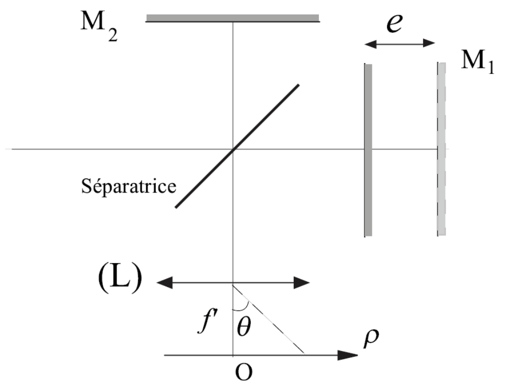
TD 6 : Michelson

Les indispensables

Exercice 1 *D'après E3A 09*



On considère un interféromètre de Michelson réglé afin d'obtenir des anneaux d'interférence sur un écran (E) placé dans le plan focal d'une lentille convergente (L). On notera f_0 la distance focale de cette lentille et e la distance entre les deux miroirs de l'interféromètre M_1 et M_2. Ce dispositif est éclairé par une source monochromatique de longueur d'onde λ.

1 - La distance qui sépare un point M de l'écran au centre O est notée ρ. Avec la condition $\rho \ll f_0$. Exprimer la différence de marche δ en fonction de e et de l'angle θ, puis en fonction de ρ, e et f_0. Illustrer la démonstration par un schéma explicatif.

2 - Exprimer l'éclairement E(ρ) obtenu en M. En déduire que la figure d'interférence projetée sur (E) est constituée d'anneaux concentriques centrés sur O.

3 - Le centre O des anneaux correspond à un maximum d'intensité. Quelle est la propriété de l'ordre d'interférence p_0 au centre des anneaux ?

4 - Exprimer k en fonction de p_0 et p_k ; en déduire l'expression de ρ_k en fonction de e, f_0, λ et k. Déterminer ρ_k en fonction de k et de ρ_1, le rayon du premier anneau compté à partir du centre.

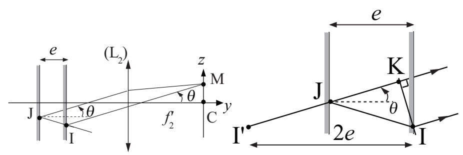
5 - Quel est le phénomène observé sur l'écran quand l'interféromètre est réglé au contact optique (c'est-à-dire quand $e = 0$) ? Décrire, en la justifiant, l'évolution des anneaux lorsque la valeur de l'épaisseur e de la lame d'air est progressivement augmentée :

- les anneaux semblent-ils "entrer" ou "sortir" du centre ?
- y a-t-il un nombre croissant ou décroissant d'anneaux visibles sur l'écran ?

6 - Une lame à faces parallèles d'indice n et d'épaisseur $e_{lame} = 8\ \mu$m est ajoutée devant et parallèlement au miroir mobile (M_1). Un brusque déplacement de 16 anneaux brillants au centre est alors observé. Évaluer numériquement l'indice de la lame sachant que $\lambda_0 = 500$ nm.

Exercice 1

1 - Effectuons un tracé des rayons lumineux pour un réglage en lame d'air :



L'application du théorème de Malus donne

$$\delta = 2e\cos i$$

Les relations dans le triangle OMC nous impose, avec l'approximation des petits angles

$$\tan i = \frac{\rho}{f_0'} \quad \text{soit} \quad \delta = 2e\Big(1 - 1/2(\rho/f_0)^2\Big)$$

2 - Utilisons la formule des interférences à deux ondes :

$$\mathcal{E} = 2\mathcal{E}_0\Big(1 + \cos\frac{2\pi\delta}{\lambda}\Big) = 2\mathcal{E}_0\Big(1 + \cos\frac{4\pi e(1 - 1/2(\rho/f_0)^2)}{\lambda}\Big)$$

L'éclairement est invariant par rotation autour de l'axe optique. On en déduit que la figure d'interférence possède une structure annulaire.

3 - Si le centre est brillant, l'ordre d'interférence est entier.

$$p_0 = \frac{2e}{\lambda}$$

Le k^{ieme} anneau possède un ordre d'interférence

$$p_k = p_0 - k$$

4 - Utilisons la définition de l'ordre d'interférence $p = \delta/\lambda$:

$$2e\left(1 - 1/2(\rho_k/f_0)^2\right) = 2e - k\lambda$$

Ainsi, $$\boxed{\rho_k = f_0\sqrt{\frac{k\lambda}{e}} = \rho_1\sqrt{k}}$$

5 - Au contact optique, l'éclairement est uniforme sur l'écran, il s'agit de la « teinte plate ». Pour l'anneau d'ordre $p_k = 2e\cos\theta_k/\lambda$, lorsque e augmente, comme p_k est constant (on fixe l'anneau), $\cos\theta_k$ diminue donc l'angle θ_k sous lequel est vu l'anneau augmente. On en déduit que

le rayon de l'anneau augmente avec e.

De même, lorsque e augmente, l'ordre au centre augmente ($p_0 = 2e/\lambda$). L'ordre des anneaux étant décroissant en partant du centre, on en déduit que le nombre d'anneaux visibles augmente.

