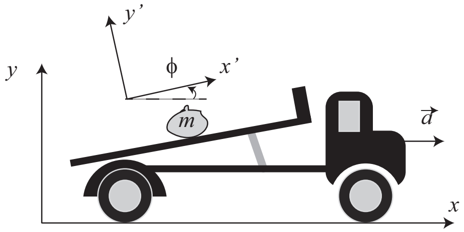
TD 3 : Référentiel non-galiléen

Les indispensables

Exercice 1

Un camion muni d'une benne accélère avec une accélération uniforme $\vec{a} = a_0\,\vec{e}_x$. On note ϕ l'angle formé par l'horizontal et la benne du camion. Un sac de sable de masse m est posé sur la benne, on note f le coefficient de frottement entre la surface de la benne et le sac.



1 - Effectuer un bilan des forces s'exerçant sur le sac de sable.

2 - Déterminer une condition sur a_0 pour que le sac de sable soit immobile dans le référentiel du camion.

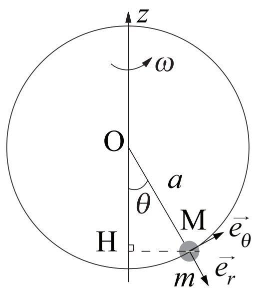
3 - Dans le cas où le sac glisse, déterminer $\ddot{x}'(t)$ et décrire le mouvement.

Exercice 2

Un cerceau de rayon a tourne autour de l'axe Oz à vitesse angulaire constante ω. Une perle de masse m se déplace sans frottement sur le cerceau. Dans le référentiel du cerceau en rotation, on définit une force d'inertie (communément appelée force centrifuge) donnée par

$$\vec{F}_{\text{ie}} = m\omega^2\vec{\text{HM}}$$

avec H projeté orthogonal de M sur l'axe de rotation.



1 - Déterminer l'énergie potentielle de pesanteur $\text{E}_{\text{P},pes}$ en fonction de m, g, a et θ. On prendra une énergie potentielle nulle en $\theta = 0$.

2 - Montrer que l'énergie potentielle associée à la force d'inertie d'entraînement est de la forme :

$$\text{E}_{\text{P},ie} = -\frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2\theta$$

3 - Déterminer l'énergie potentielle totale de la perle dans le référentiel tournant avec le cerceau et en déduire les positions d'équilibre de la perle selon les valeurs de ω.

4 - Discuter la stabilité de ces positions d'équilibre en fonction de ω. Tracer l'allure de l'énergie potentielle pour $\omega = 0$ et $\omega > \sqrt{g/a}$.

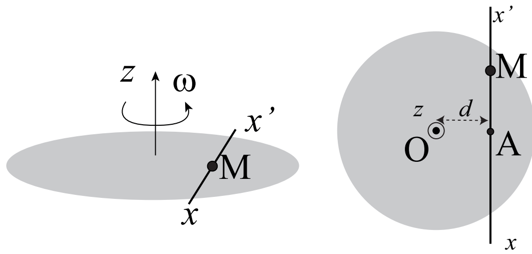
Pour s'entraîner

Exercice 3

À partir de la figure ci-dessous, calculer la vitesse de rotation du manège (en tour.min^{-1}).

Exercice 4

Un plateau horizontal est en rotation autour de l'axe Oz à la vitesse angulaire constante ω dans un référentiel $\mathcal{R}$ supposé galiléen.
Un point matériel M peut se déplacer sans frottement sur un rail xx' infini fixé sur le



plateau à une distance d de l'axe Oz. Ce point est soumis a son poids, à la réaction du support et à une force de rappel $\vec{F} = -k.\vec{AM}$ où A est le projeté orthogonale de O sur les rail. On notera AM $= x$.

1 - Appliquer le PFD et décrire toutes les forces (norme,direction,sens).

2 - Établir l'équation différentielle vérifiée par x.

3 - Discuter des solutions possibles.

Exercice 5 — *D'après Banque PT 05*

Un sismomètre pendule est constitué d'une masse m reliée à un châssis solidaire du sol auquel on associe le référentiel $\mathcal{R}'$. Ce dernier vibre avec une amplitude $u = u_0 \cos\omega t$ par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen. La liaison de m au bâti est modélisée par un comportement élastique de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, associé à un frottement fluide caractérisé par la constante γ.

