans ce système de coordonnées, le champ gravitationnel de l'étoile $\vec{g}_E(M)$ s'écrit

$$\vec{g}_E = -G\frac{M_E}{(r^2 + z^2)^{3/2}}(r\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z)$$

3 - Pour estimer $\vec{g}_P(M)$, champ gravitationnel propre du disque protoplanétaire, on modélise le disque comme une couche cylindrique de masse volumique uniforme ρ_P, d'épaisseur e_P et de rayon $R_P \gg e_P$. Cette dernière hypothèse permet de négliger les effets de bords. La norme de $\vec{g}_P(M)$ ne peut dépendre que de ρ_P, e_P et de la constante de la gravitation G. Proposer une expression de g_P pour un point M en dehors du disque.
4 - On cherche à comparer $g_P(M)$ et $\vec{g}_E(M)$ afin de déterminer s'ils interviennent tous deux sur la répartition de matière dans le disque. Montrer que l'on peut négliger le champ du disque devant le champ de l'étoile pour des rayons inférieurs à un rayon R_C à expliciter en fonction de ρ_P, e_P et M_E.
5 - Dans le système solaire, 99,9% de la masse est concentrée dans le Soleil. Si on suppose que la répartition étoile-disque est à peu près identique dans le disque de β Pictoris, sans chercher à déterminer e_P,l'hypothèse qui consiste à négliger le champ du disque devant le champ de l'étoile.