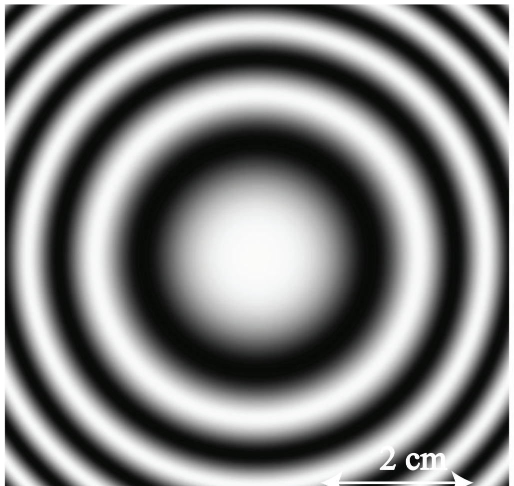
6 - Pour une variation de 16 anneaux brillants, on en déduit que la variation d'ordre d'interférence est de 16 unités au centre pour une différence de marche supplémentaire de

$$\delta = 2(n-1)e$$

Ainsi, $$\boxed{16 = \frac{2(n-1)e}{\lambda} \quad \text{soit} \quad n = 1 + 8\frac{\lambda}{e} = 1{,}5}$$

Exercice 2 *D'après Oral CCP 18*

Un interféromètre de Michelson est règlé en lame d'air d'épaisseur e et éclairée par une source étendue monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 639$ nm. L'image est projetée par une lentille convergente de distance focale $f' = 1{,}0$ m.



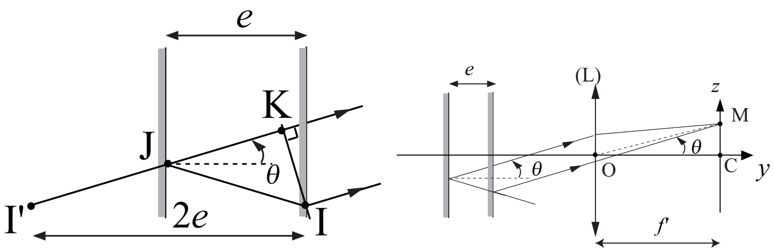
1 - Démontrer l'expression de la différence marche entre deux rayons qui interfèrent.

2 - Justifier que la figure sur l'écran est constituée d'anneaux concentriques.

3 - À l'aide de la figure, mesurer le rayon des deux premiers anneaux brillants. Déterminer l'ordre d'interférence au centre de la figure et en déduire l'écart e entre les miroirs.

Exercice 2

1 - Le schéma attendu est le suivant :



En appliquant le théorème de Malus, on obtient :

$$\boxed{\delta = (\mathrm{IJK}) = (\mathrm{I'JK}) = 2e\cos\theta}$$

2 - La différence de marche est invariante par rotation autour de l'axe Oy, on en déduit que la figure d'interférence possède une structure annulaire.

3 - On mesure $r_1 = 7$ mm et $r_2 = 1{,}9$ mm. D'après les données, ces rayons correspondent à des angles de :

$$\theta_1 \approx \frac{r_1}{f'} = 7.10^{-3}\ \text{rad} \quad \text{et} \quad \theta_2 = 19.10^{-3}\ \text{rad}$$

Ces rayons correspondent à des anneaux brillants donc à des ordres entiers successifs :

$$p_1 = \frac{2e\cos\theta_1}{\lambda} = p_2 + 1 = \frac{2e\cos\theta_2}{\lambda} + 1$$

On en déduit par différence que

$$e = \frac{\lambda}{2(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)}$$

On obtient alors

$$e = 2{,}05 \text{ mm}$$

L'ordre d'interférence au centre est donc de

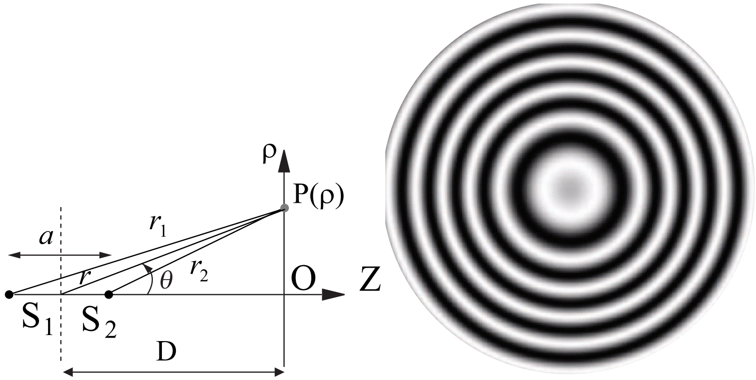
$$p_0 = \frac{2e}{\lambda} \approx 6385$$

On remarquera que l'ordre au centre n'est pas forcément entier ce qui se traduit par une zone grisée au centre de la figure ci-dessus.

Pour s'entraîner

Exercice 3 *D'après CCP 04*

On considère deux ondes de même amplitude s_0, émises par deux sources ponctuelles monochromatiques situées dans le vide, S_1 et S_2, distantes de la longueur a, ces deux sources étant cohérentes et en phase. On négligera la variation des amplitudes en fonction des parcours r_1 et r_2. Le plan d'observation est perpendiculaire à la droite des sources et situé à une distance D de leur point milieu. On suppose que D >> a et D >> ρ.