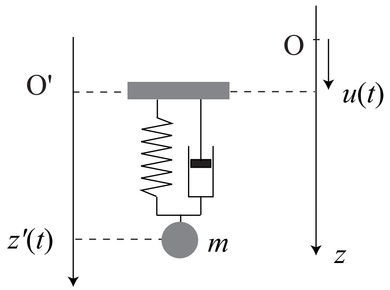


FIGURE 1 – Sismomètre.

1 - Déterminer la longueur Z_0 du ressort lorsque le système est au repos en l'absence de tremblement de terre.

2 - En raisonnant dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}'$ lié au sol, on pose

$$Z(t) = z'(t) - Z_0$$

Montrer que l'équation différentielle du mouvement s'écrit

$$\ddot{Z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{Z} + \omega_0^2 Z = -\ddot{u}$$

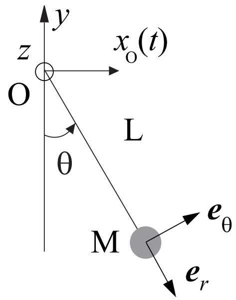
.

3 - Dans le cas de mouvements très rapides (de hautes fréquences), quel est le terme prépondérant (dans le premier membre). En déduire ce que représente $Z(t)$.

4 - Même question dans le cas de mouvements très lents.

Exercice 6 — *D'après Centrale 08, oral CCP 18, 21*

On considère un pendule simple constitué d'une masse M suspendue par un fil de longueur L. Le point de suspension O, attaché au sol, est soumis, par rapport au référentiel $\mathcal{R}_\mathcal{G}$, galiléen fixe, à un déplacement horizontal d'origine sismique $x_O(t)$. on note $\mathcal{R}_\mathcal{S}$ le référentiel lié au sol.



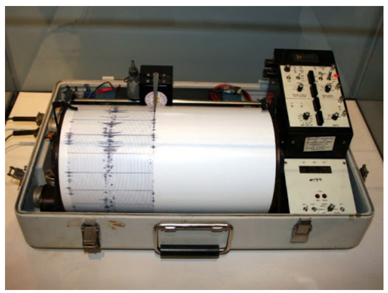
1 - Écrire l'équation du mouvement angulaire du pendule dans $\mathcal{R}_\mathcal{S}$. La linéariser dans l'hypothèse des petits mouvements angulaires. En déduire l'équation différentielle reliant le déplacement $\theta(t)$ de la masse M à celui $x_0(t)$ du sol.

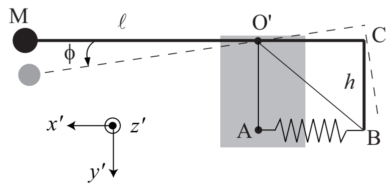
2 - Si $x_0(t) = X_0 \cos\omega t$, déterminer l'amplitude des oscillations $\Theta(\omega)$, où $\theta(t) = \Theta(\omega)\cos(\omega t + \phi)$.

Pour performer

Exercice 7

Un sismomètre de la société Geotech est constitué d'un pendule horizontal de masse m en M de longueur O$'$M $= \ell$. Il est libre de tourner autour du point O$'$, fixé , comme le point A sur un châssis (en grisé). Le point B mobile, est accroché à A par l'intermédiaire d'un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide L_0. On supposera l'existence d'une force de frottement $\vec{f}$ dont le moment en O$'$ est $\vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{f}) = -\gamma\dot{\phi}\vec{e}_z$. On repère par ϕ l'angle entre O$'$M et l'horizontal Ox'.Á l'équilibre, $\phi = 0$ et AB $= L_1$.