1 - Exprimer la différence de marche δ en fonction de a et θ.
2 - Justifier la figure d'interférences observée à l'écran.
3 - Exprimer l'intensité lumineuse I(ρ) au point P de l'écran.
4 - Calculer l'ordre d'interférence au centre de la figure.
5 - Définir et exprimer les rayons ρ_1 et ρ_2 des deux premiers anneaux brillants.

Données : $a = 0{,}1$ mm, D = 1 m et $\lambda = 620$ nm.

Exercice 3

1 - Évaluons le chemin optique de chacun des rayons en utilisant les vecteurs passant par O :

$$\mathrm{S_1P} = ||\vec{\mathrm{S_1P}}|| = ||\vec{\mathrm{S_1O}} + \vec{\mathrm{OP}}||$$

On en déduit que :

$$(\mathrm{S_1P}) = |\vec{r} - a/2\,\vec{e}_z| \quad \text{et} \quad (\mathrm{S_2P}) = |\vec{r}_2| = |\vec{r} + a/2\,\vec{e}_z|$$

d'où $$(\mathrm{S_1P}) = \sqrt{\vec{r}^2 + \frac{a^2}{4} + a\,\vec{e}_z.\vec{r}} \quad \text{et} \quad (\mathrm{S_2P}) = \sqrt{\vec{r}^2 + \frac{a^2}{4} + a\,\vec{e}_z.\vec{r}}$$

Avec $a\,\vec{e}_z.\vec{r} = ar\cos\theta$, effectuons un développement limité au premier ordre en a/r, il vient

$$(\mathrm{S_1P}) = r + \frac{1}{2}a\cos\theta \quad \text{et} \quad (\mathrm{S_2P}) = r - \frac{1}{2}a\cos\theta$$

Ainsi, $$\boxed{\delta = (\mathrm{S_2P}) - (\mathrm{S_1P}) = a\cos\theta}$$

2 - La différence de marche ne dépend pas de θ, la figure d'interférence est donc invariante par rotation autour de l'axe OZ.

3 - Notons $\mathrm{I_0} = s_0^2$ et appliquons la formule d'interférence à deux ondes, il vient :

$$\mathrm{I} = 2\mathrm{I_0}\Big(1 + \cos\frac{2\pi\delta}{\lambda}\Big)$$

soit $$\mathrm{I}(theta) = 2\mathrm{I_0}\Big(1 + \cos\frac{2\pi a\cos\theta}{\lambda}\Big)$$

Or $\mathrm{D} = \sqrt{\rho^2 + \mathrm{D}^2}\cos\theta$, on obtient donc

$$\boxed{\mathrm{I}(\rho) = 2\mathrm{I_0}\Big(1 + \cos\frac{2\pi a\mathrm{D}}{\lambda\sqrt{\rho^2 + \mathrm{D}^2}}\Big)}$$

4 - Notons $p = a\mathrm{D}/\lambda\sqrt{\rho^2 + \mathrm{D}^2}$ l'ordre d'interférence. Au centre, l'ordre vaut :

$$p_0 = \frac{a}{\lambda}$$

A.N. : $$\boxed{p_0 = 161{,}3}$$

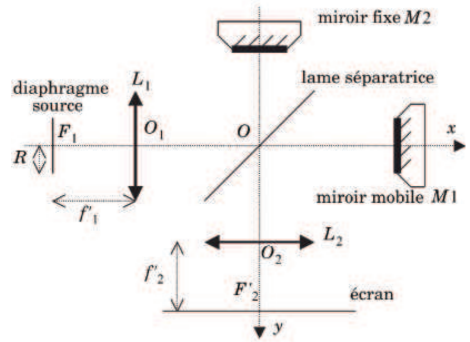
5 - L'ordre d'interférence est une fonction décroissante de ρ. Pour les deux premiers anneaux brillants, l'ordre d'interférence doit être entier, on vérifie donc :

$$p_1 = \frac{a\mathrm{D}}{\lambda\sqrt{\rho_1^2 + \mathrm{D}^2}} = 161 \quad \text{et} \quad p_2 = \frac{a\mathrm{D}}{\lambda\sqrt{\rho_2^2 + \mathrm{D}^2}} = 160$$

soit $$\boxed{\rho_1 = \sqrt{\Big(\frac{a\mathrm{D}}{\lambda \times 161}\Big)^2 - \mathrm{D}^2} \quad \text{et} \quad \rho_2 = \sqrt{\Big(\frac{a\mathrm{D}}{\lambda \times 160}\Big)^2 - \mathrm{D}^2}}$$

A.N. : $$\boxed{\rho_1 = 6{,}0\ \text{cm} \quad \text{et} \quad \rho_2 = 12{,}7\ \text{cm}}$$

Exercice 4 *D'après Centrale 07*



L'interféromètre est éclairé par une source étendue réalisée à l'aide d'un diaphragme ayant la forme d'un disque de rayon R et d'axe Ox. Ce diaphragme intercepte une lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 550$ nm. Il est placé dans le plan focal objet d'une lentille mince convergente $\mathrm{L_1}$ de focale $f'_1 = 10$ cm et d'axe Ox. On observe la figure d'interférence sur un écran situé dans le plan focal image d'une lentille mince convergente $\mathrm{L_2}$ de focale $f'_2 = 50$ cm et d'axe Oy. L'ensemble est placé dans l'air, dont l'indice est pris égal à 1.

1 - On observe des anneaux sur l'écran. En déduire le règlage des deux miroirs.

2 - La zone éclairée de l'écran est un disque de rayon $\mathrm{R'} = 5{,}0$ cm . Que vaut R ?

3 - On chariote le miroir $\mathrm{M_1}$ (translation dans la direction Ox) jusqu'à l'obtention d'un éclairement uniforme sur l'écran. Comment s'appelle cette situation ?

4 - À partir de la position précédente, on chariote maintenant $\mathrm{M_1}$ d'une distance e dans le sens des x croissants. Établir l'expression de la différence de marche δ entre les deux ondes qui interfèrent en un point M de l'écran.

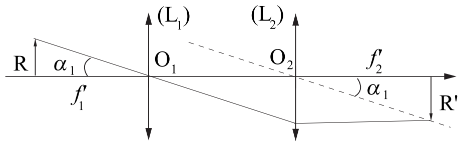
5 - On relève le rayon du premier anneau sombre à partir du centre de la figure : $r_1 = 1{,}5$ cm et celui du neuvième anneau sombre : $r_9 = 4{,}8$ cm. Calculer e.

6 - Exprimer puis calculer le rayon du deuxième anneau sombre.

Exercice 4

1 - Si l'on observe des anneaux c'est que l'interféromètre est réglé en lame d'air. Les deux miroirs sont perpendiculaires.

2 - Effectuons le tracé d'un rayon issu du sommet du diaphragme :



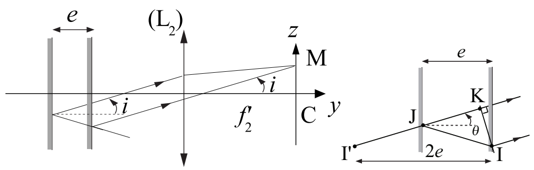
On obtient ansi que

$$\mathrm{R}' = f_2' \tan\alpha_1 = \frac{f'2}{f_1'}\mathrm{R} \text{ soit } \mathrm{R} = \frac{f_1'}{f_2'}\mathrm{R}'$$

A.N. : $\boxed{\mathrm{R} = 1{,}0 \text{ cm}}$

3 - L'éclairement uniforme est appelé la « teinte plate ». L'interféromètre de Michelson est réglé au « contact optique ».

4 - M étant dans le plan focal de la lentille L_2, les rayons interférant au point M ont tous la même inclinaison i avant de passer par la lentille.



La différence de marche vaut donc $\delta = (\mathrm{IJK}) = (\mathrm{I'JK})$. L'utilisation du théorème de Malus permet de conclure que

$$\boxed{\delta = 2e\cos i}$$

5 - L'ordre d'interférence est une fonction décroissante du rayon. La différence entre d'ordre d'interférence entre le 9° et le 1° anneau sombre est de -8 :

$$p_9 - p_1 = -8 = \frac{\delta_9 - \delta_1}{\lambda} = 2e\frac{\cos i_9 - \cos i_1}{\lambda}$$

A.N. : $\boxed{i_1 = \arctan\frac{\rho_1}{f_2'} = 0{,}030 \text{ rad} \quad \text{et} \quad i_9 = \arctan\frac{\rho_9}{f_2'} = 0{,}096 \text{ rad}}$

soit

$$e = -4\frac{\lambda}{\cos i_9 - \cos i_1}$$

A.N. : $\boxed{e = 0{,}53 \text{ mm}}$

6 - Le deuxième anneau sombre est inférieur d'une unité par rapport au premier d'où

$$p_2 - p_1 = -1 = \frac{\delta_2 - \delta_1}{\lambda} = 2e\frac{\cos i_2 - \cos i_1}{\lambda}$$

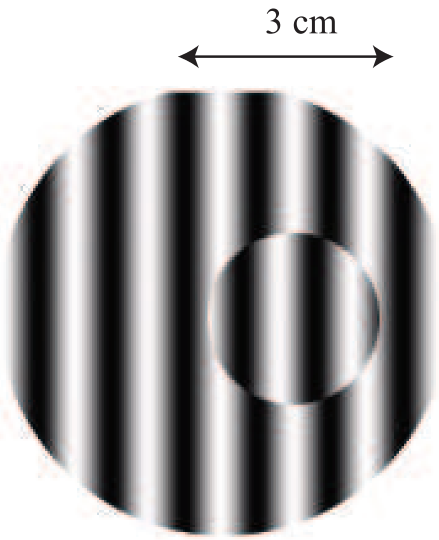
soit

$$\boxed{\cos i_2 = \cos i_1 - \frac{\lambda}{2e}}$$

A.N. : $\boxed{i_2 = 0{,}044 \text{ rad soit } \rho_2 = f_2' \tan i_2 = 2{,}2 \text{ cm}}$

Exercice 5 *D'après Oral CCP 16*

Un interféromètre de Michelson est réglé pour observer les franges du coin d'air. Il est éclairé par une source étendue à l'infinie. La figure d'interférences est projetée sur un écran à l'aide d'une lentille de distance focale $f' = 20$ cm ; la distance entre la lentille et l'écran est D = 1,30 m. La lumière est monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 633$ nm.