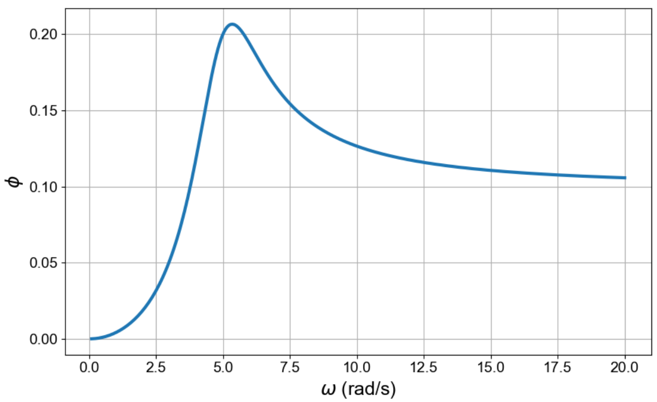
1 - Déterminer la distance $L = AB$ en fonction de ϕ en fonction de ϕ, h et L_1.
2 - En déduire l'expression du moment de la force de rappel due au ressort à l'équilibre.
3 - Déterminer L_1 en fonction de ℓ, m, g et L_0.
4 - En présence d'un tremblement de terre, on note $y(t)$ la position de O' par rapport à un référentiel galiléen. Montrer que dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié au sol, l'angle ϕ vérifie

$$\ddot{\phi} + \alpha\dot{\phi} + \Theta(\phi) = \beta\ddot{y}\cos\phi$$

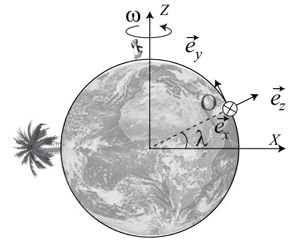
où Θ est une fonction de ϕ et α et β deux constantes que l'on déterminera.
5 - Linéariser cette équation pour des petites oscillations autour de la position d'équilibre $\phi = 0$, montrer que l'équation précédente peut se mettre sous la forme :

$$\ddot{\phi} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\phi} + \omega_0^2\phi = -\ddot{y}/\ell$$

6 - Si $y(t) = y_0\cos\omega t$, déterminer l'amplitude Φ des oscillations telles que $\phi(t) = \Phi(\omega)\cos(\omega t + \psi)$.
7 - À partir de la figure ci-après, estimer les valeurs de y_0/ℓ, ω_0 et Q.



Exercice 8 *D'après Oral Mines 19*



Dès 1791, Guglielmini réalisa des expériences de chute libre à Bologne pour tester le caractère (non) galiléen du référentiel terrestre. Une balle de masse m était lancée sans vitesse initiale d'une hauteur $\vec{OM} = h_0\,\vec{e}_z$ à la latitude $\lambda = 44{,}5°$. On rappelle que l'attraction terrestre sur une masse m exerce une force $\vec{F} = -GM_Tm/r^2\,\vec{e}_z$ où r est la distance au centre de la Terre.
1 - Dans le référentiel terrestre tournant à la vitesse angulaire ω et muni du repère local $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, exprimer le poids d'un corps de masse m à une altidude z en fonction de z, m, G, λ, M, R_T et ω.
2 - Simplifier cette expression dans le cas d'une chute d'une hauteur de 80 m environ. Montrer que le poids peut s'écrire sous la forme $\vec{P} = -mg\,\vec{e}_z$ avec g une constante dont on donnera la valeur numérique.
3 - Pour une chute libre dans le référentiel terrestre, justifier que les équations du mouvement peuvent se mettre sous la forme.

$$\ddot{x} \approx -2\omega\cos\lambda\dot{z} \quad \text{et} \quad \ddot{z} \approx -g$$

4 - La déviation vers l'est est un phénomène physique correspondant au fait qu'un corps en chute libre ne suit pas exactement la direction de la pesanteur, mais est légèrement dévié vers l'est. Justifier cette affirmation à partir des équation précédentes.
5 - Montrer que pour une chute de hauteur h_0, la position de l'impact vérifie : $x = \dfrac{2\sqrt{2}\omega\cos\lambda h_0^{3/2}}{3g^{1/2}}$
6 - Le déplacement mesuré à Bologne par Guglielmini était de 1,9 cm pour une hauteur de 78,3 m. Ce résultat vous parait-il cohérent ?
Données : $R_T = 6400$ km ; la masse de la Terre : $M = 6.10^{24}$ kg ; la constante de gravitation $G = 6{,}67.10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2}.