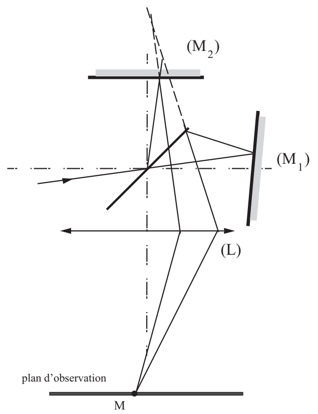
1 - Représenter le dispositif expérimental et faire le tracé de deux rayons qui interfèrent. Où sont localisées les franges d'interférences ?

2 - Exprimer puis calculer l'angle α entre les miroirs ?

3 - Expliquer la présence d'un défaut sur l'un des miroirs et déterminer son épaisseur et son diamètre.

Exercice 5

1 - Les franges sont localisées sur les miroirs. Le schéma attendu est :



2 - L'interfrange dans le plan d'interférence au niveau des miroirs est donné par

$$i = \frac{\lambda}{2\alpha}$$

Après projection de la figure sur l'écran, l'interfrange mesuré est donnée par

$$i_{\text{écran}} = i \times \frac{\mathrm{D} - f'}{f'} = \frac{\lambda}{2\alpha}\frac{\mathrm{D} - f'}{f'}$$

On mesure

$$\boxed{i_{\text{écran}} = 1{,}0 \text{ cm}}$$

d'où
$$\boxed{\alpha = \frac{\lambda}{2i_{\text{écran}}}\frac{\mathrm{D} - f'}{f'} = 1{,}7.10^{-4} \text{ rad}}$$

3 - La présence d'un défaut du miroir modifie localement la différence de marche. Le défaut est vraisemblablement un disque de diamètre $d' = 2{,}0$ cm sur l'écran, soit d'après la formule de grandissement

soit
$$\boxed{d = \frac{d'}{|\gamma|} = 3{,}6 \text{ mm}}$$

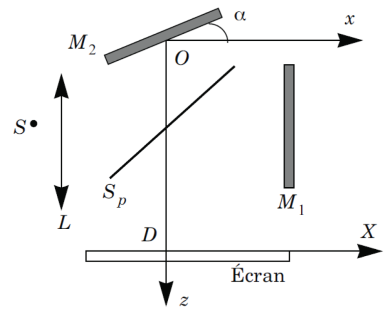
L'épaisseur du défaut e' rajoutant localement une différence de marche $\delta' = 2e'$, on observe un décalage des franges de $d = i/4$ ce qui veut dire que l'ordre d'interférence est modifié de :

$$\Delta p = 1/4 = \frac{2e'}{\lambda}$$

On en déduit que l'épaisseur du défaut vaut

$$\boxed{e' = \frac{\lambda}{8} \approx 79 \text{ nm}}$$

Exercice 6 *D'après Centrale PSI 10*



On considère une source ponctuelle monochromatique (Laser) que l'on place au foyer objet d'une lentille convergente de focale . Le faisceau émergent arrive sur un interféromètre de Michelson réglé en coin d'air. Par rapport à la position des miroirs correspondant au contact optique, le miroir est incliné d'un angle α. S_p correspond à la séparatrice qui divise le faisceau en deux sans apporter de modification dans le chemin optique : on suppose donc que la séparatrice n'introduit aucun déphasage supplémentaire. L'air a le même indice que le vide : $n_{air} = 1$.

1 - Comment est l'onde à la sortie de la lentille convergente , lentille parallèle à M_1 ? Dans le repère orthogonal Oxyz l'axe Oy est confondu avec l'arête du coin d'air, déterminer les composantes des vecteurs d'ondes des deux faisceaux issus du Michelson et qui interfèrent, en fonction de la longueur d'onde λ_0. Préciser au mieux la nature de ces ondes.

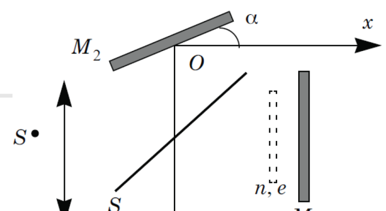
2 - Déterminer le déphasage $\Delta\phi$ entre l'onde qui s'est réfléchie sur M_2 et celle qui s'est réfléchie sur M_1 en un point M quelconque du champ d'interférences. Que vaut le déphasage en O ?

3 - Exprimer alors l'intensité lumineuse, ou éclairement, en un point M situé sur l'écran dans le plan en $z = \mathrm{D}$.

4 - Les interférences sont-elles localisées ou non localisées ? Justifier votre réponse.

5 - Préciser la nature des franges observées. En déduire l'expression de l'interfrange i puis la valeur numérique. Données : $\lambda_0 = 632{,}8$ nm ; $\alpha = 1°$.

6 - On intercale maintenant entre la lame séparatrice S_p et le miroir



M_1, une lame de verre à faces parallèles d'épaisseur e et d'indice n (représentée en pointillés sur la figure ci-contre). Cette lame est disposée parallèlement à M_1. On néglige les phénomènes de réflexion sur cette lame.
Quel déphasage supplémentaire cela implique-t-il pour un rayon traversant deux fois cette lame de verre ? Cette lame occasionne-t-elle une avance ou un retard de phase ? La lame atténue l'amplitude de l'onde incidente et celle-ci, qui valait A_0 avant le passage dans la lame, vaut εA_0 après deux passages, avec $\varepsilon \ll 1$.
7 - Déterminer l'amplitude résultante au même point M que précédemment. Puis exprimer l'éclairement. Simplifier en tenant compte de la très faible valeur de ε (développement à l'ordre 1).
8 - Donner l'expression du nouvel interfrange et comparer avec la valeur précédente. Quelle est l'influence de la lame sur la figure d'interférence ?
9 - On enregistre cette figure d'interférences sur une plaque photographique de hauteur L dans une direction perpendiculaire aux franges, disposée sur l'écran précédent. Combien voit-on, à une frange près, de franges brillantes sur cette plaque ? Données : L = 2,0 cm.

Exercice 6

1 - S étant placé dans le plan focal objet de L, l'onde issue de S devient plane.
2 - Les rayons qui interfèrent sont orientés de 2α les uns par rapport aux autres. L'application du théorème de Malus nous permet d'avoir

$$\delta = 2\alpha X$$

Ainsi,
$$\boxed{\Delta\phi = 2\pi\frac{\delta}{\lambda} = \frac{4\pi\alpha X}{\lambda}}$$

3 - Les deux ondes qui intérfèrent ont même amplitude, on peut donc appliquer la formule des interférences à deux ondes de même amplitude :

$$E = 2E_0(1+\cos\Delta\phi) = 2E_0(1+\cos\frac{4\pi\alpha X}{\lambda})$$

4 - Il s'agit d'une question piège : la source étant ponctuelle, les interférences ne sont pas localisées sur les miroirs....
5 - On observe des franges d'égale épaisseurs, l'identification de la période spatiale nous donne

$$\boxed{i = \frac{\lambda}{2\alpha} = 18\ \mu\text{m}}$$

6 - Les rayons lumineux se réfléchissant sur M_1 occasionne un chemin optique de ne au lieu de e, à l'aller et au retour. Le déphasage induit par la lame de verre est donnée par

$$\Delta\phi_{sup} = 2\pi\frac{2(n-1)e}{\lambda}$$

7 - L'amplitude de l'onde est donc de

$$s_{\text{tot}}(M) = s_1 + s_2 = \varepsilon A_0\cos(\omega t + \Delta\phi_{sup}) + A_0\cos(\omega t + \Delta\phi)$$

8 - L'éclairement donne après calcul :

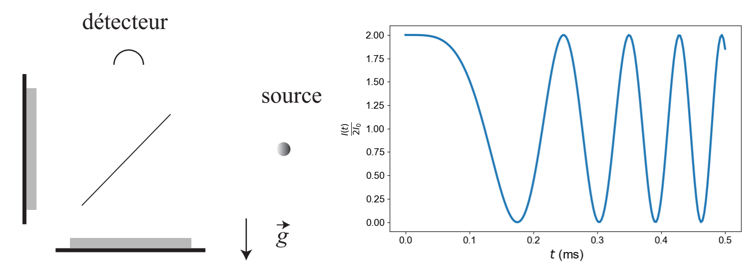
$$E = < s^2 > = 2E_0\Big(1 + \varepsilon\cos\big(2\pi(\frac{2\alpha X}{\lambda} + \frac{2(n-1)e}{\lambda})\big)\Big)$$

9 - L'interfrange reste inchangée. La lame décale uniquement la figure d'interférence.
10 - On observe $N = L/i$ franges, soit

$$\boxed{N = 1103 \text{ franges}}$$

Exercice 7 *D'après Oral CCP 19*

Un interféromètre est réglé en lame d'air et initialement au contact optique. Il possède un miroir un chute libre. La source de lumière est monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 600$ nm. Un capteur situé au foyer d'une lentille convergente enregistre l'intensité lumineuse dont la représentation est ci-dessous.



1 - Effectué un schéma annoté du dispositif expérimental.
2 - Montrer que l'étude de l'intensité lumineuse permet de remonter à la valeur de g.

Exercice 7

1 -

2 - On mesure l'intensité au centre de la figure, la différence de marche étant égale à $\delta = 2e(t)$. En chute libre, le miroir possède une altitude de la forme $z(t) = \frac{1}{2}gt^2$ pour un axe descendant. Ainsi l'intensité lumineuse est de la forme :

$$\mathrm{I}(t) = 2\mathrm{I}_0(1 + \cos 2\pi \frac{gt^2}{\lambda})$$

Sur la figure, on remarque des maximas successifs pour $t_1 = 0{,}25\,\mathrm{ms}$, $t_2 = 0{,}33\,\mathrm{ms}$, $t_3 = 0{,}41\,\mathrm{ms}$. Ces valeurs sont compatibles avec

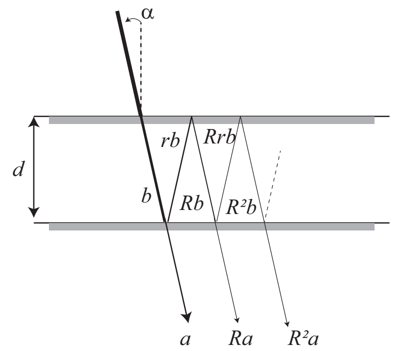
$$\frac{gt_k^2}{\lambda}) = k \quad \text{soit} \quad g = \frac{k\lambda}{t_k^2}$$

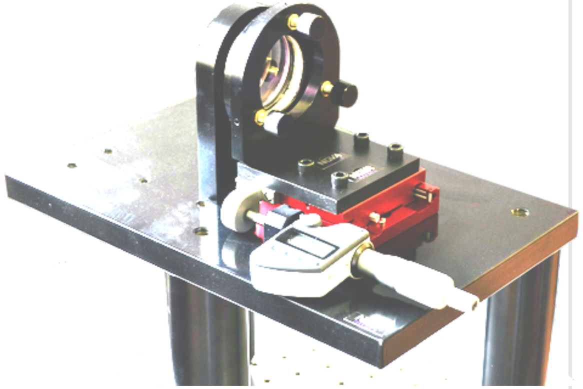
k	1	2	3
g, en $m \cdot s^{-2}$	9,6	10,4	10,7

Pour performer

Exercice 8 *D'après CCP 16*

On utilise un interféromètre constitué de deux miroirs plans parallèles, semi-réfléchissants de pouvoir de réflexion très élevé, distants de d, séparés par de l'air d'indice égal à 1. La distance d peut être modifiée par une vis micrométrique. On éclaire ce système par un faisceau de lumière parallèle monochromatique de de longueur d'onde λ_0, sous une incidence α faible. La situation est représentée ci-dessous.





1 - Établir la différence de marche entre deux rayons transmis successifs. On soignera la rédaction et les schémas.
On appelle $r = \frac{a_{reflechie}}{a_{incidente}}$ le coefficient de réflexion de l'amplitude de l'onde lumineuse quand elle se réfléchit sur les miroirs à l'intérieur de la cavité. On note $\mathrm{R} = r^2$ qui a une valeur quantité proche de 1 mais évidemment inférieure.
2 - Proposer une écriture en notation complexe pour la vibration du n^{ieme} rayon transmis si on nomme a l'amplitude de l'onde émergente sur le premier rayon transmis quand elle sort du miroir inférieur ? On l'exprimera avec a, R et $\phi = 4\pi d \cos\alpha/\lambda$.
3 - Donner l'amplitude totale de l'onde dans la direction α, en tenant compte des interférences de $\mathrm{N} \to \infty$ ondes transmises. On rappelle que la somme des termes d'une progression géométrique se calcule avec la formule :

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} x^n = \frac{1 - x^{\mathrm{N}+1}}{1 - x}$$

4 - Quelle sera la forme des figures d'interférences observées dans le plan focal d'une lentille convergente placée parallèlement aux miroirs ?
5 - À quelles valeurs de ϕ correspondent les pics d'intensité ?
6 - Justifier l'évolution de la figure lorsque R s'approche de 1, c'est-à-dire que de plus en plus d'ondes interfèrent.
Pour la suite du problème, on admet que l'intensité lumineuse est proportionnelle au facteur de transmission défini par :

$$\mathrm{G}(\alpha, d) = \left[1 + \frac{4\mathrm{R}}{(1-\mathrm{R})^2} \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda_0} d\cos\alpha\right]^{-1}$$

avec $\mathrm{R} = 1 - \varepsilon$ avec $\varepsilon \ll 1$
On considère que $\alpha = 0$ et on déplace les miroirs d'une quantité Δd à partir de $d_0 = p\lambda_0/2$ avec p entier. On veut donner une évaluation de la largeur des pics. Comme l'intensité n'est jamais nulle, on va prendre sa largeur à mi-hauteur, c'est-à-dire chercher l'intervalle Δd, autour de d_0 dans lequel $\mathrm{G}(0,d) > 1/2$.
7 - Quand avez-vous déjà utilisé ce genre de point de vue dans un autre domaine de la physique ? Exprimer le déplacement de Δd en fonction en fonction de ε et λ_0. Effectuer l'application numérique pour $\varepsilon = 0{,}01$.
8 - Déterminer la valeur $\Delta d_{michelson}$ équivalent à la définition ci-dessus pour un interféromètre de Michelson. Conclure.

Exercice 8

1 - Les rayons sortant du système interférentiels sont parallèles entre eux. Appliquons le théorème de Malus au point de réflexion. La différence de marche est donnée par

$$\delta = (\mathrm{IJKM}) - (\mathrm{IM})$$

En utilisant le principe du retour inverse de la lumière et le théorème de Malus, on obtient que

$$(\mathrm{KM}) = (\mathrm{IM})$$

On en déduit que :

$$\delta = (\mathrm{IJK})$$

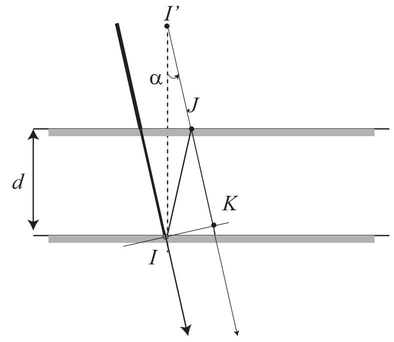
La méthode est identique à celle utilisée pour l'interféromètre du Michelson. Soit I′ le symétrique de I par rapport au premier miroir, on en déduit que

$$\boxed{\delta = 2d\cos\alpha}$$

2 - Le déphasage entre deux rayons s'écrit donc bien :

$$\phi = 2\pi\delta/\lambda = 4\pi d\cos\alpha/\lambda$$

Si la vibration du premier rayon s'écrit : $\underline{s}_1(\mathrm{M},t) = a\exp i(\omega t)$, celle du second rayon s'écrit :



$$\underline{s}_2(\mathrm{M},t) = \mathrm{R}a \times \exp i(\omega t - \phi(\mathrm{M}))$$

Le troisième est déphasé de ϕ par rapport au premier, il s'écrit :

$$\underline{s}_3(\mathrm{M},t) = \mathrm{R}^2 a \times \exp i(\omega t - 2\phi(\mathrm{M}))$$

On en déduit que

$$\boxed{\underline{s}_n(\mathrm{M},t) = \mathrm{R}^n a \times \exp i(\omega t - n \times \phi)}$$

3 - Par définition, l'amplitude totale pour N ondes s'écrit alors :

$$\underline{s}_{tot} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{R}^n a e^{i(\omega t - n\phi)} = a e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} (\mathrm{R}e^{-i\phi})^n$$

En utilisant la formule proposée avec $\mathrm{R}e^{-i\phi} \to 0$, on obtient :

$$\underline{s}_{tot} = a e^{i\omega t} \times \frac{1}{1 - \mathrm{R}e^{-i\phi)}}$$

4 - La différence de marche est invariante par rotation autour de l'axe optique, on obtiendra des anneaux ou franges d'égale inclinaison.
5 - Les pics d'intensités sont obtenus pour des ordres d'interférences entier soit :

$$\phi = 2\pi p$$

6 - Par analogie avec les réseaux, plus le nombre de rayons interférent plus les pics d'intensité deviennent fins.

7 - Ce genre de point de vue se retrouve pour la puissance (soit $|\underline{\mathrm{H}}|^2$ transmise dans un filtre passe-bande, soit $\underline{\mathrm{H}}(\omega) = \mathrm{H}_{max}/\sqrt{2}$.
En remplaçant $d = d_0 + \Delta d$, la fonction G devient :

$$\mathrm{G}(\alpha, d) = \left[1 + \frac{4}{\varepsilon^2} \sin^2\left(\pi p + 2\pi \frac{\Delta d}{\lambda_0}\right)\right]^{-1}$$

comme $\sin^2$ est π périodique, il vient :

$$\mathrm{G}(\alpha, d) = \frac{1}{1 + \frac{4}{\varepsilon^2} \sin^2\left(2\pi \frac{\Delta d}{\lambda_0}\right)}$$

La condition $\mathrm{G} > 1/2$ devient :

$$\frac{4}{\varepsilon^2} \sin^2\left(2\pi \frac{\Delta d}{\lambda_0}\right) < 1$$

d'où
$$\sin^2 2\pi \frac{\Delta d}{\lambda_0} < \frac{\varepsilon^2}{4}$$

Dans l'approximation des petits angles, il vient :

$$\Delta d < \lambda_0 \frac{\varepsilon}{4\pi}$$

On obtient alors :

$$\Delta d_{\mathrm{Fabry-Perot}} = 0{,}46 \text{ nm}$$

8 - Pour un interféromètre de Michelson, la différence de marche au centre de la figure est $\delta = 2d$. L'intensité lumineuse est alors :

$$\mathrm{I}(d) = 2\mathrm{I}_0\left(1 + \cos \frac{2\pi \times 2d}{\lambda}\right)$$

Avec les mêmes conventions, on a $\mathrm{I}(d_0) = 4\mathrm{I}_0$. La largeur d'un pic est obtenue pour $\mathrm{I}(d_0 + \Delta d) = \mathrm{I}(d_0)/2$, on en déduit que

$$\mathrm{I}(d_0 + \Delta d) = 2\mathrm{I}_0\left(1 + \cos \frac{4\pi \Delta d}{\lambda}\right) = 2\mathrm{I}_0$$

d'où
$$\tfrac{4\pi\Delta d}{\lambda_0} = \tfrac{\pi}{2} \quad \text{soit} \quad \Delta d_{michelson} = \frac{\lambda_0}{8}$$

A.N. :
$$\boxed{\Delta d_{michelson} = 62 \text{ nm}}$$

On en déduit que

$$\Delta d_{michelson} \gg \Delta d_{fabry-\mathrm{Perot}}$$

L'interféromètre proposé, appelé interféromètre de Fabry-Perot est beaucoup plus précis puisque les pics d'intensité et les anneaux sont plus fins.